

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.1

ОКОННЫЕ ФУНКЦИИ С КВАЗИПРЯМОУГОЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

© 2020 г. З. Д. Лернер*

Редакция журнала “Радиотехника и электроника”,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: lerner269@gmail.com

Поступила в редакцию 19.08.2019 г.

После доработки 19.02.2020 г.

Принята к публикации 23.03.2020 г.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) осуществляется на ограниченном интервале времени, что равноценно умножению анализируемого сигнала на прямоугольное окно, спектр которого имеет наибольшие (среди прочих окон) боковые лепестки. В результате возникает эффект, называемый растеканием спектра сигнала. Умножение сигнала на сглаживающее окно уменьшает размывание спектральных компонент. Известно несколько десятков разновидностей оконных функций, поскольку ДПФ используется в разнообразных задачах. Особое место среди окон занимает уникальное окно с “плоской вершиной”, используемое в широкополосных приложениях. Предлагается новое регулируемое окно с квазипрямоугольным спектром, а также способ, позволяющий уменьшить уровень боковых лепестков спектра.

DOI: 10.31857/S0033849420080070

ВВЕДЕНИЕ

Для синтеза окон будем рассматривать, как это принято [1], четные действительные функции $g(t)$. Их спектры $G(\omega)$ также являются четными действительными функциями частоты.

Согласно ГОСТ 24375-80 коэффициент прямоугольности $K_{\Pi} = (\Delta f)_1 / (\Delta f)_2$ амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) – это отношение ширины полосы пропускания фильтра по уровню $a_1 = 1/\sqrt{2}$ к ширине полосы пропускания по уровню $a_2 = 0.1$. У физически нереализуемого идеального фильтра с прямоугольной АЧХ $K_{\Pi} = 1$. Распространим понятие коэффициента прямоугольности на спектры оконных функций. Рассмотрим в качестве примера гауссов импульс

$$g_r(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2), \quad -\infty < t < \infty, \quad (1)$$

спектр которого равен

$$\begin{aligned} G_r(\omega) &= G_r(j\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_r(t) \exp(-j\omega t) dt = \exp(-\omega^2/4). \end{aligned} \quad (2)$$

Решая алгебраические уравнения

$$G_r(\omega_1) = a_1 = 1/\sqrt{2} \quad \text{и} \quad G_r(\omega_2) = a_2 = 0.1,$$

получим

$$K_{\Pi} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.3880.$$

Как видим, коэффициент прямоугольности далек от единицы (как и форма спектра импульса – от прямоугольной).

У окна с плоской вершиной ([1], 2.4.3) спектр равен

$$\begin{aligned} F(f) &= \text{sinc}(\pi f) + \\ &+ 0.5 \sum_{k=1}^4 d_k [\sin c(\pi(f+k)) + \sin c(\pi(f-k))], \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi}; \quad d_1 = 1.932; \quad d_2 = 1.29; \\ d_3 &= 0.388; \quad d_4 = 0.03. \end{aligned} \quad (4)$$

Форма спектра окна ближе к прямоугольной, однако коэффициент прямоугольности равен всего лишь $K_{\Pi} = 0.56$.

Синтезируем регулируемое окно с более высокими значениями K_{Π} .

Все вычисления в данной работе производились с помощью систем Matlab 6.5 и Wolfram Alpha.

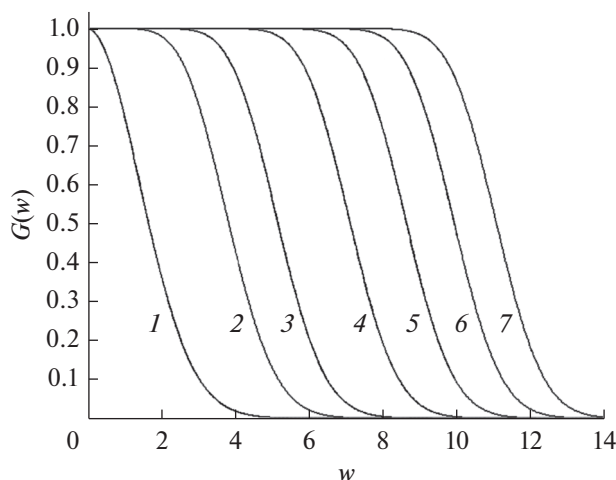


Рис. 1. Графики спектра (5) при $N = 0$ (1), 3 (2), 6 (3), 12 (4), 18 (5), 24 (6) и 30 (7) для положительных частот.

1. ПРЕДПОСЫЛКИ ДЛЯ СИНТЕЗА ОКНА ГАУССА–ТЕЙЛОРА

Новое окно, назовем его окном Гаусса–Тейлора (GT) N -го порядка, зададим спектром

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^N \frac{\left(\frac{\omega^2}{4}\right)^k}{k!} \exp(-\omega^2/4) = \text{taylor}[\exp(\omega^2/4), 2N+1] \exp(-\omega^2/4). \quad (5)$$

Здесь $\text{taylor}[\exp(\omega^2/4), 2N+1]$ – многочлен степени $2N$, полученный усечением ряда Тейлора (Маклорена) для экспоненты $\exp(\omega^2/4)$. Это значит, что, $\text{taylor}(\dots, 2N+1)$ представляет собой оператор, воздействуя которым на функцию, получаем первые члены ряда Тейлора (если он существует) до степени $2N$ включительно.

На рис. 1 представлены графики спектра (5) при различных $N = 0, 3, 6, 12, 18, 24$ и 30 для положительных частот. Следует заметить, что в случае $N = 0$ окно Гаусса–Тейлора вырождается в известное окно Гаусса.

С ростом параметра N увеличиваются ширина спектра и коэффициент прямоугольности:

$$\begin{aligned} N = 3, \quad K_{\Pi} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.6394; \\ N = 6, \quad K_{\Pi} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.7137; \\ N = 12, \quad K_{\Pi} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.7804. \end{aligned} \quad (6)$$

Как видим, коэффициенты прямоугольности спектра (5) в этих случаях заметно выше, чем у известных окон.

Спектру (5) соответствует оригинал

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega t) \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\left(\frac{\omega^2}{4}\right)^k}{k!} \exp(-\omega^2/4 + j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k D_{2k}(t\sqrt{2})}{2^k k!} = \\ &= \frac{\exp(-t^2)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k H_{2k}(t)}{2^k k!} = \\ &= (-1)^N \frac{2^{-2N-1} \exp(-t^2) H_{2N+1}(t)}{\sqrt{\pi} N!}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) L_N^{(1/2)}(t^2), \quad -\infty < t < \infty. \quad (8)$$

Интеграл вычислен по таблицам [2, формула 3.462(3)]. В выражениях (7), (8) $D_n(z)$ – функция параболического цилиндра, $H_n(z)$ – полином Эрмита [2, ф-ла (9.253)], $L_N^{(1/2)}(z)$ – обобщенный полином Лагерра. Об идентичности правых частей равенств (7) и (8) см. в монографии [3, с. 693].

2. ОКНО ГАУССА–ТЕЙЛОРА

Исследуем свойства четной действительной функции (8). Благодаря экспоненциальному сомножителю функция довольно быстро затухает при

$|t| \rightarrow \infty$. Благодаря сомножителю $L_N^{(1/2)}(t^2)$ функция имеет N симметричных пар действительных корней (см. далее Приложение 1). Логично предположить, что функция (8) имеет главный лепесток и по $N-1$ затухающих боковых лепестков слева и справа от него, при этом главный лепесток располагается между парой наименьших по абсолютной величине корней. Эксперименты подтверждают это предположение. Например, на рис. 2, где представлен график логарифма модуля нормированной функции (8) при $N = 9$, мы видим восемь пар боковых лепестков. Последняя пара имеет уровень порядка 10^{-6} .

Чтобы на основе выражения (8) синтезировать оконную функцию, необходимо прежде всего выбрать конечную область определения функции

$$-r \leq t \leq r. \quad (9)$$

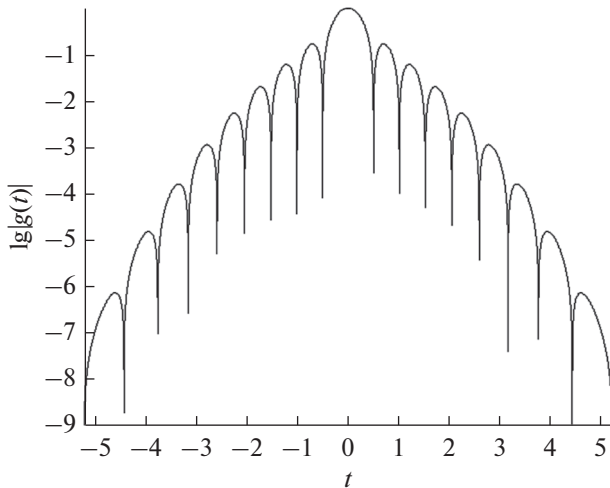


Рис. 2. График логарифма модуля нормированной функции (8) $\lg |g(t)/g(0)|$ при $N = 9$.

С одной стороны, чем больше r , тем меньше уровень боковых лепестков спектра. В предельном случае ($r \rightarrow \infty$) боковые лепестки спектра вообще отсутствуют, так как спектр (5) монотонно уменьшается при $\omega \rightarrow \infty$. В этом можно убедиться, перейдя на графике рис. 1 к логарифмической шкале по оси ординат.

С другой стороны, чем больше r , тем меньше относительная длина главного лепестка оригинала $g(t)$ и тем больше относительная суммарная длина малых по абсолютной величине боковых лепестков, и тем больше теряется информации об анализируемом сигнале при умножении сигнала на оконную функцию.

Кроме того, при выборе интервала (9) учтем, что боковые лепестки спектра тем больше, чем больше разрывы оконной функции и ее производных в точках $t = -r$ и $t = r$. Поэтому имеет смысл выбрать в качестве границ интервала (9) одну из симметричных пар корней полинома.

Для подтверждения всех перечисленных выше соображений, рассмотрим четыре графика спектра функции (8) при $N = 5$ (рис. 3), построенные для случаев $r = r_2$, $r = r_3$, $r = r_4$ и $r = r_5$, где $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$ – положительные корни полинома $L_5^{(1/2)}(t^2)$. С увеличением длины окна $2r$ уровень боковых лепестков спектра уменьшается.

Оконную функцию Гаусса–Тейлора $u(x)$ получим из оригинала (8), введя относительное время

$$x = t/(2r) \quad (10)$$

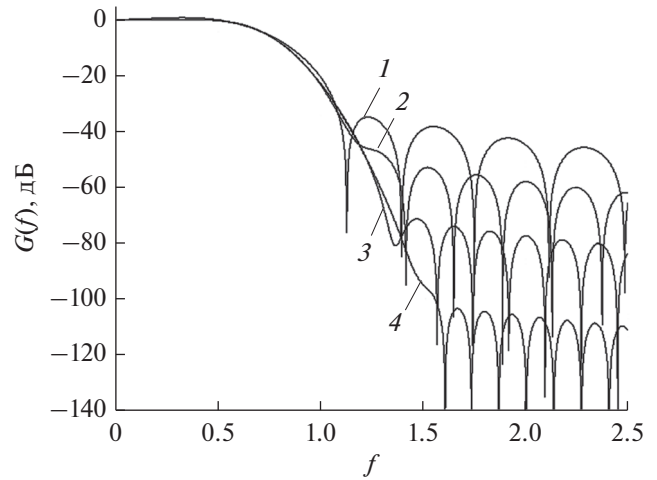


Рис. 3. Графики спектра функции (8) при $N = 5$, построенные для случаев $r = r_2$ (кривая 1), $r = r_3$ (кривая 2), $r = r_4$ (кривая 3), $r = r_5$ (кривая 4).

и выполнив нормировку [1]:

$$u(x) = \exp(-4r^2x^2) L_N^{(1/2)}(4r^2x^2) / L_N^{(1/2)}(0), \quad (11)$$

$$|x| \leq 0.5; \quad u(x) = 0, \quad |x| > 0.5.$$

На рис. 4 представлены графики оконной функции Гаусса–Тейлора $u(x)$ для случаев $N = 3$, $r = 2.6519$; $N = 6$, $r = 2.51974$ и $N = 12$, $r = 2.70532$.

Следует отметить, что при переходе от времени t к относительному времени x происходит изменение масштаба. Чтобы оконные функции (или их спектры) для разных значений N можно было сравнивать друг с другом, необходимо, чтобы масштабы времени (или частоты) у них были

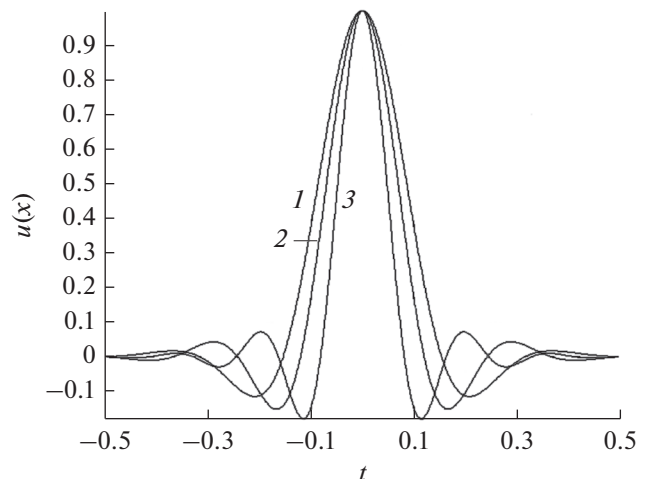


Рис. 4. Оконные функции GT при $N = 3$ (1), 6 (2) и 12 (3).

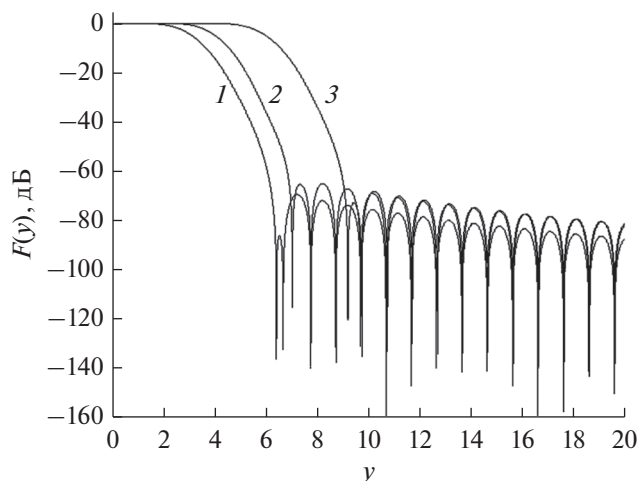


Рис. 5. Спектры оконных функций GT при $N = 3$ (1), 6 (2) и 12 (3).

одинаковы (или хотя бы близки, как для графиков на рис. 4).

Нормированные спектры $F(y)$ [1] окна Гаусса–Тейлора, заданного выражением (11), определим с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ):

$$F(y) = \text{fft}(u). \quad (12)$$

Графики спектров окна GT для случаев $N = 3$, $r = 2.6519$; $N = 6$, $r = 2.51974$ и $N = 12$, $r = 2.70532$ представлены на рис. 5. При одинаковых (или близких) значениях параметра r увеличение параметра N приводит к сужению графиков оконных функций и к расширению графиков нормированных спектров.

3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ ОКНО ГАУССА–ТЕЙЛОРА

Как видно из графиков рис. 5, уровень боковых лепестков спектра окна GT велик по сравнению с таковыми для известного окна с “плоской вершиной” (“Flat top window”, FT) [1].

Синтезируем модифицированное окно Гаусса–Тейлора (GTM) с меньшим уровнем боковых лепестков спектра. Для этого необходимо устранить (или хотя бы уменьшить) разрывы оконной функции и ее производных на границах интервала $-0.5 \leq x \leq 0.5$.

Начнем с того, что определим корни окна (11). Нетрудно видеть, что они совпадают с корнями

полинома $L_N^{(1)}(4r^2x^2)$, а те, в свою очередь, как следует из равенства (10), равны корням полинома $L_N^{(1)}(t^2)$, поделенным на $2r$: $\pm r_1/2r$, $\pm r_2/2r$, ...

Например, полиному $L_6^{(1)}(4r^2x^2)$ (см. Приложение 1) при $r = 2.51974$ соответствуют корни: ± 0.120239 , ± 0.242171 , ± 0.367826 , ± 0.5 , ± 0.644424 , ± 0.814081 . Из шести положительных корней полинома $L_6^{(1)}(4r^2x^2)$ нас интересуют два: корень $R_2 = 0.5$ и предшествующий ему корень, например, $R_1 = 0.367826$.

Заменим относительное время x нелинейным (замедляющимся относительно времени x) временем

$$v = x \exp(-ax^2 - bx^4), \quad (13)$$

производная которого равна

$$v' = \frac{dv}{dx} = (1 - 2ax^2 - 4bx^4) \exp(-ax^2 - bx^4). \quad (14)$$

Здесь a и b – константы, которые удовлетворяют уравнениям

$$v(R_2) = v(0.5) = 0.5 \exp(-a/4 - b/16) = R_1, \quad (15)$$

$$v'(R_2) = (1 - 2a/4 - 4b/16) \times \exp(-a/4 - b/16) = 0. \quad (16)$$

Из системы уравнений (15)–(16) следует:

$$a = -2 - 8 \ln(2R_1), \quad (17)$$

$$b = 8 + 16 \ln(2R_1). \quad (18)$$

Уравнение (15) означает, что при подстановке v

вместо x в полином $L_N^{(1)}(4r^2x^2)$ получим функцию

$L_N^{(1)}(4r^2v^2)$, равную нулю, в граничных точках интервала $-0.5 \leq x \leq 0.5$. Уравнение (16) означает, что на границах интервала первая производная полинома также равна нулю:

$$\begin{aligned} \left(L_N^{(1)}(4r^2v^2) \right)' &= \frac{d}{dx} L_N^{(1)}(4r^2v^2) = \\ &= \frac{d}{dv} L_N^{(1)}(4r^2v^2) \frac{dv}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Эксперименты показали, что подстановка нелинейного времени v вместо x в обобщенный полином Лагерра уменьшает боковые лепестки спектра, но этого не происходит при подстановке времени v вместо x в экспоненту. Поэтому следует либо записывать экспоненту в виде $\exp(-4r^2x^2)$, либо попытаться подобрать другое время τ , с которым боковые лепестки спектра меньше, чем при времени x . Экспериментально удалось подобрать для неко-

Таблица 1. Коэффициенты окна GTM и время τ при различных значениях N

N	r	a	b	τ
3	2.65195	0.84147	0.3170639	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$
4	2.26658	0.736	0.52805	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$
5	2.78329	0.2703885	1.459223	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$
6	2.51975	0.229167	1.541665	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$
7	2.32575	0.206886	1.586228	$x(1 - 0.41377x^2 + 4x^4)$
9	2.04925	0.1840505	1.6318985	$x(1 - 0.368x^2 + 4.5x^4)$
12	2.7053	0.678897	0.6422055	$x(1 + 2x^4 + 1.5x^6)$

Таблица 2. Параметры окна GTM при различных значениях N и окна FT

Оконные функции	N	K_{Π}	$W_{\max}$, дБ	ΔW , дБ на октаву	CG	$\Delta F_{\text{ш}}$	SL, дБ	MPL, дБ
GTM	3	0.639	−143	−12	0.153	5.59	0.0158	7.49
	4	0.671	−119	−12	0.160	5.44	0.0446	7.40
	5	0.695	−130	−12	0.118	7.53	−0.00857	8.76
	6	0.713	−117	−12	0.120	7.47	−0.0180	8.73
	7	0.729	−115	−12	0.121	7.46	−0.0294	8.70
	9	0.754	−111	−12	0.122	7.50	−0.0549	8.70
	12	0.780	−143	−12	0.081	11.35	−0.00742	10.54
FT	—	0.56	−82.6	−6	0.22	3.77	0.01	5.78

Примечание: K_{Π} — коэффициент прямоугольности; $W_{\max}$ — максимальный уровень боковых лепестков относительно главного лепестка; ΔW — скорость спада боковых лепестков, CG — когерентное усиление; $\Delta F_{\text{ш}}$ — эквивалентная шумовая полоса; SL — паразитная амплитудная модуляция; MPL — максимальные потери преобразования.

торых значений параметра N (а именно для $N = 3, 4, 5, 6$ и 12) нелинейное время

$$\tau = x(1 + 2x^4 + 1.5x^6), \quad (20)$$

которое приводит к положительному эффекту при подстановке в экспоненту вместо x . Для $N = 7$ и 9 подобраны другие выражения для τ , уменьшающие боковые лепестки спектра.

С учетом сказанного выше из выражений (11) и (13) получаем модифицированное окно Гаусса–Тейлора:

$$u(x) = \exp(-4r^2\tau^2) \times \\ \times L_N^{(1)} \left[4r^2x^2 \exp(-2ax^2 - 2bx^4) \right] / L_N^{(1)}(0), \quad (21) \\ |x| \leq 0.5; \quad u(x) = 0, \quad |x| \geq 0.5,$$

при этом a и b определяются равенствами (17) и (18).

На основании теоретических результатов были выполнены расчеты и построены графики для конкретных случаев окна Гаусса–Тейлора и модифицированного окна Гаусса–Тейлора и их спектров, которые могут быть использованы на практике.

Коэффициенты r , a , b и экспериментально подобранная формула для нелинейного времени τ представлены в табл. 1.

В табл. 2 сравниваются параметры предложенного в статье окна GTM с параметрами известного окна FT [1].

Часть экспериментального материала представлена на рис. 6, 7. Это окна GTM и GT для случаев $N = 3$ (рис. 6а), 5 (рис. 6б), 7 (рис. 6в) и 12 (рис. 6г) и их спектры (рис. 7а, 7б, 7в и 7г соответственно).

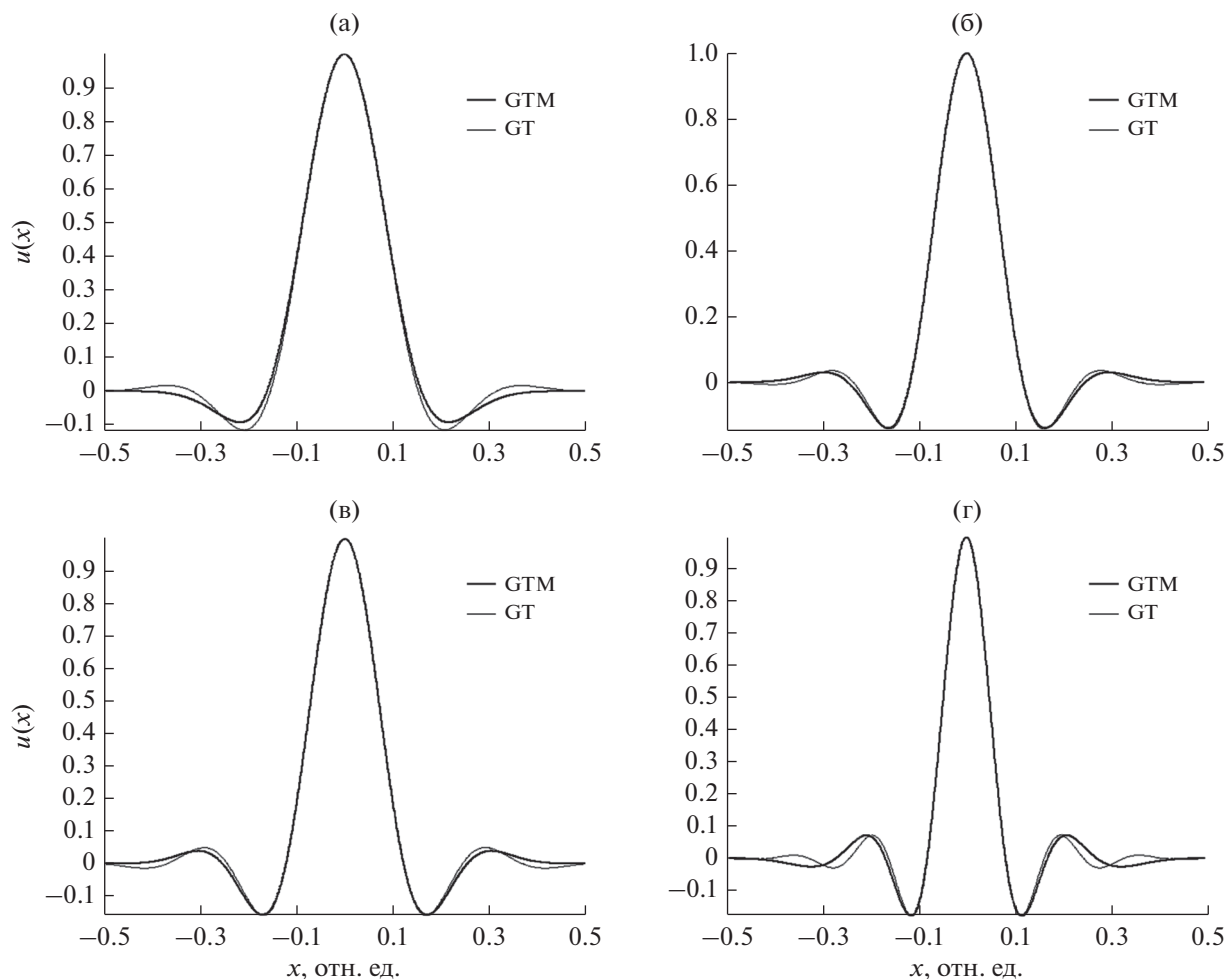


Рис. 6. Сравнение окон GTM и GT для $N = 3$ (а), 5 (б), 7 (в) и 12 (г).

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из равенств (6) следует, что окно Гаусса–Тейлора при $N \geq 3$ превосходит известное окно с плоской вершиной FT по коэффициенту прямоугольности K_{Π} . Из рис. 7а–7г видно, что участки спектров от $F(y) = 0$ до $F(y) = -20$ дБ модифицированного окна Гаусса–Тейлора и окна Гаусса–Тейлора при одинаковых значениях параметра N практически совпадают. Таким образом, значения коэффициента K_{Π} при заданном значении параметра N у этих окон одинаковы.

Отличительной особенностью окон GT и GTM является наличие боковых лепестков не только у спектров, но и у собственных окон. В разд. 2 отмечалось, что график функции (8) имеет $N - 1$ пар боковых лепестков. Однако количество пар боковых лепестков на рис. 6а–6г меньше. Это обусловлено, во-первых, ограничением окон GT и GTM по времени интервалом (9) и, во-вторых,

использованием нелинейного времени для окна GTM.

Достоинства окна GTM (табл. 2): высокий коэффициент прямоугольности и малый уровень боковых лепестков спектра. Недостатки, обусловленные широкополосностью окна, – большая эквивалентная шумовая полоса, малое когерентное усиление и большие потери преобразования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено модифицированное окно Гаусса–Тейлора, которое превосходит известное окно с плоской вершиной и по коэффициенту прямоугольности, и по уровню боковых лепестков спектра. Предложен способ, позволяющий уменьшить уровень боковых лепестков спектра. Материал статьи может быть использован в таких радиотехнических дисциплинах, как синтез сигналов и синтез фильтров.

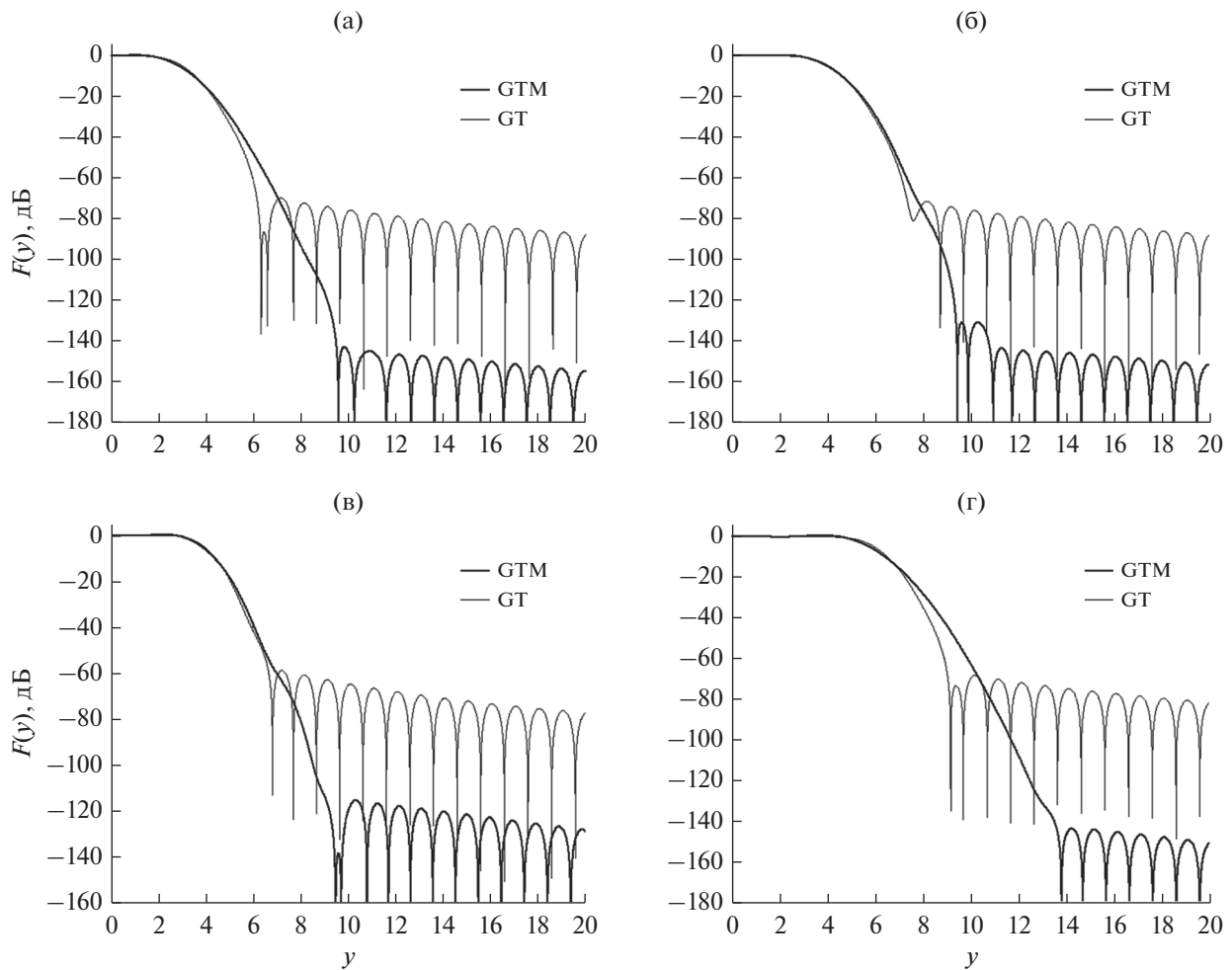


Рис. 7. Сравнение спектров окон GTM и GT для $N=3$ (а), 5 (б), 7 (в) и 12 (г).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1¹

Корни обобщенного полинома Лаггера $L_N^{(\frac{1}{2})}(t^2)$

$$\text{laguerreL}(3,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(3,0.5,0) = -0.0761905t^6 + 0.8t^4 - 2t^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \pm 0.816288, \quad r_{3,4} = \pm 1.67355, \quad r_{5,6} = \pm 2.65196$$

$$\text{laguerreL}(4,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(4,0.5,0) = 1/945(16t^8 - 288t^6 + 1512t^4 - 2520t^2 + 945)$$

$$r_{1,2} = \pm 0.723551, \quad r_{3,4} = \pm 1.46855, \quad r_{5,6} = \pm 2.26658, \quad r_{7,8} = \pm 3.19099$$

$$\text{laguerreL}(5,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(5,0.5,0) = -0.0030784t^{10} + 0.0846561t^8 - 0.761905t^6 + 2.66667t^4 - 3.33333t^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \pm 0.65681, \quad r_{3,4} = \pm 1.32656, \quad r_{5,6} = \pm 2.02595, \quad r_{7,8} = \pm 2.78329, \quad r_{9,10} = \pm 3.66847$$

$$\text{laguerreL}(6,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(6,0.5,0) = 0.0004736t^{12} - 0.0184704t^{10} + 0.253968t^8 - 1.52381t^6 + 4t^4 - 4t^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \pm 0.605764, \quad r_{3,4} = \pm 1.22006, \quad r_{5,6} = \pm 1.85311, \quad r_{7,8} = \pm 2.51974,$$

$$r_{9,10} = \pm 3.24661, \quad r_{11,12} = \pm 4.10134$$

$$\text{laguerreL}(7,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(7,0.5,0) = -0.0000631467t^{14} + 0.0033152t^{12} - 0.0646465t^{10} + 0.592593t^8 - 2.66667t^6 + 5.6t^4 - 4.66667t^2 + 1$$

¹ Далее везде сохранен формат машинной распечатки программ.

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= \pm 0.56507, \quad r_{3,4} = \pm 1.13612, \quad r_{5,6} = \pm 1.71999, \quad r_{7,8} = \pm 2.32573, \\
r_{9,10} &= \pm 2.96717, \quad r_{11,12} = \pm 3.66995, \quad r_{13,14} = \pm 4.49999 \\
\text{laguerreL}(8,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(8,0.5,0) &= 1/135 (0.00100292 t^{16} - 0.0681985 t^{14} + \\
&1.79021 t^{12} - 23.2727 t^{10} + 160. t^8 - 576. t^6 + 1008. t^4 - 720. t^2 + 135) \\
r_{1,2} &= \pm 0.531633, \quad r_{3,4} = \pm 1.06765, \quad r_{5,6} = \pm 1.61292, \quad r_{7,8} = \pm 2.1735, \\
r_{9,10} &= \pm 2.75776, \quad r_{11,12} = \pm 3.37893, \quad r_{13,14} = \pm 4.06195, \quad r_{15,16} = \pm 4.87135 \\
\text{laguerreL}(9,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(9,0.5,0) &= -7.82003 \times 10^{-7} t^{18} + 0.0000668612 t^{16} - \\
&0.00227328 t^{14} + 0.0397824 t^{12} - 0.387879 t^{10} + 2.13333 t^8 - 6.4 t^6 + 9.6 t^4 - \\
&6. t^2 + 1 \\
r_{1,2} &= \pm 0.50352, \quad r_{3,4} = \pm 1.01037, \quad r_{5,6} = \pm 1.52417, \quad r_{7,8} = \pm 2.04923, \\
r_{9,10} &= \pm 2.59113, \quad r_{11,12} = \pm 3.15785, \quad r_{13,14} = \pm 3.76219, \quad r_{15,16} = \pm 4.42853, \\
r_{17,18} &= \pm 5.22027 \\
\text{laguerreL}(10,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(10,0.5,0) &= (0.000258061 t^{20} - 0.0270964 t^{18} + \\
&1.15837 t^{16} - 26.2564 t^{14} + 344.615 t^{12} - 2688. t^{10} + 12320. t^8 - 31680. t^6 + \\
&41580. t^4 - 23100. t^2 + 3465)/3465 \\
r_{1,2} &= \pm 0.479451, \quad r_{3,4} = \pm 0.9615, \quad r_{5,6} = \pm 1.44893, \quad r_{7,8} = \pm 1.94496, \\
r_{9,10} &= \pm 2.45355, \quad r_{11,12} = \pm 2.97999, \quad r_{13,14} = \pm 3.53197, \quad r_{15,16} = \pm 4.122, \\
r_{17,18} &= \pm 4.77399, \quad r_{19,20} = \pm 5.55035 \\
\text{laguerreL}(11,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(11,0.5,0) &= -6.47621 \times 10^{-9} t^{22} + 8.19241 \times 10^{-7} \\
&t^{20} - 0.0000430102 t^{18} + 0.00122579 t^{16} - 0.0208384 t^{14} + 0.218803 t^{12} - \\
&1.42222 t^{10} + 5.5873 t^8 - 12.5714 t^6 + 14.6667 t^4 - 7.33333 t^2 + 1 \\
r_{1,2} &= \pm 0.458538, \quad r_{3,4} = \pm 0.919151, \quad r_{5,6} = \pm 1.38404, \quad r_{7,8} = \pm 1.85568, \\
r_{9,10} &= \pm 2.33702, \quad r_{11,12} = \pm 2.8318, \quad r_{13,14} = \pm 3.34513, \quad r_{15,16} = \pm 3.88447, \\
r_{17,18} &= \pm 4.46209, \quad r_{19,20} = \pm 5.10153, \quad r_{21,22} = \pm 5.86431 \\
\text{laguerreL}(12,0.5,t^2)/\text{laguerreL}(12,0.5,0) &= (2.12161 \times 10^{-6} t^{24} - 0.000318241 t^{22} \\
&+ 0.0201288 t^{20} - 0.704506 t^{18} + 15.0588 t^{16} - 204.8 t^{14} + 1792. t^{12} - 9984. \\
&t^{10} + 34320. t^8 - 68640. t^6 + 72072. t^4 - 32760. t^2 + 4095)/4095 \\
r_{1,2} &= \pm 0.440147, \quad r_{3,4} = \pm 0.881983, \quad r_{5,6} = \pm 1.32728, \quad r_{7,8} = \pm 1.778, \\
r_{9,10} &= \pm 2.23642, \quad r_{11,12} = \pm 2.70532, \quad r_{13,14} = \pm 3.18829, \quad r_{15,16} = \pm 3.69028, \\
r_{17,18} &= \pm 4.21861, \quad r_{19,20} = \pm 4.78532, \quad r_{21,22} = \pm 5.41364, \quad r_{23,24} = \pm 6.16427
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Программы (Matlab 6.5)

1. Спектры $G(w)$ (см. рис. 1)

```

syms w G;
figure(1)
hold on
for k = 1:6
G(k,:) = taylor(exp(w.^2/4),12*(k-1)+1)*exp(-w.^2/4);
ezplot(G(k,:),0,14)
end
grid on
w = 0:0.01:14;
G = (1 + 1/4*w.^2 + 1/32*w.^4 + 1/384*w.^6).*exp(-w.^2/4);
plot(w,G)
grid on
xlabel('w')
ylabel('G ( w )')
title('W i n d o w s G ( N = 0 ) a n d G T ( N = 3, 6, 12, 18, 24, 30')

```

2. Расчет w_1 при $a_1 = 1/\sqrt{2}$

syms w G;

$G = \text{taylor}(\exp(w^2/4), 13) * \exp(-w^2/4);$

$\text{solve}(G - 1/(2^{0.5}), w)$

solve — оператор решения алгебраического уравнения ($G - 1/\sqrt{2} = 0$)

3. Логарифм модуля нормированной функции $g(t)$ ($N = 9$) $\lg |g(t)/g(0)|$

$F_s = 1024;$

$t = -5.22027:1/F_s: 5.22027;$

$g = \exp(-t.^2). * (-7.82003 * 10^{-7} * t.^{18} + 0.0000668612 * t.^{16} - 0.00227328 * t.^{14} + 0.0397824 * t.^{12} - 0.387879 * t.^{10} + 2.13333 * t.^8 - 6.4 * t.^6 + 9.6 * t.^4 - 6 * t.^2 + 1);$

$\text{plot}(t, \log_{10}(\text{abs}(g)));$

$\text{title}('Window GT (N = 9) in Time Domain (Log Scale)')$

$\text{xlabel}('Time (t)')$

$\text{ylabel}('abs(g(t))');$

4. Спектр функции $g(t)$ ($N = 5$) при различных длинах интервала

$F_s = 1024;$

$t_1 = -1.32656:1/F_s: 1.32656;$

$t_2 = -2.02595:1/F_s: 2.02595;$

$t_3 = -2.78329:1/F_s: 2.78329;$

$t_4 = -3.66847:1/F_s: 3.66847;$

$g_1 = \exp(-t_1.^2). * (-0.0030784 * t_1.^{10} + 0.0846561 * t_1.^8 - 0.761905 * t_1.^6 + 2.66667 * t_1.^4 - 3.33333 * t_1.^2 + 1);$

$g_2 = \exp(-t_2.^2). * (-0.0030784 * t_2.^{10} + 0.0846561 * t_2.^8 - 0.761905 * t_2.^6 + 2.66667 * t_2.^4 - 3.33333 * t_2.^2 + 1);$

$g_3 = \exp(-t_3.^2). * (-0.0030784 * t_3.^{10} + 0.0846561 * t_3.^8 - 0.761905 * t_3.^6 + 2.66667 * t_3.^4 - 3.33333 * t_3.^2 + 1);$

$g_4 = \exp(-t_4.^2). * (-0.0030784 * t_4.^{10} + 0.0846561 * t_4.^8 - 0.761905 * t_4.^6 + 2.66667 * t_4.^4 - 3.33333 * t_4.^2 + 1);$

$n = 131072;$

$F_1 = \text{fft}(g_1, n);$

$F_2 = \text{fft}(g_2, n);$

$F_3 = \text{fft}(g_3, n);$

$F_4 = \text{fft}(g_4, n);$

$f = F_s * (0:(n/2))/n;$

$P_1 = 20 * \log_{10}(\text{abs}(F_1/F_1(1)));$

$P_2 = 20 * \log_{10}(\text{abs}(F_2/F_2(1)));$

$P_3 = 20 * \log_{10}(\text{abs}(F_3/F_3(1)));$

$P_4 = 20 * \log_{10}(\text{abs}(F_4/F_4(1)));$

$\text{plot}(f, P_1(1:n/2 + 1), f, P_2(1:n/2 + 1), f, P_3(1:n/2 + 1), f, P_4(1:n/2 + 1)), \text{grid}$

$\text{title}('Windows GT (N = 5) in Frequency Domain')$

$\text{xlabel}('Frequency (f)')$

$\text{ylabel}('G(f), dB');$

5. Оконные функции GT ($N = 3, N = 6, N = 12$) (см. рис. 4, кривые 1–3) и их спектры соответственно (см. рис. 5).

$F_s = 1024;$

$x = -0.5:1/F_s: 0.5;$

$u = \exp(-(x * 5.3039).^2). * (-1696.38 * x.^6 + 633.146 * x.^4 - 56.2648 * x.^2 + 1);$

$u_1 = \exp(-(x * 2.51974 * 2).^2). * (1 - 101.585 * x.^2 + 2579.9 * x.^4 - 24960 * x.^6 + 105649 * x.^8 - 195134 * x.^{10} + 127069 * x.^{12});$

```
u2 = exp(-(x*2.70532*2).^2).*(2.05295*10^8*x.^24 - 1.0519*10^9*x.^22 +
2.27267*10^9*x.^20 - 2.71711*10^9*x.^18 + 1.98388*10^9*x.^16 - 9.21631*10^8
*x.^14 + 2.75466*10.^8*x.^12 - 5.24248*10^7*x.^10 + 6.15577*10^6*x.^8 -
420548*x.^6 + 15083.7*x.^4 - 234.2*x.^2 + 1);
```

```
n = 131072;
```

```
F = fft(u,n);
```

```
F1 = fft(u1,n);
```

```
F2 = fft(u2,n);
```

```
f = Fs*(0:(n/2))/n;
```

```
P = 20*log10(6.5*abs(F/Fs));
```

```
P1 = 20*log10(9*abs(F1/Fs));
```

```
P2 = 20*log10(12*abs(F2/Fs));
```

```
plot(f,P(1:n/2+1),f,P1(1:n/2+1),f,P2(1:n/2+1)), grid
```

```
title('Windows GT (N = 3, N = 6, N = 12) in Frequency Domain')
```

```
xlabel('Frequency (y)')
```

```
ylabel('F(y), dB')
```

6. Сравнение окон GTM и GT (см. рис. 6) и их спектров (см. рис. 7)

```
Fs = 1024;
```

```
x = -0.5:1/Fs:0.5;
```

```
v = x.*exp(-1.68294*x.^2-0.6341278*x.^4);
```

```
u = exp(-(x*5.3039.*(1 + 1.5*x.^6 + 2*x.^4)).^2).*(-1696.38*v.^6 + 633.146*v.^4 -
56.2648*v.^2 + 1);
```

```
u1 = exp(-(x*5.3039).^2).*(-1696.38*x.^6 + 633.146*x.^4 - 56.2648*x.^2 + 1);
```

```
plot(x,u,x,u1),grid;
```

```
title('Windows GTM (N = 3) and GT (N = 3) in Time Domain')
```

```
legend('GTM','GT')
```

```
xlabel('Time (x)')
```

```
ylabel('u (x)');
```

```
n = 131072;
```

```
F = fft(u,n);
```

```
F1 = fft(u1,n);
```

```
f = Fs*(0:(n/2))/n;
```

```
P = 20*log10(abs(F/F(1)));
```

```
P1 = 20*log10(abs(F1/F1(1)));
```

```
plot(f,P(1:n/2+1),f,P1(1:n/2+1)),grid
```

```
title('Windows GTM (N = 3) and GT (N = 3) in Frequency Domain')
```

```
legend('GTM','GT')
```

```
xlabel('Frequency (y)')
```

```
ylabel('F (y), dB');
```

```
Fs = 1024;
```

```
x = -0.5:1/Fs:0.5;
```

```
v = x.*exp(-0.540777*x.^2-2.918446*x.^4);
```

```
u = exp(-(x*5.56658.*(1 + 1.5*x.^6 + 2*x.^4)).^2).*(-87944.8*v.^10 + 78048.7*v.^8 -
22669*v.^6 + 2560.49*v.^4 - 103.289*v.^2 + 1);
```

```
u1 = exp(-(x*5.56658).^2).*(-87944.8*x.^10 + 78048.7*x.^8 - 22669*x.^6 +
2560.49*x.^4 - 103.289*x.^2 + 1);
```

```
plot(x,u,x,u1),grid;
```

```
title('Windows GTM (N = 5) and GT (N = 5) in Time Domain')
```

```
legend('GTM','GT')
```

```
xlabel('Time (x)')
```

```
ylabel('u (x)');
```

```

n = 131072;
F = fft(u,n);
F1 = fft(u1,n);
f = Fs*(0:(n/2))/n;
P = 20*log10(abs(F/F(1)));
P1 = 20*log10(abs(F1/F1(1)));
plot(f,P(1:n/2 + 1),f,P1(1:n/2 + 1)),grid
title('W i n d o w s G T M (N = 5) a n d G T (N = 5) i n F r e q u e n c y D o m a i n')
legend('G T M','G T')
xlabel('F r e q u e n c y (y)')
ylabel('F ( y ), d B');

Fs = 1024;
x = -0.5:1/Fs:0.5;
v = x.*exp(-0.413772*x.^2-3.172456*x.^4);
u = exp(-(4.6515*x.*(1 - 0.413772*x.^2 + 4*x.^4)).^2).*( -140169*v.^14 + 340116*
v.^12 - 306531*v.^10 + 129867*v.^8 - 27010.1*v.^6 + 2621.56*v.^4 - 100.97*v.^2
+ 1);
u1 = exp(-(x*4.6515).^2).*( -140169*x.^14 + 340116*x.^12 - 306531*x.^10 +
129867*x.^8 - 27010.1*x.^6 + 2621.56*x.^4 - 100.97*x.^2 + 1);
plot(x,u,x,u1),grid ;
title('W i n d o w s G T M (N = 7) a n d G T (N = 7) i n T i m e D o m a i n')
legend('G T M','G T')
xlabel('T i m e (x)')
ylabel('u (x)');
n = 131072;
F = fft(u,n);
F1 = fft(u1,n);
f = Fs*(0:(n/2))/n;
P = 20*log10(abs(F/F(1)));
P1 = 20*log10(abs(F1/F1(1)));
plot(f,P(1:n/2 + 1),f,P1(1:n/2 + 1)),grid
title('W i n d o w s G T M (N = 7) a n d G T (N = 7) i n F r e q u e n c y D o m a i n')
legend('G T M','G T')
xlabel('F r e q u e n c y (y)')
ylabel('F (y), d B');

Fs = 1024;
x = -0.5:1/Fs:0.5;
v = x.*exp(-1.357794*x.^2 - 1.284411*x.^4);
u = exp(-(x*5.4106.*(1 + 1.5*x.^6 + 2*x.^4)).^2).*(2.05259*10^8*v.^24 -
1.05172*10^9*v.^22 + 2.27233*10^9*v.^20 - 2.71674*10^9*v.^18 + 1.98365*10^9
*v.^16 - 9.21535*10^8*v.^14 + 2.75441*10^8*v.^12 - 5.2421*10^7*v.^10 +
6.15541*10^6*v.^8 - 420529*v.^6 + 15083.2*v.^4 - 234.197*v.^2 + 1);
u1 = exp(-(x*5.4106).^2).*(2.05259*10^8*x.^24 - 1.05172*10^9*x.^22 +
2.27233*10^9*x.^20 - 2.71674*10^9*x.^18 + 1.98365*10^9*x.^16 - 9.21535*10^8*
x.^14 + 2.75441*10^8*x.^12 - 5.2421*10^7*x.^10 + 6.15541*10^6*x.^8 -
420529*x.^6 + 15083.2*x.^4 - 234.197*x.^2 + 1);
plot(x,u,x,u1),grid ;
title('W i n d o w s G T M (N = 12) a n d G T (N = 12) i n T i m e D o m a i n')
legend('G T M','G T')
xlabel('T i m e (x)')
ylabel('u (x)');

```

```

n = 131072;
F = fft(u,n);
F1 = fft(u1,n);
f = Fs*(0:(n/2))/n;
P = 20*log10(abs(F/F(1)));
P1 = 20*log10(abs(F1/F1(1)));
plot(f,P(1:n/2 + 1),f,P1(1:n/2+1)),grid
title('Windows G T M (N = 12) and G T (N = 12) in Frequency Domain')
legend('G T M','G T')
xlabel('Frequency (y)')
ylabel('F (y), dB');

```

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

*Результаты вычисления определенных интегралов
для расчета параметров оконных функций (система Wolfram Alpha)*

```

integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.3039 x)^2) L_3^0.5((5.3039 x)^2))/(L_3^0.5(0)) dx =
0.152991
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(5.3039 x)^2) L_3^0.5((5.3039 x)^2))/(L_3^0.5(0)))^2 dx =
0.130915
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.3039 x)^2) L_3^0.5((5.3039 x)^2) cos(π x))/(L_3^0.5(0))
dx = 0.152713
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.53316 x)^2) L_4^0.5((4.53316 x)^2))/(L_4^0.5(0)) dx =
0.159561
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(4.53316 x)^2) L_4^0.5((4.53316 x)^2))/(L_4^0.5(0)))^2 dx
= 0.138604
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.53316 x)^2) L_4^0.5((4.53316 x)^2) cos(π x))/(L_4^0.5(0)) dx =
0.158743
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.56658 x)^2) L_5^0.5((5.56658 x)^2))/(L_5^0.5(0)) dx =
0.117523
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(5.56658 x)^2) L_5^0.5((5.56658 x)^2))/(L_5^0.5(0)))^2 dx
= 0.103945
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.56658 x)^2) L_5^0.5((5.56658 x)^2) cos(π
x))/(L_5^0.5(0)) dx = 0.117639
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.0395 x)^2) L_6^0.5((5.0395 x)^2))/(L_6^0.5(0)) dx =
0.119713
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(5.0395 x)^2) L_6^0.5((5.0395 x)^2))/(L_6^0.5(0)))^2 dx =
0.107035
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.0395 x)^2) L_6^0.5((5.0395 x)^2) cos(π x))/(L_6^0.5(0))
dx = 0.119961
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.6515 x)^2) L_7^0.5((4.6515 x)^2))/(L_7^0.5(0)) dx =
0.120908
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(4.6515 x)^2) L_7^0.5((4.6515 x)^2))/(L_7^0.5(0)))^2 dx =
0.109086
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.6515 x)^2) L_7^0.5((4.6515 x)^2) cos(π x))/(L_7^0.5(0))
dx = 0.121318
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.0985 x)^2) L_9^0.5((4.0985 x)^2))/(L_9^0.5(0)) dx =
0.12202
integral_(-0.5)^0.5 ((exp(-(4.0985 x)^2) L_9^0.5((4.0985 x)^2))/(L_9^0.5(0)))^2 dx =
0.111704
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(4.0985 x)^2) L_9^0.5((4.0985 x)^2) cos(π x))/(L_9^0.5(0))
dx = 0.122793
integral_(-0.5)^0.5 (exp(-(5.4106 x)^2) L_12^0.5((5.4106 x)^2))/(L_12^0.5(0)) dx =
0.0812328

```

$$\int_{-0.5}^{0.5} ((\exp(-(5.4106 x)^2) L_{12}^{0.5}((5.4106 x)^2))/(L_{12}^{0.5}(0)))^2 dx = 0.0749071$$

$$\int_{-0.5}^{0.5} (\exp(-(5.4106 x)^2) L_{12}^{0.5}((5.4106 x)^2) \cos(\pi x))/(L_{12}^{0.5}(0)) dx = 0.0813022$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дворкович В.П., Дворкович А.В.* Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. СПб.: БХВ—Петербург, 2010.