

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874;537.877;512.643.2;001.891.572

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗДЕЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ НА *ТЕ*- И *ТМ*-ВОЛНЫ¹

© 2020 г. К. А. Выговтов^{a, b, *}, Е. А. Барабанова^{a, b}, В. М. Вишневский^b, Ю. А. Максименко^a^aАстраханский государственный технический университет,
ул. Татищева, 16, Астрахань, 414056 Российская Федерация^bИнститут проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117342 Российская Федерация

*E-mail: vytovtov_konstan@mail.ru

Поступила в редакцию 09.09.2019 г.

После доработки 26.09.2019 г.

Принята к публикации 21.10.2019 г.

Рассмотрен одномерный анизотропный фотонный кристалл. Построена математическая модель, разделяющая волну эллиптической поляризации на волны *ТЕ*- и *ТМ*-типа. Найдена матрица преобразования для периодической структуры с произвольным числом слоев в периоде в виде блочной диагональной матрицы. Найдена матрица преобразования для произвольного числа периодов структуры с анизотропными слоями. Найдены дисперсионные отношения, определяющие границы разрешенных зон.

DOI: 10.31857/S0033849420070153

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача изучения фотонных кристаллов является актуальной в течение многих десятилетий [1–10]. В этом направлении решаются как линейные, так и нелинейные задачи. И наибольшее внимание привлекают именно нелинейные задачи [4, 5], а последнее время и такие задачи, как исследование графеновых пленок [6] и т.д.

Однако на сегодняшний день не все линейные задачи решены, несмотря на их практическую значимость. Более того, решение линейных задач зачастую является нулевым приближением и для задач нелинейных.

Одной из таких нерешенных задач является разделение эллиптически-поляризованных волн в одномерных анизотропных фотонных кристаллах на линейно-поляризованные волны и нахождение аналитических выражений, описывающих их поведение, хотя с физической точки зрения такое разделение очевидно. Действительно, в анизотропной среде в общем случае распространяется эллиптически поляризованная волна, которая может быть представлена как суперпозиция волн правой и левой круговой поляризации. Эти вол-

ны в свою очередь могут быть представлены как суперпозиция двух волн линейной поляризации. Для однородных сред такое разделение не вызывает проблем, но в случае неоднородных, в частности слоистых сред, решение этой задачи в аналитическом виде затруднительно, поскольку на границах раздела слоев наблюдается взаимодействие волн правой и левой поляризации. Решение этой задачи возможно либо путем разделения исходных волновых уравнений [3, 7, 9] на два, каждое из которых описывает соответствующий тип волны, либо путем преобразования матрицы фундаментальных решений (матрицы преобразования) [3, 9] этих уравнений к блочному диагональному виду.

В работе [7] было показано, что матрица преобразования однородного анизотропного слоя для определенных частных случаев может быть представлена в виде 4×4 блочной матрицы с 2×2 диагональными блоками

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} \mathbf{M}(z) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(z) \end{vmatrix} \quad (1)$$

(см. Приложение). Это случаи произвольного направления распространения волны в анизотропной среде и нормальной ориентации оси анизотропии, а также нормального распространения волны в среде и произвольной ориентации оси анизотропии. Представление матрицы преобразования в виде (1) уже равносильно разделению

¹ Работа доложена на Третьей Международной молодежной конференции “Информационные технологии и технологии коммуникации: современные достижения” (Астрахань, 1–5 октября 2019 г.).

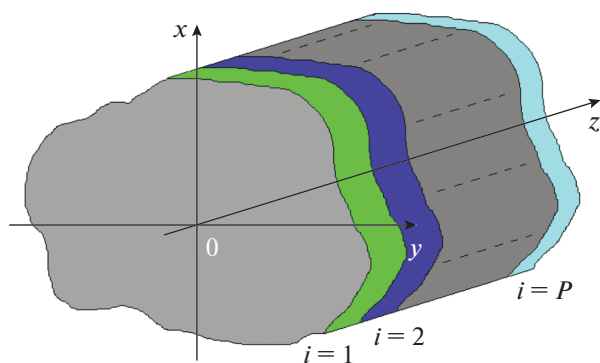


Рис. 1. Исследуемая структура.

результатирующей волны на TE - и TM -волны в однородной среде, поскольку эта матрица связывает тангенциальные компоненты полей E_y , H_x , E_x , H_y в начале и в конце однородного слоя [3, 7, 9, 11]:

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{L}(z)\mathbf{U}(0),$$

где

$$\mathbf{U}(0) = \{E_y(0), H_x(0), E_x(0), H_y(0)\}^T,$$

$$\mathbf{U}(z) = \{E_y(z), H_x(z), E_x(z), H_y(z)\}^T,$$

T – операция транспонирования.

Для слоистой среды результирующая матрица находится как произведение матриц слоев

$$\mathbf{L}_\Sigma = \begin{vmatrix} \mathbf{M}(\Lambda) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(\Lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \prod_{i=1}^P \mathbf{M}_i(z_i) & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^P \mathbf{N}_i(z_i) \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где P – количество слоев, $\Lambda = \sum_{i=1}^P z_i$ – общая толщина структуры, i – номер слоя, z – перпендикуляр к границе раздела слоев.

Такая матрица также является блочной диагональной матрицей с 2×2 -блоками по главной диагонали. Однако в [7] не было представлено конечного аналитического выражения для этого

случая, а выражение в виде произведения матриц не дает возможности дальнейшего аналитического исследования структуры.

Цель данной работы – нахождение общего аналитического вида матрицы преобразования в блочной диагональной форме для анизотропной слоистой среды с произвольным числом слоев, а также для периодической слоистой анизотропной среды (одномерного анизотропного фотонного кристалла) с произвольным числом слоев в периоде. Отметим, что аналогичные результаты были получены для случая изотропной среды [8] и анизотропной среды [9, 10] без разделения волны эллиптической поляризации на волны линейной поляризации.

На рис. 1 представлена исследуемая среда. Здесь наслоение ориентировано вдоль оси z . Разделение эллиптически поляризованной волны на линейно поляризованные волны возможно в двух случаях: 1) волна распространяется под произвольным углом к нормали z , а ось анизотропии совпадает с осью z ; 2) волна распространяется нормально к границам раздела слоев, а ось анизотропии ориентирована произвольно.

Нахождение матрицы в блочной диагональной форме позволит использовать весь математический аппарат, разработанный для изотропных структур в анализе анизотропных сред.

2. МАТРИЦА СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Найдем общее аналитическое выражение матриц $\mathbf{M}(\Lambda)$ и $\mathbf{L}(\Lambda)$ в (2) для произвольного числа однородных анизотропных слоев, если матрица единичного однородного слоя имеет вид (1) с блоками П1 и П5, представленными далее в Приложении (см. [7]). Для этого использован метод математической индукции.

Прежде всего найдем элементы матрицы преобразования $\mathbf{M}(\Lambda)$ для случая двух слоев. В результате перемножения матриц слоев и алгебраических преобразований запишем элемент $M_{11}^{(2)}$:

$$M_{11}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sqrt{\gamma_2^{(1)}\chi_1^{(1)}} - \sqrt{\gamma_1^{(1)}\chi_2^{(1)}}\right)\left(\sqrt{\gamma_2^{(2)}\chi_1^{(2)}} - \sqrt{\gamma_1^{(2)}\chi_2^{(2)}}\right)} \left[\sqrt{\gamma_1^{(1)}\chi_2^{(2)}} \left(\sqrt{\chi_2^{(1)}\gamma_1^{(2)}} - \sqrt{\chi_1^{(2)}\gamma_2^{(1)}} \right) \exp(jk_1^{(1)}z_1 + jk_1^{(2)}z_2) - \right. \\ \left. - \sqrt{\gamma_1^{(1)}\chi_1^{(2)}} \left(\sqrt{\chi_2^{(1)}\gamma_2^{(2)}} - \sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_1^{(1)}} \right) \exp(jk_1^{(1)}z_1 + jk_2^{(2)}z_2) - \sqrt{\gamma_2^{(1)}\chi_2^{(2)}} \left(\sqrt{\chi_1^{(1)}\gamma_2^{(2)}} - \sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_1^{(1)}} \right) \exp(jk_2^{(1)}z_1 + jk_1^{(2)}z_2) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\gamma_2^{(1)}\chi_1^{(2)}} \left(\sqrt{\chi_1^{(1)}\gamma_2^{(2)}} - \sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_1^{(1)}} \right) \exp(jk_2^{(1)}z_1 + jk_2^{(2)}z_2) \right]. \quad (3)$$

Здесь $M_{11}^{(2)}$ обозначает элемент первой строки первого столбца для двух слоев. Верхние индексы в скобках в правой части выражения (3) означают номер слоя, нижние индексы – номер волны в каждом слое.

Теперь найдем элементы матрицы преобразования $\mathbf{M}(\Lambda)$ для случая трех слоев. В результате перемножения матриц и алгебраических преобразований получим элемент $M_{11}^{(3)}$:

$$M_{11}^{(3)} = \frac{1}{\left(\sqrt{\gamma_2^{(1)}\chi_1^{(1)}} - \sqrt{\gamma_1^{(1)}\chi_2^{(1)}}\right)\left(\sqrt{\gamma_2^{(2)}\chi_1^{(2)}} - \sqrt{\gamma_1^{(2)}\chi_2^{(2)}}\right)\left(\sqrt{\gamma_2^{(3)}\chi_1^{(3)}} - \sqrt{\gamma_1^{(3)}\chi_2^{(3)}}\right)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\sqrt{\gamma_1^{(1)}\chi_2^{(3)}} \left(\sqrt{\chi_2^{(1)}\gamma_1^{(2)}} - \sqrt{\chi_1^{(2)}\gamma_2^{(1)}} \right) \left(\sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_1^{(3)}} - \sqrt{\chi_1^{(3)}\gamma_2^{(2)}} \right) \exp\left(\Omega_1^{(1)}z_1 + \Omega_1^{(2)}z_2 + \Omega_1^{(3)}z_3\right) - \right. \\ & - \sqrt{\gamma_1^{(1)}\chi_1^{(3)}} \left(\sqrt{\chi_2^{(1)}\gamma_1^{(2)}} - \sqrt{\chi_1^{(2)}\gamma_2^{(1)}} \right) \left(\sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_2^{(3)}} - \sqrt{\chi_2^{(3)}\gamma_2^{(2)}} \right) \exp\left(jk_1^{(1)}z_1 + jk_1^{(2)}z_2 + jk_2^{(3)}z_3\right) - \\ & - \sqrt{\gamma_1^{(1)}\chi_2^{(3)}} \left(\sqrt{\chi_2^{(1)}\gamma_2^{(2)}} - \sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_2^{(1)}} \right) \left(\sqrt{\chi_1^{(2)}\gamma_1^{(3)}} - \sqrt{\chi_1^{(3)}\gamma_1^{(2)}} \right) \exp\left(jk_1^{(1)}z_1 + jk_2^{(2)}z_2 + jk_1^{(3)}z_3\right) + \\ & + \sqrt{\gamma_1^{(1)}\chi_1^{(3)}} \left(\sqrt{\chi_2^{(1)}\gamma_2^{(2)}} - \sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_2^{(1)}} \right) \left(\sqrt{\chi_1^{(2)}\gamma_2^{(3)}} - \sqrt{\chi_2^{(3)}\gamma_1^{(2)}} \right) \exp\left(jk_1^{(1)}z_1 + jk_2^{(2)}z_2 + jk_2^{(3)}z_3\right) - \\ & - \sqrt{\gamma_2^{(1)}\chi_2^{(3)}} \left(\sqrt{\chi_1^{(1)}\gamma_1^{(2)}} - \sqrt{\chi_1^{(2)}\gamma_1^{(1)}} \right) \left(\sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_1^{(3)}} - \sqrt{\chi_1^{(3)}\gamma_2^{(2)}} \right) \exp\left(jk_2^{(1)}z_1 + jk_1^{(2)}z_2 + jk_1^{(3)}z_3\right) + \\ & + \sqrt{\gamma_2^{(1)}\chi_1^{(3)}} \left(\sqrt{\chi_1^{(1)}\gamma_1^{(2)}} - \sqrt{\chi_1^{(2)}\gamma_1^{(1)}} \right) \left(\sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_2^{(3)}} - \sqrt{\chi_2^{(3)}\gamma_2^{(2)}} \right) \exp\left(jk_2^{(1)}z_1 + jk_1^{(2)}z_2 + jk_2^{(3)}z_3\right) + \\ & + \sqrt{\gamma_2^{(1)}\chi_2^{(3)}} \left(\sqrt{\chi_1^{(1)}\gamma_2^{(2)}} - \sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_1^{(1)}} \right) \left(\sqrt{\chi_1^{(2)}\gamma_1^{(3)}} - \sqrt{\chi_1^{(3)}\gamma_1^{(2)}} \right) \exp\left(jk_2^{(1)}z_1 + jk_2^{(2)}z_2 + jk_1^{(3)}z_3\right) - \\ & - \sqrt{\gamma_2^{(1)}\chi_1^{(3)}} \left(\sqrt{\chi_1^{(1)}\gamma_2^{(2)}} - \sqrt{\chi_2^{(2)}\gamma_1^{(1)}} \right) \left(\sqrt{\chi_1^{(2)}\gamma_2^{(3)}} - \sqrt{\chi_2^{(3)}\gamma_1^{(2)}} \right) \exp\left(jk_2^{(1)}z_1 + jk_2^{(2)}z_2 + jk_2^{(3)}z_3\right) \Big]. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично находятся элементы $M_{12}^{(3)}$, $M_{21}^{(3)}$, $M_{22}^{(3)}$. Несмотря на то, что представленные элементы являются достаточно громоздкими, в них наблюдается определенная закономерность. Прежде всего, эта закономерность представляет собой сумму 2^P -слагаемых. При этом волновые числа слоев в показателях экспонент этих слагаемых

подчинены бинарному закону (соответствующие индексы). Учет закона изменения индексов в (4) осуществляется функцией $F_{q,i}$ (введенной автором работы [9]), где q – номер слагаемого в сумме (4), i – номер слоя. Тогда для трех интервалов получим следующее компактное аналитическое выражение:

$$M_{11}^{(3)} = \sum_{q=1}^{2^3} \left[(-1)^{\sum_{i=1}^3 F_{q,i}} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)}\chi_{2-F_{q,3}}^{(3)}} \frac{\prod_{i=1}^{3-1} \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)}\chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)}\chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^3 \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)}\chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)}\chi_2^{(i)}} \right)} \exp\left(\sum_{i=1}^3 jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i\right) \right]. \quad (5)$$

Элементы $M_{12}^{(3)}$, $M_{21}^{(3)}$, $M_{22}^{(3)}$ матрицы находятся аналогично.

Теперь на основании (5) предположим, что элементы матрицы преобразования P -слойной анизотропной структуры известны и описываются выражениями

$$M_{11}^P = \sum_{q=1}^{2^P} \left[(-1)^{\sum_{i=1}^N F_{q,i}} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)}\chi_{2-F_{q,P}}^{(P)}} \frac{\prod_{i=1}^{P-1} \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)}\chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)}\chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^P \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)}\chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)}\chi_2^{(i)}} \right)} \exp\left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i\right) \right],$$

$$M_{22}^P = \sum_{q=1}^{2^P} \left[(-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)}\gamma_{2-F_{q,N}}^{(P)}} \frac{\prod_{i=1}^{P-1} \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)}\chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)}\chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^P \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)}\chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)}\chi_2^{(i)}} \right)} \exp\left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i\right) \right],$$

$$M_{12}^P = \sum_{q=1}^{2^P} \left[(-1)^{\sum_{i=1}^N (F_{q,i}+1)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)}\gamma_{2-F_{q,N}}^{(P)}} \frac{\prod_{i=1}^{P-1} \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)}\chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)}\chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^P \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)}\chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)}\chi_2^{(i)}} \right)} \exp\left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i\right) \right], \quad (6)$$

$$M_{21}^P = \sum_{q=1}^{2^P} \left[(-1)^{\sum_{i=1}^N F_{q,i}} \sqrt{\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,N}}^{(P)}} \frac{\prod_{i=1}^{P-1} \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^P \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right)} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \right].$$

Найдем элемент $M_{11}^{(P+1)}$ матрицы для $P+1$ -слоев

$$\begin{aligned} M_{11}^{(P+1)} = & \sum_{q=1}^{2^P} \left[(-1)^{\sum_{i=1}^P F_{q,i}} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,N}}^{(P)}} \frac{\prod_{i=1}^{P-1} \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^P \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right)} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \right] \times \\ & \times \left[-\frac{\sqrt{\chi_2^{(P)} \gamma_1^{(P)}} \exp(jk_1^{(P)} z_P) - \sqrt{\chi_1^{(P)} \gamma_2^{(P)}} \exp(jk_2^{(P)} z_P)}{\sqrt{\chi_1^{(P)} \gamma_2^{(P)}} - \sqrt{\chi_2^{(P)} \gamma_1^{(P)}}} \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{2^P} \left[(-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,N}}^{(P)}} \frac{\prod_{i=1}^{P-1} \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^P \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right)} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \right] \times \\ & \times \left[-\sqrt{\chi_1^{(P)} \chi_2^{(P)}} \frac{\exp(jk_1^{(P)} z_P) - \exp(jk_2^{(P)} z_P)}{\sqrt{\chi_1^{(P)} \gamma_2^{(P)}} - \sqrt{\chi_2^{(P)} \gamma_1^{(P)}}} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

После алгебраических преобразований получим

$$M_{11}^{P+1} = \sum_{q=1}^{2^{P+1}} \left[(-1)^{\sum_{i=1}^{P+1} F_{q,i}} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,P+1}}^{(P+1)}} \frac{\prod_{i=1}^P \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^{P+1} \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right)} \exp \left(\sum_{i=1}^{P+1} jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \right]. \quad (8)$$

Вводя новую переменную $G = P+1$, приходим к первому выражению (6). Аналогично находим остальные элементы матрицы $\mathbf{M}^{(P+1)}$.

Тогда окончательно получим матрицу $\mathbf{M}(\Lambda)$ для P -слойной анизотропной структуры в виде конечной суммы матриц

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\Lambda) = & \sum_{q=1}^{2^P} \left[\frac{\prod_{i=1}^{P-1} \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^P \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right)} \times \right. \\ & \times \left. \begin{pmatrix} (-1)^{\sum_{i=1}^P F_{q,i}} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,P}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) & (-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,P}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^P F_{q,i}} \sqrt{\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,N}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) & (-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,P}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^N jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично, используя метод математической индукции, найдем выражение матрицы $\mathbf{L}(\Lambda)$ для P -слойной структуры

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\Lambda) = & \sum_{q=1}^{2^N} \left[\frac{\prod_{i=1}^{P-1} \left(\xi_{2-F_{q,i}}^{(i)} \zeta_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)} \sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \xi_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \zeta_{2-F_{q,i+1}}^{(i)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^P \left(\xi_2^{(i)} \zeta_1^{(i)} \sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \xi_1^{(i)} \zeta_2^{(i)} \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right)} \times \right. \\
& \times \left. \left((-1)^{\sum_{i=1}^P F_{q,i}} \xi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \zeta_{2-F_{q,i+1}}^{(P)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \right. \right. \\
& \times \left. \left((-1)^{\sum_{i=1}^P F_{q,i}} \zeta_{1+F_{q,i}}^{(1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \right. \right. \\
& \left. \left. (-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \xi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \right) \right. \\
& \left. \left. (-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \xi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \right) \right]
\end{aligned} \quad (10)$$

Итак, в данном разделе найдена матрица преобразования для рассматриваемых случаев анизотропной среды в виде блочной матрицы с 2×2 -блоками.

Таким образом, после несложных математических преобразований можно утверждать, что матрица преобразования многослойной анизотропной среды может быть представлена в виде суммы 2^P унимодулярных 4×4 -блочных диагональных матриц с 2×2 -блоками и определенными коэффициентами вклада

$$\mathbf{L}(\Lambda) = \sum_{q=1}^{2^P} \mathbf{L}_q = \sum_{q=1}^{2^P} \begin{vmatrix} \vartheta_q \mathbf{M}_q & 0 \\ 0 & v_q \mathbf{L}_q \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где матрицы $\mathbf{M}_q$, $\mathbf{L}_q$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_q = & \begin{vmatrix} (-1)^{\sum_{i=1}^P F_{q,i}} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) & (-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^P F_{q,i}} \sqrt{\chi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) & (-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \end{vmatrix}, \quad (12) \\
\mathbf{L}_q = & \begin{vmatrix} (-1)^{\sum_{i=1}^P F_{q,i}} \xi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \zeta_{2-F_{q,i+1}}^{(P)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^P F_{q,i}} \zeta_{1+F_{q,i}}^{(1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \xi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^P jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^P (F_{q,i}+1)} \zeta_{1+F_{q,i}}^{(1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,i+1}}^{(P)}} \exp \left(\sum_{i=1}^N jk_{1+F_{q,i}}^{(i)} z_i \right) \end{vmatrix}, \quad (13)
\end{aligned}$$

а коэффициенты вклада ϑ_q и v_q —

$$\vartheta_q = \frac{\prod_{i=1}^{P-1} \left(\sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^P \left(\sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right)}, \quad (14)$$

$$v_q = \prod_{i=1}^{P-1} \left(\xi_{2-F_{q,i}}^{(i)} \xi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)} \sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \xi_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(i)} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i+1}}^{(i)}} \right) / \prod_{i=1}^P \left(\xi_2^{(i)} \xi_1^{(i)} \sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \xi_1^{(i)} \xi_2^{(i)} \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right). \quad (15)$$

Унимодулярность матриц (12) и (13) будет доказана в следующем разделе. Тогда из (11) также следует, что результирующая волна может быть разложена в конечный спектр гармонических волн с номерами q от 1 до 2^P . Назовем волну с номером q – эквивалентной волной, а коэффициенты ϑ_q и v_q – коэффициентами вклада этих эквивалентных волн.

3. УНИМОДУЛЯРНОСТЬ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЕЕ БЛОКОВ

Анализ результатов [7] показывает, что определители матриц (12) и (13) имеют вид

$$\det \mathbf{M}(z) = \exp[(jk_1 + jk_2)z], \\ \det \mathbf{N}(z) = \exp[-(jk_1 + jk_2)z]. \quad (16)$$

Другими словами, данные матрицы являются унимодулярными. Следовательно, матрицы в (11) также являются унимодулярными, поскольку представляют собой произведение унимодулярных матриц (12) и (13), а определители этих матриц соответственно равны

$$\det[\mathbf{M}(\Lambda)] = \exp \left[\sum_{i=1}^P (jk_1^{(i)} + jk_2^{(i)}) z_i \right], \\ \det[\mathbf{L}(\Lambda)] = \exp \left[\sum_{i=1}^P (-jk_1^{(i)} - jk_2^{(i)}) z_i \right]. \quad (17)$$

Поскольку в соответствии с (17) определители матриц являются комплексной единицей, то на основании результатов работы [7] можно сделать вывод, что в структуре в общем случае существуют неоднородные *ТЕ*- и *ТМ*-волны.

4. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СЛОИСТАЯ СТРУКТУРА

Очевидно, что матрица фундаментальных решений для K периодов находится, как K -я степень матрицы (11):

$$\mathbf{L}(K\Lambda) = \begin{vmatrix} \mathbf{M}(\Lambda) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(\Lambda) \end{vmatrix}^K = \\ = \begin{vmatrix} \left(\sum_{q=1}^{2^P} \vartheta_q \mathbf{M}_q \right)^K & 0 \\ 0 & \left(\sum_{q=1}^{2^P} v_q \mathbf{L}_q \right)^K \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Поскольку матрицы $\mathbf{M}(\Lambda)$ и $\mathbf{N}(\Lambda)$ унимодулярны, то с учетом результатов, полученных еще Абеле [12, 13], их K -ю степень можно найти как

$$[\mathbf{M}(\Lambda)]^K = \begin{vmatrix} m_{11} \mathcal{U}_{K-1}(a) - \mathcal{U}_{K-2}(a) & m_{12} \mathcal{U}_{K-1}(a) \\ m_{21} \mathcal{U}_{K-1}(a) & m_{22} \mathcal{U}_{K-1}(a) - \mathcal{U}_{K-2}(a) \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$[\mathbf{N}(\Lambda)]^K = \begin{vmatrix} n_{11} \mathcal{U}_{K-1}(b) - \mathcal{U}_{K-2}(b) & n_{12} \mathcal{U}_{K-1}(b) \\ n_{21} \mathcal{U}_{K-1}(b) & n_{22} \mathcal{U}_{K-1}(b) - \mathcal{U}_{K-2}(b) \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Здесь $a = (m_{11} + m_{22})/2$, $b = (n_{11} + n_{22})/2$, $\mathcal{U}_K(x)$ – полиномы Чебышева второго рода:

$$\mathcal{U}_K(x) = \frac{\sin[(K+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (21)$$

Данный результат является очень важным с практической точки зрения, поскольку выражения (18)–(21) позволяют получить матрицу преобразований за K периодов по P слоев в каждом периоде.

Для периодических слоистых сред одной из основных является задача определения границ разрешенных и запрещенных зон. Данные границы соответствуют периодическим решениям и в соответствии с теорией Ляпунова [11] определяются значениями собственных чисел матрицы преобразования, которые находятся из дисперсионного отношения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{M}(\Lambda) - \lambda \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(\Lambda) - \lambda \mathbf{I} \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

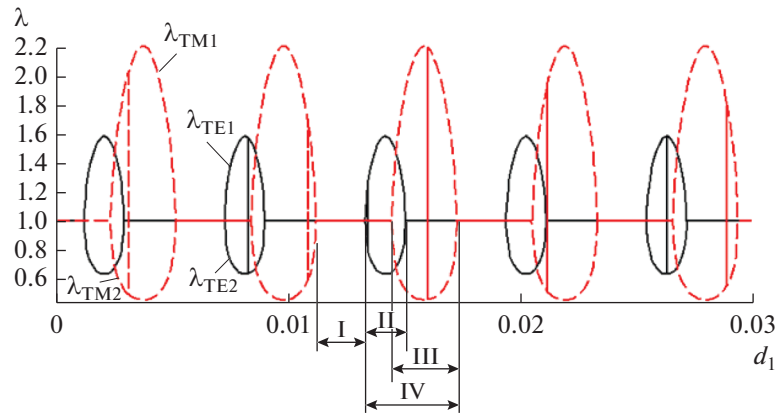


Рис. 2. Зависимость модулей собственных чисел бесконечной периодической среды от толщины первого слоя при угле падения 50° .

Если все собственные числа по модулю меньше либо равны единице, то решения системы уравнений Максвелла с периодическими коэффициентами, описывающей структуру, являются устойчивыми [11], а параметры структуры соответствуют разрешенным зонам. Для блочной матрицы (11) четыре собственных числа определяются как решения ее характеристического уравнения четвертого порядка (22), которое в данном случае дает дисперсионные отношения в виде

$$\begin{cases} \left| -\frac{\text{SpM}(\Lambda)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{SpM}(\Lambda))^2}{4} - \det \mathbf{M}(\Lambda)} \right| \leq 1, \\ \left| -\frac{\text{SpN}(\Lambda)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{SpN}(\Lambda))^2}{4} - \det \mathbf{N}(\Lambda)} \right| \leq 1. \end{cases} \quad (23)$$

Причем в разрешенных зонах должны выполняться все четыре условия (23) одновременно.

Таким образом, представляемый подход существенно упрощает решение задачи нахождения границ разрешенных и запрещенных зон, поскольку теперь речь идет об анализе 2×2 -матриц вместо 4×4 -матриц.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим одномерную бесконечную периодическую ферритовую среду с двумя слоями в периоде. Здесь частота волны 4 ГГц, угол падения 50° , материальные параметры для первого слоя $\mu_{xx} = 2.2$, $\mu_{xy} = 0.5$, $\mu_{zz} = 0.999$, для второго слоя $\mu_{xx} = 3.5$, $\mu_{xy} = 1.7$, $\mu_{zz} = 0.999$, $d_2 = 0.01$ м. На рис. 2 представлена зависимость модулей собственных чисел матриц, описывающих TE - и TM -волны от толщины первого слоя d_1 . Из рис. 2 видно, что собственные числа являются взаимнообратными. Области, в

которых собственные числа по модулю не равны единице, соответствуют запрещенным зонам, т.е. областям непрохождения волны, области, в которых собственные числа равны единице, соответствуют разрешенным областям. На рис. 2 сплошными линиями представлены собственные числа матрицы, описывающей TE -волны, штриховыми линиями – собственные числа матрицы, описывающие TM -волну. Области прохождения и непрохождения волны являются периодическими функциями толщины первого слоя периода. Так, в области II TE -волна затухает в пределах одного периода, в области III TM -волна затухает в пределах периода. Областью прохождения является область I, где незатухающими являются обе волны. При этом в областях, где затухает только одна волна (область IV), результирующая волна вырождается в TE - или TM -волну.

Аналогичная зависимость для угла падения 10° представлена на рис. 3. Таким образом, положение областей прохождения и непрохождения волны зависит и от угла падения волны. Из рис. 3 видно, что для данной структуры при данном угле

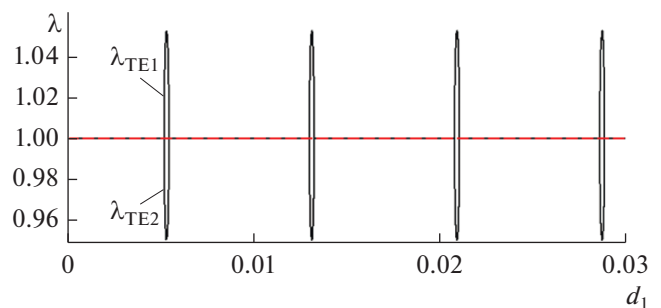


Рис. 3. Зависимость модулей собственных чисел бесконечной периодической среды от толщины первого слоя при угле падения 10° .

падения волны в ней существуют достаточно узкие области параметров, при которых распространяется только волна TM -типа, а волна TE -типа затухает в одном периоде. Очевидно, что данная структура может использоваться для выделения линейно-поляризованной волны из волны круговой поляризации.

ВЫВОДЫ

Рассмотрен одномерный анизотропный фотонный кристалл в рамках линейной задачи, в котором слои могут иметь и электрическую, и магнитную анизотропию. Рассмотрены случаи распространения плоской гармонической волны: 1) под произвольным углом к границам слоев при нормальной ориентации оси анизотропии; 2) перпендикулярно слоям при произвольной ориентации оси анизотропии.

В работе впервые аналитически приведено разделение эллиптически поляризованной волны в слоистой анизотропной среде на две волны линейной поляризации — TE и TM .

Впервые разработана математическая модель и найдены выражения матрицы преобразования в виде 4×4 -блочной диагональной матрицы с 2×2 -блоками для произвольного конечного числа P -слоев.

Впервые получены выражения матрицы преобразования для произвольного числа периодов анизотропной многослойной среды.

Впервые результирующая волна представлена в виде суперпозиции конечного числа гармонических волн с определенными коэффициентами вклада этих волн в результирующую.

Ограничением данной модели являются предельные случаи, когда при $z = 0$ волна содержит только компоненты E_y, H_x (TE -волна) или только компоненты E_x, H_y (TM -волна).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Матрица преобразования TE -волны [7] имеет вид

$$\mathbf{M}(z) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{\chi_2\gamma_1} \exp(jk_1z) - \sqrt{\chi_1\gamma_2} \exp(jk_2z)}{\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \sqrt{\chi_2\gamma_1}} & \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2} \exp(jk_1z) - \exp(jk_2z)}{\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \sqrt{\chi_2\gamma_1}} \\ -\sqrt{\chi_1\chi_2} \frac{\exp(jk_1z) - \exp(jk_2z)}{\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \sqrt{\chi_2\gamma_1}} & \frac{\sqrt{\chi_1\gamma_2} \exp(jk_1z) - \sqrt{\chi_2\gamma_1} \exp(jk_2z)}{\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \sqrt{\chi_2\gamma_1}} \end{vmatrix}, \quad (\text{П1})$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{a_{11}\xi_2 + a_{12}\zeta_1\xi_2 - a_{21} - a_{22}\zeta_1}{\xi_2 - \xi_1}, \\ \gamma_2 &= \frac{a_{11}\xi_1 + a_{12}\zeta_2\xi_1 - a_{21} - a_{22}\zeta_2}{\xi_2 - \xi_1}, \\ \chi_1 &= \frac{b_{21}\zeta_2 + b_{22}\xi_1\xi_2 - b_{11} - b_{12}\xi_1}{\xi_2 - \xi_1}, \\ \chi_2 &= \frac{b_{21}\zeta_1 + b_{22}\xi_2\xi_1 - b_{11} - b_{12}\xi_2}{\xi_2 - \xi_1}, \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

коэффициенты влияния $\xi_{1,2}, \zeta_{1,2}$ определяются выражениями

$$\xi_{1,2} = \frac{a_{22}b_{22} - a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}}{2(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})} \times \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(a_{22}b_{21} + a_{21}b_{11})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})}{(a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12})^2}} \right], \quad (\text{П3})$$

$$\zeta_{1,2} = -\frac{b_{12}\xi_{1,2} + b_{11}}{b_{22}\xi_{1,2} + b_{21}}. \quad (\text{П4})$$

Матрица преобразования TM -волны [7] имеет вид

$$\mathbf{N}(z) = \begin{vmatrix} \frac{-\zeta_2\xi_1\sqrt{\chi_2\gamma_1} \exp(-jk_1z) + \zeta_1\xi_2\sqrt{\chi_1\gamma_2} \exp(-jk_1z)}{\zeta_1\xi_2\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \zeta_2\xi_1\sqrt{\chi_2\gamma_1}} & \frac{\xi_1\xi_2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\zeta_1\xi_2\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \zeta_2\xi_1\sqrt{\chi_2\gamma_1}} [\exp(-jk_1z) - \exp(-jk_1z)] \\ \frac{-\zeta_1\xi_2\sqrt{\chi_1\chi_2} [\exp(-jk_1z) - \exp(-jk_1z)]}{\zeta_1\xi_2\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \zeta_2\xi_1\sqrt{\chi_2\gamma_1}} & \frac{\zeta_1\xi_2\sqrt{\chi_1\gamma_2} \exp(-jk_1z) - \zeta_2\xi_1\sqrt{\chi_2\gamma_1} \exp(-jk_1z)}{\zeta_1\xi_2\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \zeta_2\xi_1\sqrt{\chi_2\gamma_1}} \end{vmatrix}. \quad (\text{П5})$$

Таким образом, в [7] матрица преобразования представлена в виде диагональной блочной матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yablonovitch E.* // Phys. Rev. Lett. 1987. № 58. P. 2059.
2. *Vardeny Z.V., Nahata A., Agrawal A.* // Nat. Photonics. 2013. V. 7. P. 177.
3. *Berreman D.W.* // JOSA. 1972. V. 62. № 4. P. 502.
4. *Mingaleev S., Kivshar Y.* // Optics Photonics News. 2002. V. 13. № 7. P. 48.
5. *Jedrkiewicz O., Gatti A., Brambilla E. et al.* // Eur. Conf. on Lasers and Electro-Optics (CLEO Europe). Munich 25–29 Jun. 2017, N.Y. IEEE, 2017. P. 8086474.
6. *Zhan T., Shi X., Dai Yu. et al.* // J. Phys. Condens. Matter. 2013. V. 25. № 21. P. 215301.
7. *Vytovtov K.A., Tarasenko Yu.S.* // JOSA A. 2007. V. 24. № 11. P. 3564.
8. *Vytovtov K.* // JOSA A. 2005. V. 22. № 4. P. 689.
9. *Вытовтов К.А.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 2. С. 159.
10. *Passler N.C., Paarmann A.* // JOSA B. 2017. V. 34. № 10. P. 2128.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
12. *Abeles F.* // Ann. Physique. 1950. V. 5. P. 596.
13. *М. Борн, Э. Вольф.* Основы оптики. М.: Наука, 1973.