РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 7, с. 636–643

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874;537.877;512.643.2;001.891.572

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОМ АНИЗОТРОПНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ[1]

© 2020 г. К. А. Вытовтов[a, b, *], Е. А. Барабанова[a, b], В. М. Вишневский[b], Ю. А. Максименко[a]

[a]Астраханский государственный технический университет,
ул. Татищева, 16, Астрахань, 414056 Российская Федерация

[b]Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117342 Российская Федерация

*E-mail: vytovtov_konstan@mail.ru

Поступила в редакцию 17.12.2019 г.
После доработки 10.01.2020 г.
Принята к публикации 28.02.2020 г.

Рассмотрено поведение необыкновенной волны в слоистой одноосной анизотропной среде. Найдена матрица преобразования для однородного слоя и для многослойной структуры с произвольным числом слоев в аналитическом виде в элементарных функциях. Введено понятие парциальных волн в слоистой среде и их коэффициентов вклада для необыкновенной волны. Показано, что коэффициенты отражения и прохождения необыкновенной волны для плоскопараллельной пластины равны сумме коэффициентов отражения и прохождения парциальных волн.

DOI: 10.31857/S0033849420070165

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется разработке новых микроволновых и оптических систем связи и обработки информации [1–3]. Особенно остро этот вопрос стоит в связи с необходимостью перехода к системам 5G/6G (пятого/шестого поколения) стандартов [4, 5]. Увеличение скорости передачи и обработки информации очевидно возможно только при переходе в более высокие диапазоны, для которых не существует диодной и транзисторной элементной базы, а существующие СВЧ-устройства оказываются достаточно громоздкими. Более того, использование нелинейных элементов в оптическом диапазоне не приводит к увеличению скорости передачи и обработке информации, поскольку сами эти процессы имеют малую скорость. В связи с этим существует необходимость создания новых линейных устройств приемо-передающих трактов, обеспечивающих их надежное функционирование. Создание таких устройств, прежде всего, требует глубокого понимания физических процессов в СВЧ и оптических структурах, разработки математического аппарата для их расчета и описания принципа действия. Важнейшим классом таких устройств являются управляемые структуры с распределенными параметрами на основе многослойных анизотропных материалов [6–9].

Цель данной работы – исследовать поведение необыкновенной волны в одноосной анизотропной среде. Отличием данной волны от обыкновенной является отличие волновых чисел прямой и обратной волн, а также скоростей распространения этих волн. Кроме того, при ее отражении от границы раздела углы падения и отражения также будут различными. Для однородной среды свойства необыкновенной волны исследованы достаточно подробно [8, 9], не составляет труда и нахождение матрицы преобразования двухслойной или трехслойной структуры. Однако увеличение числа слоев приводит к усложнению результирующих выражений настолько, что они не поддаются дальнейшему аналитическому исследованию. Поэтому неоднородные анизотропные среды при распространении в них необыкновенной волны описывали, как правило, численными методами или исследовали экспериментально [10–12]. В данной работе впервые получена матрица преобразования для обыкновенной волны в многослойной среде с произвольным конечным числом слоев и произвольным направлением оси анизотропии в каждом слое в аналитическом виде в элементарных функциях. Данная матрица явля-

[1] Работа доложена на Третьей Международной молодежной конференции "Информационные технологии и технологии коммуникации: современные достижения" (Астрахань, 1–5 октября 2019 г.).

ется конечной суммой унимодулярных матриц с некоторыми коэффициентами. В соответствии с видом матрицы введено понятие парциальных волн многослойной структуры и коэффициентов вклада парциальных волн, поскольку с точки зрения физики унимодулярная матрица описывает поведение некоторого гармонического колебания. Проведен анализ отражения и прохождения волны через плоско-параллельную многослойную пластину и найдено, что результирующие коэффициенты отражения и прохождения равны сумме коэффициентов отражения и прохождения парциальных волн.

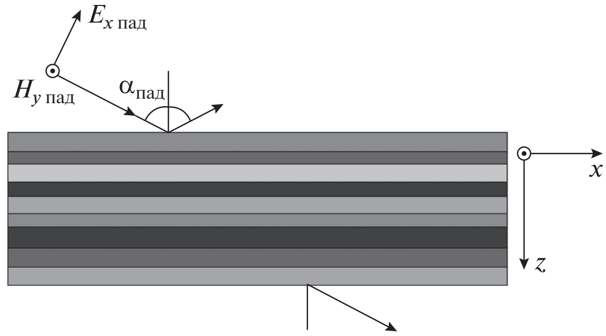

Рис. 1. Геометрия задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим поведение необыкновенной волны в одномерном фотонном кристалле, образованного одноосными анизотропными слоями с произвольном количестве слоев в периоде при произвольном направлении оси анизотропии (рис. 1). Диэлектрическая проницаемость каждого слоя описывается тензором

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

а магнитная проницаемость μ является скаляром. С использованием преобразования координат Эйлера [13], тензор (1) в системе координат, связанной с границей раздела слоев, может быть записан в виде

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11}\cos^2\theta + \varepsilon_{33}\sin^2\theta & 0 & (\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})\cos\theta\sin\theta \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ (\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})\cos\theta\sin\theta & 0 & \varepsilon_{11}\sin^2\theta + \varepsilon_{33}\cos^2\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Решение уравнений Максвелла для данного случая дает две волны: обыкновенную и необыкновенную. Волновые числа необыкновенной волны для данного случая, полученные в результате решения уравнений Максвелла, имеют вид

$$k_{z1,2} = \frac{-\varepsilon_{xx}k_x \pm \sqrt{k_x^2\varepsilon_{xx}\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{zz}\right) - \omega^2\mu\varepsilon_{zz}\left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xz}^2\right)}}{\varepsilon_{zz}}. \tag{3}$$

Важно отметить, что волновые числа прямой и обратной волн в данном случае являются различными, что существенно усложняет выражения, описывающие поведение такой волны. Выражения, связывающие компоненты электромагнитного поля необыкновенной волны, имеют вид

$$E_x = \frac{\varepsilon_{xz}k_x + \varepsilon_{zz}k_z}{\omega\left(\varepsilon_{zz}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2\right)}H_y, \quad E_z = -\frac{\varepsilon_{xx}k_x + \varepsilon_{xz}k_z}{\omega\left(\varepsilon_{zz}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2\right)}H_y. \tag{4}$$

Задачей данной работы является разработка математического метода для описания поведения необыкновенной волны в одномерном фотонном кристалле с произвольным числом одноосных анизотропных слоев в периоде при произвольном направлении оси анизотропии. Кроме того, задачей является исследование коэффициентов отражения и прохождения многослойной пластины с произвольным конечным числом слоев (см. рис. 1).

2. МЕТОД МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Математическая модель поведения необыкновенной волны в одноосной анизотропной среде при произвольном наклоне оси анизотропии основывается на методе матрицы преобразования, которая связывает тангенциальные компоненты полей на границах структуры:

$$\begin{vmatrix} E_{x2}(z) \\ H_{y2}(z) \end{vmatrix} = \mathbf{L}(z)\begin{vmatrix} E_{x1} \\ H_{y1} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Для однородного слоя данная матрица является фундаментальной системой решений уравнений Максвелла с постоянными коэффициентами и ее нахождение не представляет труда. Что касается матрицы преобразования многослойной структуры, то она является произведением матриц преобразования однородных слоев и такое произведение автоматически удовлетворяет граничным условиям на границах раздела слоев. Однако такое решение было представлено только для случая обыкновенной волны, когда скорости прямых и обратных волн в однородных слоях равны [14].

3. МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОРОДНОГО СЛОЯ

Для однородного слоя матрица находится с использованием типовой методики [14, 15] (Приложение 1) и имеет вид

$$\mathbf{L}(z)=\frac{1}{\chi_{Ex1}-\chi_{Ex2}}\begin{vmatrix}\chi_{Ex1}\exp(jk_1z)-\chi_{Ex2}\exp(jk_2z) & -\chi_{Ex1}\chi_{Ex2}\left[\exp(jk_1z)-\exp(jk_2z)\right]\\ \exp(jk_1z)-\exp(jk_2z) & -\chi_{Ex2}\exp(jk_1z)+\chi_{Ex1}\exp(jk_2z)\end{vmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\chi_{1,2}=\frac{k_{z1,2}\varepsilon_{zz}+k_x\varepsilon_{xz}}{\omega(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xz}\varepsilon_{zx})}. \tag{7}$$

В отличие от матрицы для волны в изотропной среде или обыкновенной волны в анизотропной среде, когда волновые числа прямых и обратных волн равны и элементы матрицы — тригонометрические функции [14, 15], элементы (6) представляют собой сумму экспонент. Определитель этой матрицы равен $\exp\left[j\left(k_1z+k_2z\right)\right]$, т.е. матрица (6) является унимодулярной. Однако запись (6) в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{L}(z)=\frac{1}{\chi_{Ex1}-\chi_{Ex2}}\left(\begin{vmatrix}\chi_{Ex1}\exp(jk_1z) & -\chi_{Ex1}\chi_{Ex2}\exp(jk_1z)\\ \exp(jk_1z) & -\chi_{Ex2}\exp(jk_1z)\end{vmatrix}-\right.\\ \left.-\begin{vmatrix}\chi_{Ex2}\exp(jk_2z) & -\chi_{Ex1}\chi_{Ex2}\exp(jk_2z)\\ \exp(jk_2z) & -\chi_{Ex1}\exp(jk_2z)\end{vmatrix}\right)=\\ =\frac{\exp(jk_1z)}{\chi_{Ex1}-\chi_{Ex2}}\begin{vmatrix}\chi_{Ex1} & -\chi_{Ex1}\chi_{Ex2}\\ 1 & -\chi_{Ex2}\end{vmatrix}-\frac{\exp(jk_2z)}{\chi_{Ex1}-\chi_{Ex2}}\begin{vmatrix}\chi_{Ex2} & -\chi_{Ex1}\chi_{Ex2}\\ 1 & -\chi_{Ex1}\end{vmatrix}\end{gathered} \tag{8}$$

дает нам сингулярное разложение матрицы преобразования. Для перехода к унимодулярным тригонометрическим матрицам, описывающим гармонические колебания, необходимо использовать преобразование Эйлера.

4. МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Матрицу преобразования для N-слойной структуры в общем случае находим как [14, 15] произведение

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}(d)=\mathbf{L}_N(d_N)\mathbf{L}_{N-1}(d_{N-1})\ldots\mathbf{L}_1(d_1)=\\ =\prod_{i=N}^{1}\mathbf{L}_{\mathrm{i}}(d_i). \tag{9}$$

Однако аналитического выражения для произвольного конечного числа слоев на сегодняшний день не получено. В данной работе с использованием достаточно громоздких алгебраических преобразований (Приложение 2) матрица преобразования для данного случая найдена в виде конечной суммы матриц $\mathbf{M}_q$ с коэффициентами вклада ϑ_q:

$$\mathbf{L}(d)=\sum_{q=1}^{N}\vartheta_q\mathbf{M}_q, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{M}_q=\\ =\begin{vmatrix}(-1)^{\sum_{i=1}^{N}F_{q,i}+N-1}\chi^{(1)}_{1+F_{q,1}} & (-1)^{\sum_{i=1}^{N}F_{q,i}+N}\gamma^{(1)}_{1+F_{q,1}}\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}\\ (-1)^{\sum_{i=1}^{N}F_{q,i}+N-1} & (-1)^{\sum_{i=1}^{N}F_{q,i}+N}\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}\end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$\vartheta_q=\frac{\prod_{i=1}^{N-1}\left(\chi^{(i)}_{2-F_{q,i}}-\chi^{(i+1)}_{1+F_{q,i+1}}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(\chi^{(i)}_1-\chi^{(i)}_2\right)}\exp\left(\sum_{i=1}^{N}jk^{(i)}_{1+F_{q,i}}z_i\right). \tag{12}$$

Функции $F_{q,i}$ определяются выражением

$$F_{q,i}=\frac{1}{2}1-\operatorname{sign}\left\{\sin\left[\frac{\pi}{2^{N+1-i}}(2p-1)\right]\right\}, \tag{13}$$

отличным от полученного авторами ранее [16].

Таким образом, матрица преобразования одноосного анизотропного фотонного кристалла с произвольным числом слоев в периоде найдена в аналитическом виде в элементарных функциях.

Матрица (10) является унимодулярной, что свидетельствует о выполнении закона сохранения энергии [17], однако, разложение представляет собой конечную сумму 2^N сингулярных матриц $(\det\mathbf{M}_q=0)$. Для перехода к унимодулярным матрицам, описывающим гармонические колебания, следует использовать преобразование Эйлера. Тогда вместо (10) запишем

$$\mathbf{L}(d) = \sum_{q=1}^{2^N} \nu_q \left(\mathbf{M}_{q\cos} + \mathbf{M}_{q\sin}\right), \tag{14}$$

где

$$\mathbf{M}_{q\cos} = \begin{vmatrix} (-1)^{\sum_{i=1}^{N} F_{q,i}+N-1} \sqrt{\dfrac{\chi^{(1)}_{1+F_{q,1}}}{\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}}} \cos\left(\sum_{i=1}^{N} k^{(i)}_{1+F_{q,i}} z_i\right) \\ j(-1)^{\sum_{i=1}^{N} F_{q,i}+N-1} \dfrac{1}{\sqrt{\gamma^{(1)}_{1+F_{q,1}}\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}}} \sin\left(\sum_{i=1}^{N} k^{(i)}_{1+F_{q,i}} z_i\right) \end{vmatrix} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} j(-1)^{\sum_{i=1}^{N} F_{q,i}+N} \sqrt{\gamma^{(1)}_{1+F_{q,1}}\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}} \sin\left(\sum_{i=1}^{N} k^{(i)}_{1+F_{q,i}} z_i\right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^{N} F_{q,i}+N} \sqrt{\dfrac{\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}}{\gamma^{(1)}_{1+F_{q,1}}}} \cos\left(\sum_{i=1}^{N} k^{(i)}_{1+F_{q,i}} z_i\right) \end{vmatrix}; \tag{15}$$

$$\mathbf{M}_{q\sin} = \begin{vmatrix} j(-1)^{\sum_{i=1}^{N} F_{q,i}+N-1} \sqrt{\dfrac{\chi^{(1)}_{1+F_{q,1}}}{\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}}} \sin\left(\sum_{i=1}^{N} k^{(i)}_{1+F_{q,i}} z_i\right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^{N} F_{q,i}+N-1} \dfrac{1}{\sqrt{\gamma^{(1)}_{1+F_{q,1}}\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}}} \cos\left(\sum_{i=1}^{N} k^{(i)}_{1+F_{q,i}} z_i\right) \end{vmatrix} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} (-1)^{\sum_{i=1}^{N} F_{q,i}+N} \sqrt{\gamma^{(1)}_{1+F_{q,1}}\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}} \cos\left(\sum_{i=1}^{N} k^{(i)}_{1+F_{q,i}} z_i\right) \\ j(-1)^{\sum_{i=1}^{N} F_{q,i}+N} \sqrt{\dfrac{\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}}{\gamma^{(1)}_{1+F_{q,1}}}} \sin\left(\sum_{i=1}^{N} k^{(i)}_{1+F_{q,i}} z_i\right) \end{vmatrix}; \tag{16}$$

$$\nu_q = \frac{\prod_{i=1}^{N-1}\left(\chi^{(i)}_{2-F_{q,i}} - \chi^{(i+1)}_{1+F_{q,i+1}}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(\chi^{(i)}_1 - \chi^{(i)}_2\right)} \sqrt{\gamma^{(1)}_{1+F_{q,1}}\gamma^{(N)}_{2-F_{q,N}}}\,. \tag{17}$$

Матрицы $\mathbf{M}_{q\cos}$ и $\mathbf{M}_{q\sin}$, полученные в результате преобразования Эйлера, являются унимодулярными и, следовательно, описывают незатухающие колебания [17]. Действительно, с математической точки зрения унитарное преобразование сохраняет площадь фигуры, построенной на соответствующих векторах. Таким образом, разложение (14) дает представление необыкновенной волны в одномерном анизотропном фотонном кристалле в виде суперпозиции 2^{N+1} гармонических волн. Волны, описываемые $\mathbf{M}_q$, назовем парциальными, волны, описываемые $\mathbf{M}_{q\cos}$ и $\mathbf{M}_{q\sin}$, назовем парциальными косинусной и синусной волнами, соответственно, а ϑ_q – коэффициентом вклада парциальной волны.

Учитывая вид матрицы преобразования (10) и используя методику [14, 15], найдем коэффициент отражения необыкновенной волны от многослойной анизотропной пластины

$$R = \frac{\rho^2 l_{21}\cos^2\alpha_{\text{пад}} - \rho(l_{11} - l_{22})\cos\alpha_{\text{пад}} - l_{12}}{\rho^2 l_{21}\cos^2\alpha_{\text{пад}} - \rho(l_{11} + l_{22})\cos\alpha_{\text{пад}} + l_{12}}, \quad T = \sqrt{1 - R^2}. \tag{18}$$

Здесь $R = H_{\text{отр}}/H_{\text{пр}}$, ρ – волновое сопротивление среды, окружающей многослойную пластину, l_{mn} – элементы матрицы преобразования (10). Выражение (18) сходно с аналогичным выражением, представленным в [15]. Однако его анализ для данного случая с учетом [10] дает интересный результат. Действительно, матрица (10) связывает тангенциальные компоненты полей на границах структуры (см. (5)). При этом E_{x1} и H_{y1} в (5) включают в себя компоненты падающих и отраженных волн, а E_{x2} и H_{y2} являются компонентами прошедших волн [15]. Подставляя (10) в (5), получим

$$\begin{vmatrix} E_{x2} \\ H_{y2} \end{vmatrix} = \left[\sum_{q=1}^{2^N} \vartheta_q \mathbf{M}_q\right] \begin{vmatrix} E_{x1} \\ H_{y1} \end{vmatrix} = \vartheta_1 \mathbf{M}_1 \begin{vmatrix} E_{x1} \\ H_{y1} \end{vmatrix} + \vartheta_2 \mathbf{M}_2 \begin{vmatrix} E_{x1} \\ H_{y1} \end{vmatrix} + \ldots + \vartheta_{2^N} \mathbf{M}_{2^N} \begin{vmatrix} E_{x1} \\ H_{y1} \end{vmatrix} =$$
$$= \vartheta_1 \begin{vmatrix} E^{(1)}_{x2} \\ H^{(1)}_{y2} \end{vmatrix} + \vartheta_2 \begin{vmatrix} E^{(2)}_{x2} \\ H^{(2)}_{y2} \end{vmatrix} + \ldots + \vartheta_{2^N} \begin{vmatrix} E^{(2^N)}_{x2} \\ H^{(2^N)}_{y2} \end{vmatrix} = \sum_{q=1}^{2^N} \vartheta_q \begin{vmatrix} E^{(q)}_{x2} \\ H^{(q)}_{y2} \end{vmatrix} = \sum_{q=1}^{2^N} \nu_q \left(\begin{vmatrix} E^{(q\cos)}_{x2} \\ H^{(q\cos)}_{y2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E^{(q\sin)}_{x2} \\ H^{(q\sin)}_{y2} \end{vmatrix}\right). \tag{19}$$

Учитывая, что $H_{y2} = H_{\text{пр}}$, $E_{x2} = E_{\text{пр}}\cos\alpha = \rho H_{\text{пр}}\cos\alpha$, $H_{y1} = H_{\text{пад}} + H_{\text{отр}}$, $E_{x1} = \rho(H_{\text{пад}} - H_{\text{отр}})\cos\alpha$, запишем

$$\begin{vmatrix} \rho H_{\text{пр}}\cos\alpha \\ H_{\text{пр}} \end{vmatrix} = \left[\sum_{q=1}^{2^N} \vartheta_q \mathbf{M}_q\right] \begin{vmatrix} \rho(H_{\text{пад}} - H_{\text{отр}})\cos\alpha \\ H_{\text{пад}} + H_{\text{отр}} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Поскольку $T = H_{\text{пр}}/H_{\text{пад}}$, $R = H_{\text{отр}}/H_{\text{пад}}$, определяемые (18), то получим

$$\begin{vmatrix} \rho T\cos\alpha \\ T \end{vmatrix} = \left[\sum_{q=1}^{2^N}\vartheta_q\mathbf{M}_q\right]\begin{vmatrix} \rho(1-R)\cos\alpha \\ 1+R \end{vmatrix}. \quad (21)$$

По аналогии с (21) введем коэффициенты прохождения парциальных волн T_q, как

$$\begin{vmatrix} \rho T_q\cos\alpha \\ T_q \end{vmatrix} = \vartheta_q\mathbf{M}_q\begin{vmatrix} \rho(1-R)\cos\alpha \\ 1+R \end{vmatrix} \quad (22)$$

или

$$\begin{vmatrix} \rho T_q\cos\alpha \\ T_q \end{vmatrix} = \mathbf{M}_q\begin{vmatrix} \rho(\nu_q-\nu_q R)\cos\alpha \\ \nu_q+\nu_q R \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Тогда ν_q является долей q-й волны в падающей, а $R_q = \nu_q R$ являются коэффициентами отражения парциальных волн. Таким образом, можно записать:

$$T = \sum_{q=1}^{2^N}\nu_q T_q; \quad R = \sum_{q=1}^{2^N}R_q. \quad (24)$$

Таким образом, результирующие коэффициенты прохождения и отражения равны сумме соответствующих коэффициентов парциальных волн. Следовательно, представленное в данной работе разложение результирующей волны имеет не только математический, но и физический смысл.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено поведение необыкновенной волны в слоистой одноосной анизотропной среде при произвольном направлении оси анизотропии. В аналитическом виде в элементарных функциях найдена матрица преобразования для однородного слоя и для многослойной структуры с произвольным числом слоев. Введено понятие парциальных волн в слоистой среде для рассматриваемого случая. Аналитически показано, что коэффициенты отражения и прохождения необыкновенной волны для плоскопараллельной пластины равны сумме коэффициентов отражения и прохождения парциальных волн.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнения Максвелла в прямоугольных координатах

$$\begin{gathered}
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega\mu H_x, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -j\omega\varepsilon_{xx}E_x - j\omega\varepsilon_{xz}E_z, \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\omega\mu H_y, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_{yy}H_y, \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = j\omega\mu H_z, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -j\omega\varepsilon_{xz}E_x - j\omega\varepsilon_{zz}E_z
\end{gathered} \quad (A1)$$

для случая распространения волны в плоскости xOz принимают вид

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega\mu H_x, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\omega\mu H_y, \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} = j\omega\mu H_z, \quad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = -j\omega\varepsilon_{xx}E_x - j\omega\varepsilon_{xz}E_z, \\
\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_{yy}H_y, \\
\frac{\partial H_y}{\partial x} = -j\omega\varepsilon_{xz}E_x - j\omega\varepsilon_{zz}E_z.
\end{gathered} \quad (A2)$$

Из четвертого и шестого уравнений (А2) получим

$$\begin{gathered}
E_x = -j\frac{\varepsilon_{xz}}{\omega\left(\varepsilon_{zz}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2\right)}\frac{\partial H_y}{\partial x} - j\frac{\varepsilon_{zz}}{\omega\left(\varepsilon_{zz}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2\right)}\frac{\partial H_y}{\partial z}, \\
E_z = j\frac{\varepsilon_{xx}}{\omega\left(\varepsilon_{zz}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2\right)}\frac{\partial H_y}{\partial x} + j\frac{\varepsilon_{xz}}{\omega\left(\varepsilon_{zz}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2\right)}\frac{\partial H_y}{\partial z}.
\end{gathered} \quad (A3)$$

Подставляя (А3) во второе уравнение (А2), запишем волновое уравнение

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{zz}\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \varepsilon_{xx}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + 2\varepsilon_{xx}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} - \\ &- \omega^2\mu\left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2\right) H_y = 0. \end{aligned} \tag{А4}$$

С учетом условия непрерывности тангенциальной компоненты волнового вектора k_x на границах раздела для гармонической волны в бесконечной среде запишем дисперсионное уравнение

$$k_z^2 + \frac{2\varepsilon_{xx}k_x}{\varepsilon_{zz}}k_z + \frac{\varepsilon_{xx}k_x^2 + \omega^2\mu\left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2\right)}{\varepsilon_{zz}} = 0. \tag{А5}$$

Решение (А5) дает нормальные компоненты волнового вектора (3) необыкновенной волны.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Произведение матриц преобразования (9) двух однородных слоев дает следующие выражения элементов результирующей матрицы:

$$\begin{aligned}
L_{11}^{(2)} = &-\chi_1^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)} - \chi_1^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)} + k_1^{(2)}z^{(2)}\right)\right] + \\
&+ \chi_1^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)} - \chi_2^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)} + k_2^{(2)}z^{(2)}\right)\right] + \\
&+ \chi_2^{(1)}\frac{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_1^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_2^{(1)}z^{(1)} + k_1^{(2)}z^{(2)}\right)\right] - \\
&- \chi_2^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)} - \chi_2^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_2^{(1)}z^{(1)} + k_2^{(2)}z^{(2)}\right)\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{12}^{(2)} = &\chi_1^{(1)}\chi_2^{(2)}\frac{\left(\chi_2^{(1)} - \chi_1^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)} + k_1^{(2)}z^{(2)}\right)\right] - \\
&- \chi_1^{(1)}\chi_1^{(2)}\frac{\left(\chi_2^{(1)} - \chi_2^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)} + k_2^{(2)}z^{(2)}\right)\right] - \\
&- \chi_2^{(1)}\chi_2^{(2)}\frac{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_1^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_2^{(1)}z^{(1)} + k_1^{(2)}z^{(2)}\right)\right] + \\
&+ \chi_2^{(1)}\chi_1^{(2)}\frac{\left(\chi_2^{(1)} - \chi_2^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_2^{(1)}z^{(1)} + k_2^{(2)}z^{(2)}\right)\right]; \\
L_{21}^{(2)} = &-\frac{\left(\chi_2^{(1)} - \chi_1^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)} + k_1^{(2)}z^{(2)}\right)\right] + \\
&+ \frac{\left(\chi_2^{(1)} - \chi_2^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)} + k_2^{(2)}z^{(2)}\right)\right] + \\
&+ \frac{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_1^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_2^{(1)}z^{(1)} + k_1^{(2)}z^{(2)}\right)\right] - \\
&- \frac{\left(\chi_2^{(1)} - \chi_2^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)} - \chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)} - \chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_2^{(1)}z^{(1)} + k_2^{(2)}z^{(2)}\right)\right];
\end{aligned} \tag{Б1}$$

$$L_{22}^{(2)}=\chi_2^{(2)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}\right)\right]-$$
$$-\chi_1^{(2)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_2^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_2^{(2)}z^{(2)}\right)\right]-$$
$$-\chi_2^{(2)}\frac{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_2^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}\right)\right]+$$
$$+\chi_1^{(2)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_2^{(2)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)}\exp\left[j\left(k_2^{(1)}z^{(1)}+k_2^{(2)}z^{(2)}\right)\right].$$

Здесь верхний индекс означает номер слоя, $L_{mn}^{(2)}$ – элементы матрицы преобразования двухслойной структуры, $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$ – z-компоненты волновых чисел прямой и обратной волны в первом слое (см. (3)), $k_1^{(2)}$, $k_2^{(2)}$ – z-компоненты волновых чисел прямой и обратной волны во втором слое (см. (3)), величины $\chi_1^{(i)}$, $\chi_2^{(i)}$ – для i-го определяются выражениями (7).

Произведение матриц преобразования (6) трех однородных слоев после преобразований дает выражение для элемента $L_{11}^{(3)}$ матрицы преобразования

$$L_{11}^{(3)}=\chi_1^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)\left(\chi_2^{(2)}-\chi_1^{(3)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)\left(\chi_1^{(3)}-\chi_2^{(3)}\right)}\times$$
$$\times\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}+k_1^{(3)}z^{(3)}\right)\right]-$$
$$-\chi_1^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)\left(\chi_2^{(2)}-\chi_1^{(3)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)\left(\chi_1^{(3)}-\chi_2^{(3)}\right)}\times$$
$$\times\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}+k_1^{(3)}z^{(3)}\right)\right]-$$
$$-\chi_1^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)\left(\chi_2^{(2)}-\chi_1^{(3)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)\left(\chi_1^{(3)}-\chi_2^{(3)}\right)}\times$$
$$\times\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}+k_1^{(3)}z^{(3)}\right)\right]+$$
$$+\chi_1^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)\left(\chi_2^{(2)}-\chi_1^{(3)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)\left(\chi_1^{(3)}-\chi_2^{(3)}\right)}\times$$
$$\times\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}+k_1^{(3)}z^{(3)}\right)\right]-$$
$$-\chi_2^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)\left(\chi_2^{(2)}-\chi_1^{(3)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)\left(\chi_1^{(3)}-\chi_2^{(3)}\right)}\times \tag{Б2}$$
$$\times\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}+k_1^{(3)}z^{(3)}\right)\right]+$$
$$+\chi_2^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)\left(\chi_2^{(2)}-\chi_1^{(3)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)\left(\chi_1^{(3)}-\chi_2^{(3)}\right)}\times$$
$$\times\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}+k_1^{(3)}z^{(3)}\right)\right]+$$
$$+\chi_2^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)\left(\chi_2^{(2)}-\chi_1^{(3)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)\left(\chi_1^{(3)}-\chi_2^{(3)}\right)}\times$$
$$\times\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}+k_1^{(3)}z^{(3)}\right)\right]-$$
$$-\chi_2^{(1)}\frac{\left(\chi_2^{(1)}-\chi_1^{(2)}\right)\left(\chi_2^{(2)}-\chi_1^{(3)}\right)}{\left(\chi_1^{(1)}-\chi_2^{(1)}\right)\left(\chi_1^{(2)}-\chi_2^{(2)}\right)\left(\chi_1^{(3)}-\chi_2^{(3)}\right)}\times$$
$$\times\exp\left[j\left(k_1^{(1)}z^{(1)}+k_1^{(2)}z^{(2)}+k_1^{(3)}z^{(3)}\right)\right].$$

Аналогичные выражения получаются для остальных элементов матрицы преобразования. При этом выражение (Б2) может быть записано в следующей компактной форме:

$$L_{11}^{(3)}=(-1)^{\sum_{i=1}^{3}F_{q,i}+2}\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)}\frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}-\chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}\right)}{\prod_{i=1}^{3}\left(\chi_1^{(i)}-\chi_2^{(i)}\right)}\times\exp\left(\sum_{i=1}^{3}jk_{1+F_{q,i}}^{(i)}z_i\right) \tag{Б3}$$

или, учитывая $N=3$, получим

$$L_{11}^{(3)}=(-1)^{\sum_{i=1}^{N}F_{q,i}+N-1}\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)}\frac{\prod_{i=1}^{N-1}\left(\chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}-\chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(\chi_1^{(i)}-\chi_2^{(i)}\right)}\times\exp\left(\sum_{i=1}^{N}jk_{1+F_{q,i}}^{(i)}z_i\right), \tag{Б4}$$

где $F_{q,1}$ – функция, определяемая выражением (13). Продолжая перемножения матриц, можно записать аналогичные выражения для четырех, пяти и т.д. слоев. Далее, с использованием метода математической индукции было проверено, что такие же выражения получаются для произвольного N числа слоев. Полные преобразования не представлены здесь ввиду их громоздкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Otón E., Morawiak P., Mazur R. et al.* // J. Lightwave Technol. 2019. V. 37. № 9. P. 2086.
2. *Аверин С.В., Кузнецов П.И., Житов В.А. и др.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 10. С. 1038.
3. *Barabanova E., Vytovtov K., Trong Thanh Nguyen* // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1368/2 https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1368/2/022002
4. *Wey J.Sh., Zhang J.* // J. Lightwave Technol. 2019. V. 37. № 12. P. 2830.
5. *Parygin D.S., Finogeev A.G., Kamaev V.A. et al.* // J. Phys.: Conf. Ser. : Proc. Intern. Conf. on Inform. Technol. in Business and Industry 2016, Tomsk, Russia, 21–23 September 2016. IOP Publishing, 2017. V. 803 / 012112. P. 1–6. http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/803/1/ 012112/pdf.
6. *Velázquez-Benítez A.M., Reyes-Medrano M., Vélez-Cordero J.R., Hernández-Cordero J.* // J. Lightwave Technol. 2015. V. 33. № 1. P. 176.
7. *Scolari L., Alkeskjold Th.T., Riishede J. et al.* // Opt. Express. 2005. V. 13. № 19. P. 7483.
8. *Микаэлян А.Л.* Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М.;Л.: Госэнергоиздат, 1963.
9. *Лакс Б., Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики / Пер. с англ. М.: Мир, 1965.
10. *Lee J.K., Kong J.A.* // J. Opt. Soc. Amer. A. 1985. V. 2. № 12. P. 2171.
11. *Veniaminova Y., Stashkevich A.A., Roussigné Y. et al.* // Opt. Mater. Express. 2012. V. 2. № 9. P. 1260.
12. *Yeon H. Lee, Chong-Hoon Kwak, El-Hang Lee* // J. Opt. Soc. Amer. B. 1996. V. 13. № 12. P. 2762.
13. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001.
14. *Vytovtov K.* // J. Opt. Soc. Amer. A. 2005. V. 22. № 4. P. 689.
15. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. 1973. М.: Наука, 1973.
16. *Вытовтов К.А.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 2. С. 159.
17. *Vytovtov K., Barabanova E., Vishnevskiy V.* // Proc. Communications in Computer and Information Science. 2019. V. 1141. P. 199