

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67.01

АБЕРРАЦИИ ЭЙКОНАЛА В ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЛИНЗАХ

© 2020 г. А. С. Венецкий^а, *, В. А. Калошин^а

^аИнститут радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: Avenetsky@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.10.2019 г.

После доработки 15.11.2019 г.

Принята к публикации 25.11.2019 г.

Получены приближенные формулы для эйконала на выходной поверхности цилиндрической диэлектрической линзы с градиентом показателя преломления вдоль декартовой координаты при смещении источника из фокуса, расположенного на оси симметрии линзы. Одна из них получена в парааксиальной области и имеет вид разложения по степеням величин продольного и поперечного смещения источника, включая члены первого и второго порядка малости, а другая – в виде интеграла, не имеет ограничения по числовой апертуре. С использованием первой формулы найдено уравнение фокальной кривой. Проведено исследование погрешности различных формул при вычислении эйконала и его aberrаций на выходной поверхности линзы. С помощью второй формулы найдены оптимальные параметры линзы с параболическим законом изменения диэлектрической проницаемости, обеспечивающие минимальные aberrации.

DOI: 10.31857/S0033849420080136

ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрические линзы из плавно неоднородного (градиентного) диэлектрика используются как в оптическом, так и в радиодиапазоне электромагнитных волн. Впервые цилиндрические линзы такого типа с плоскими поверхностями и квадратичным законом изменения коэффициента преломления вдоль декартовой координаты были изготовлены из желатина и исследованы в оптическом диапазоне [1]. В работах по оптике их часто называют линзами Вуда [2]. Точное решение задачи геометрооптического синтеза частного случая градиентной линзы – плоской линзы с первым фокусом на поверхности линзы, а вторым на бесконечности – было получено в работе [3] в виде зависимости коэффициента преломления от декартовой координаты в декартовой системе координат или радиальной координаты в цилиндрической системе координат. Эта линза получила название линза Микаэляна [4]. В работе [5] решение [3] было обобщено на случай линзы из анизотропного диэлектрика.

Теория геометрооптического синтеза градиентных линз с плоскими входной и выходной поверхностями и внешним фокусом, использующая классическую оптическую теорию aberrаций, описана в работе [2]. Теория синтеза, использующая разложение коэффициента преломления по

четным степеням расстояния от оси линзы, разработана в работе [6], а с криволинейными поверхностями – в работах [7, 8]. Рекуррентный метод синтеза таких линз, основанный на использовании модели слоистой линзы с постоянными коэффициентами преломления внутри слоев, развит в работе [9].

Исследование эйконала (оптического пути) и его aberrаций в градиентных линзах при смещении источника из фокуса усложняется из-за криволинейной формы лучей. Классическая оптическая теория aberrаций таких линз описывает лучевую aberrацию в виде двумерного ряда (разложения по степеням угла зрения и апертуры линзы) [2]. В работах [10–12] развита новая теория aberrаций для однородных диэлектрических линз с использованием разложения эйконала по одному параметру – величине смещения источника. В работе [13] теория обобщается для описания эйконала и его aberrации на выходной поверхности двумерной линзы с градиентом диэлектрической проницаемости вдоль декартовой координаты. Однако формула для эйконала, полученная в работе [13], неудобна для использования вблизи оси симметрии линзы, поскольку имеет на оси особенность.

Цель данной работы – получить формулу для эйконала, справедливую в парааксиальной области, а также формулу, в которой используется приближение прямых лучей.

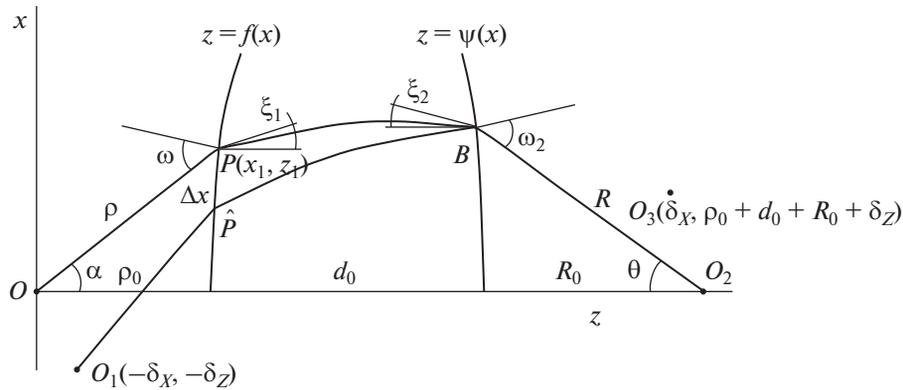


Рис. 1. Геометрия лучей в линзе и смещение источника.

1. ЭЙКОНАЛ НА ВЫХОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛИНЗЫ В ПАРАКСИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ СМЕЩЕННОМ ИЗ ФОКУСА ИСТОЧНИКЕ

Рассмотрим цилиндрическую градиентную линзу, преобразующую цилиндрический фронт в цилиндрический (или плоский) с показателем преломления n , зависящим от декартовой координаты x (рис. 1). Пусть источник смещается из фокуса в точку O в точку O_1 с координатами $(-\delta_x, -\delta_z)$. Эйконал луча, выходящего из O_1 , в произвольной точке $B(x_2, z_2)$ на выходной апертуре линзы имеет вид [13]

$$L(O_1, B) = \rho + J + \sin \alpha \cos \varphi \delta_x + \cos \alpha \delta_z + A_2(\delta_x, \delta_z) - \frac{\tilde{Q}_1^2}{4\tilde{Q}_2} \quad (1)$$

Здесь J – оптический путь невозмущенного луча от точки P до точки B ,

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= \frac{\cos \omega \cos \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} \delta_x \cos \varphi - \frac{\cos \omega \sin \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} \delta_z, \\ \tilde{Q}_2 &= -\frac{k^2}{2} I_4 + \frac{2ka - n'(x_1)n(x_1)}{2\sqrt{n^2(x_1) - a^2}} - \\ &\quad - kf'(x_1) - \frac{a}{2} f''(x_1) + Q_2, \\ A_2(\delta_x, \delta_z) &= \frac{\cos^2 \alpha}{2\rho} \delta_x^2 + \\ &\quad + \frac{\sin^2 \alpha}{2\rho} \delta_z^2 - \frac{\sin 2\alpha}{2\rho} \cos \varphi \delta_x \delta_z, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{\cos \alpha}{2} f''(x_1) + \frac{\cos^2 \alpha}{2\rho \cos^2(\omega - \alpha)}, \\ I_4 &= [-f'(x_1) + \text{ctg} \xi_1 + \lambda(-\text{ctg} \xi_2 + \psi'(x_2))]/a', \\ k &= \frac{\text{ctg} \xi_1 - f'(x_1)}{I_4} \end{aligned}$$

$a = n(x_1) \cos \xi_1$ – лучевой параметр невозмущенного луча,

$$a' = \left. \frac{da}{dx} \right|_{x=x_1} = n'(x_1) \cos \xi_1 - n(x_1) \sin(\xi_1) \Omega \Theta,$$

$$\Theta = \frac{1}{G} \left[1 + B(1 - G) - \frac{\rho}{\cos \omega} \text{tg} \omega \frac{n'(x_1)}{n(x_1)} \right],$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{K_P \rho}{\cos \omega}, \quad G = \frac{\sqrt{n^2(x_1) - \sin^2 \omega}}{\cos \omega} = \\ &= \frac{n_1(n_1 - \cos(\alpha - \xi_1))}{n_1 \cos(\alpha - \xi_1) - 1}, \quad n_1 = n(x_1), \end{aligned}$$

$K_P = \frac{f''(x_1)}{(1 + (f'(x_1))^2)^{3/2}}$ – кривизна поверхности линзы в точке P .

Кроме того, $\varphi = 0$ при $x_2 > 0$, $\varphi = \pi$ при $x_2 < 0$, $J = \rho_0 + n_0 d_0 + R_0 - \rho - R$, $\lambda = \frac{\Omega}{\Omega_2} \frac{d\theta}{d\alpha}$, $\theta = \theta(\alpha)$ – функция отображения при фокусировке на конечном расстоянии, $J = n_0 d_0 - d_0 - \rho + Z_B$, $\lambda = \Omega \frac{dx_2}{d\alpha}$, $x_2 = x_2(\alpha)$ – функция отображения при фокусировке на бесконечности (при формировании плоского фронта), $\Omega = \frac{\cos \omega}{\rho \cos(\omega - \alpha)}$, $\Omega_2 = \frac{\cos \omega_2}{R \cos(\omega_2 - \theta)}$.

Величина эйконала (1) зависит от первых производных функций, описывающих левую и правую поверхности линзы, от кривизны левой поверхности, углов входа и выхода невозмущенного луча, производной функции отображения, значения коэффициента преломления в точке входа и выхода невозмущенного луча, производной коэффициента преломления в точке входа невозмущенного луча. При этом выражение (1) справедливо как для монотонных лучей, так и немонотонных.

Формула (1) справедлива для любой точки B на правой поверхности линзы, кроме точки на оси z ,

потому что при $x = 0$ в формуле имеется особенность в выражении \tilde{Q}_2 . Раскроем эту особенность. Из закона преломления в точках P и B следует, что

$$\xi_1 = \arcsin\left(\frac{\sin \omega}{n(x_1)}\right) - \omega + \alpha,$$

$$\xi_2 = -\arcsin\left(\frac{\sin \omega_2}{n(x_2)}\right) + \omega_2 - \theta$$

(углы $\xi_1, \xi_2, \omega, \omega_2$ показаны на рис. 1). Раскладывая эти выражения в ряды по x_1 и x_2 и оставляя члены не выше первого порядка, получаем

$$\xi_1 = -\frac{g_1}{n_0} x_1, \quad \xi_2 = -\frac{h_1}{n_0} x_2,$$

$$a' = -\frac{(c_2 + g_2)}{n_0} x_1, \quad k = \frac{h_1(c_2 + g_2)}{n_0(g_1 - h_1)} x_1,$$

где $g_1 = 2f_2(n_0 - 1) - \frac{1}{\rho_0}$, $h_1 = 2\psi_2(n_0 - 1) + \frac{1}{R_0}$, $g_2 = g_1^2 f_2$ и ψ_2 – коэффициенты разложения уравнения поверхностей ($z = \rho_0 + f_2 x^2 + \dots$ и $z = \rho_0 + d_0 + \psi_2 x^2 + \dots$).

Разложим закон отображения для фокусировки на конечном расстоянии в ряд Тэйлора по нечетным степеням α : $\theta = m_1 \alpha + m_3 \alpha^3 + \dots$. Пусть при фокусировке в плоскую волну аналогичный ряд имеет вид $x_2 = f_e \alpha + f_3 \alpha^3 + \dots$. При $\alpha \rightarrow 0$ и фокусировке на конечном расстоянии имеем

$$\lambda \rightarrow \left. \frac{\Omega}{\Omega_2} \frac{d\theta}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{R_0}{\rho_0} m_1,$$

а при фокусировке в плоскую волну –

$$\lambda \rightarrow \left. \Omega \frac{dx_2}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{f_e}{\rho_0}.$$

При этом из соотношений $x_1 = \alpha \rho_0$, $x_2 = R_0 \theta$ следует:

$$x_2 = m_1 \frac{R_0}{\rho_0} x_1, \quad \lambda = \frac{R_0}{\rho_0} m_1,$$

$$k^2 I_4 + \frac{2ka - n'(x_1)n(x_1)}{\sqrt{n^2(x_1) - a^2}} =$$

$$= -\frac{c_k^2}{c_{\xi_1}} \left(\frac{1}{c_{\xi_1}} - \frac{\lambda}{c_{\xi_2}} \right) + \frac{2c_k n_0 + c_2}{n_0 c_{\xi_1}},$$

$$c_k = \frac{h_1(c_2 + g_2)}{n_0(g_1 - h_1)}, \quad c_{\xi_1} = -\frac{g_1}{n_0},$$

$$c_{\xi_2} = -m_1 \frac{h_1 R_0}{n_0 \rho_0}, \quad c_{\lambda} = -\frac{(c_2 + g_2)}{n_0},$$

где c_2 – коэффициент разложения $n^2(x) = n_0^2 - c_2 x^2$.

С учетом найденных соотношений получаем

$$\tilde{Q}_{20} = \tilde{Q}_2(0) = -\frac{(c_2 + g_2)}{2(g_1 - h_1)},$$

тогда выражение для эйконала луча из смещенного фокуса можно представить в виде

$$L(O_1, B) = \rho + J + \sin \alpha \cos \varphi \delta_x +$$

$$+ \cos \alpha \delta_z + A_2(\delta_x, \delta_z) - \frac{\tilde{Q}_1^2}{4\tilde{Q}_{20}} \quad (2)$$

(выражение для величины \tilde{Q}_1 было приведено выше).

Формула (2) определяет эйконал луча из смещенного источника в паракиальной области.

2. ФОРМУЛА ДЛЯ ЭЙКОНАЛА НА ВЫХОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛИНЗЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПРЯМЫХ ЛУЧЕЙ

Формула (1) описывает эйконал в точке B с погрешностью порядка δ_x^3 . Как показано в работе [12], для линзы из однородного диэлектрика можно получить приближенную формулу для эйконала путем прямого суммирования двух оптических путей:

$$L(O_1 B) = L(O_1 \hat{P}) + L(\hat{P} B), \quad (3)$$

где точка \hat{P} имеет координаты $(x + \Delta x \cos \varphi, f(x + \Delta x \cos \varphi))$, Δx вычисляется по формуле

$$\Delta x = -\tilde{Q}_1 / (2\tilde{Q}_2). \quad (4)$$

В паракиальной области формула (4) переходит в формулу

$$\Delta x = -\tilde{Q}_1 / (2\tilde{Q}_{20}).$$

При этом ошибка формулы (3), зависящая от смещения, пропорциональна δ_x^4 . Первый член формулы (3) есть длина отрезка $O_1 \hat{P}$, второй член представляется криволинейным интегралом по траектории луча, соединяющего точки \hat{P} и B :

$$L(\hat{P} B) = \int n ds.$$

Вычислим эйконал луча в среде с показателем преломления, меняющимся по закону $n^2(x) = n_0^2 - c_2 x^2$. Уравнение монотонного луча в такой среде имеет вид

$$z = \int_0^x \frac{adx}{\sqrt{n^2(x) - a^2}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{c_2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{p^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{c_2}} \arcsin \frac{x}{p}.$$

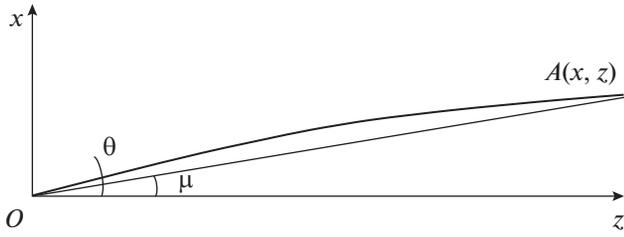


Рис. 2. Приближенное вычисление эйконала.

Здесь $a = n_0 \cos \theta$, $p^2 = \frac{n_0^2 - a^2}{c_2} = \frac{n_0^2 \sin^2 \theta}{c_2}$, θ – угол касательной к лучу в точке O (рис. 2).

Эйконал луча в точке A представим в виде

$$L = \int_0^x \sqrt{n^2(x) - a^2} dx + az = \sqrt{c_2} \frac{x}{2} \sqrt{p^2 - x^2} + \left(\frac{\sqrt{c_2} p^2}{2} + \frac{a^2}{\sqrt{c_2}} \right) \arcsin \frac{x}{p}.$$

Разлагая этот эйконал в ряд по степеням x и оставляя члены не выше второго порядка, получаем

$$L = n_0 z + \frac{\sqrt{c_2}}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{z \sqrt{c_2}}{n_0} \right) x^2 + \underline{Q}(x^4) = n_0 z + L_2 x^2 + \underline{Q}(x^4).$$

Легко показать, что полученное выражение для эйконала справедливо и для немонотонного луча, т.е. имеющего экстремум внутри линзы. Вычислим эйконал на прямом отрезке, соединяющем точки O и A (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \int n ds = \int_0^x \left(n_0 - \frac{c_2}{2n_0} x^2 \right) \frac{dx}{\sin \mu} = \\ &= n_0 z + \left(\frac{n_0}{2z} - \frac{zc_2}{6n_0} \right) x^2 + \underline{Q}(x^4) = \\ &= n_0 z + \bar{L}_2 x^2 + \underline{Q}(x^4), \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{x}{z}, \\ \bar{L}_2 &= \frac{n_0}{2z} - \frac{zc_2}{6n_0}, \quad L_2 = \frac{\sqrt{c_2}}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{z \sqrt{c_2}}{n_0} \right), \end{aligned}$$

где L_2 и \bar{L}_2 – значение коэффициента разложения точного и приближенного эйконала соответственно. Этот отрезок тем ближе к истинному лучу в линзе, чем меньше величина градиента показателя преломления среды и тоньше линза. Численное сравнение коэффициентов L_2 и \bar{L}_2 показывает, что при $n_0 = 1.6$, $c_2 = 1$ и $z = 0.5$ получаем $|L_2 - \bar{L}_2| = 3.4 \times 10^{-4}$, а при $n_0 = 1.6$, $c_2 = 3$ и $z = 1$ имеем $|L_2 - \bar{L}_2| = 2.75 \times 10^{-2}$. Если при указанных параметрах заменить эйконал реального луча на

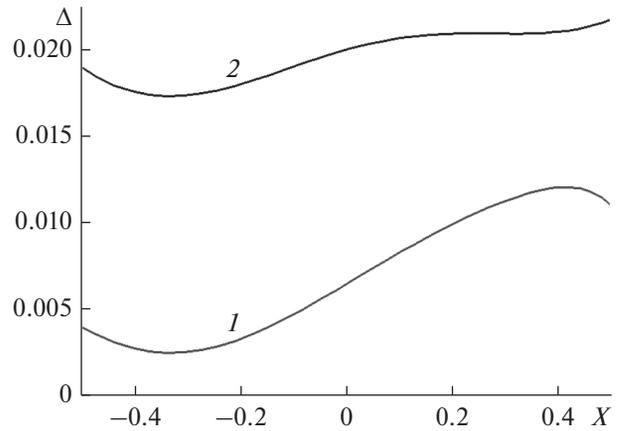


Рис. 3. Погрешности вычисления эйконала по формулам (1) и (5).

эйконал спрямленного луча, то ошибка будет порядка $\underline{O}(x^4)$.

С учетом полученных результатов эйконал в точке B на выходной поверхности можно записать в виде

$$L(O_1, B) = |O_1 P_1| + \int_{P_1}^B n ds + \Delta_E, \quad (5)$$

где $\Delta_E = \int_{PB} n ds - \int_{PB} n ds$ – разность криволинейного и прямолинейного интегралов для невозмущенного луча. Интегрирование в формуле (5) проводится по прямой, соединяющей точки P_1 и B , а точка P_1 имеет координаты $x_1 = x + \Delta x \cos \varphi$, $z_1 = f(x_1)$, где x – координата невозмущенной точки P , а Δx выражается формулой (4).

На рис. 3 приведены зависимости от координаты вдоль апертуры ошибки вычисления эйконала апланатической градиентной линзы с параболическим законом изменения диэлектрической проницаемости и параметрами $\rho_0 = 1$, $d_0 = 0.5$, $n_0 = 1.6$, $f_e = 1.35$, $c_2 = 1.5$. Величины смещения источника $\delta_x = 0.39904$, $\delta_z = -0.25024$ соответствуют отклонению луча на 20 град. Величины δ_x , δ_z , ρ_0 , d_0 , R_0 , f_e здесь и далее нормированы на величину апертуры линзы. Кривой 2 представлена разность точного эйконала и эйконала, вычисленного по формуле (1), а кривой 1 – разность точного эйконала и вычисленного по формуле (5). Как видно из рисунка, при данном наборе параметров точность формулы (5) выше, чем формулы (1).

3. ФОКАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

При выводе уравнения фокальной кривой, на которой эйконал имеет минимальную абберрацию

(отклонение от эйконала центрального луча), рассмотрим три случая – один общий и два частных:

1) оба фокуса находятся на конечном расстоянии от линзы,

2) два фокальных расстояния равны,

3) второй фокус находится на бесконечности.

Начнем с частного случая 3. Найдем эйконал в точке B с координатами (X, Z) , лежащей на краю апертуры линзы, и добавим оптический путь до плоскости наклонного фронта. Для вывода уравнения используем формулы (1), (2) для эйконала на выходной поверхности линзы. Обозначим полученный в результате эйконал $\Phi(X)$:

$$\Phi(X) = L(O_1, B) - X \sin \theta - (Z - \rho_0 - d_0) \cos \theta,$$

где θ – угол между лучом на выходе линзы и осью Z , $Z = \psi(X)$, а величина $L(O_1, B)$ определяется формулой (1) или (на оси) формулой (2).

Эйконал $\Phi(X)$ можно представить в виде суммы $\Phi(X) = \Phi_1(X) + \Phi_2(X)$, где $\Phi_2(X)$ – четная, а $\Phi_1(X)$ – нечетная функции.

Используя соотношения $\sin \theta = \delta_x / f_e$, $\cos \theta = 1 - \delta_x^2 / (2f_e^2)$ и введя обозначения $q_2 = -1 / (4\tilde{Q}_2)$, $q_{20} = -1 / (4\tilde{Q}_{20})$, можно получить

$$\begin{aligned} \Phi_2(X) &= L_0 + (Z - \rho_0 - d_0) \frac{\delta_x^2}{2f_e^2} + \cos \alpha \delta_z + \\ &+ \left(\frac{1}{2\rho} + \Omega^2 q_2 \right) (\delta_x^2 \cos^2 \alpha + \delta_z^2 \sin^2 \alpha), \\ \Phi_2(0) &= L_0 + \delta_z + \delta_x^2 \left(\frac{1}{2\rho_0} + \frac{q_{20}}{\rho_0^2} \right), \end{aligned}$$

где $L_0 = \rho_0 + n_0 d_0$.

Приравнявая $\Phi_2(X) = \Phi_2(0)$, получаем уравнение фокальной кривой, определяющую зависимость $\delta_z(\delta_x)$:

$$\begin{aligned} \delta_x^2 \left\{ \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{2\rho} + \Omega^2 q_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2f_e^2} (Z - \rho_0 - d_0) \right\} - \frac{1}{2\rho_0} - \frac{q_{20}}{\rho_0^2} \Bigg\} = \\ = \delta_z (1 - \cos \alpha) - \delta_z^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{2\rho} + \Omega^2 q_2 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь выведем уравнение фокальной кривой для частного случая 2, когда фокальные расстояния равны, т.е. $\rho_0 = R_0$. В этом случае линза имеет две плоскости симметрии и $\alpha = \theta$ для любого луча. Найдем эйконал в точке B , лежащей на оси, т.е. при $X = 0$ и $\alpha = 0$. Из симметрии линзы можно получить, что $h_1 = -g_1$, и из формулы (2) следует:

$$L(O_1, 0) = \rho_0 + n_0 d_0 + \delta_z + \left(\frac{1}{2\rho_0} + \frac{g_1}{\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_x^2.$$

Прибавляя к полученному значению эйконала в точке B расстояние от B до O_3 : $|BO_3| = \sqrt{\delta_x^2 + (\rho_0 + \delta_z)^2} = \rho_0 + \delta_z + \frac{\delta_x^2}{2\rho_0}$,

получим эйконал от точки O_1 до O_3 :

$$\begin{aligned} L(O_1, O_3) &= 2\rho_0 + n_0 d_0 + 2\delta_z + \\ &+ \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{g_1}{\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_x^2. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю сумму членов с δ_x и δ_z , получаем уравнение фокальной кривой слева от линзы:

$$\delta_z = - \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{g_1}{\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \frac{\delta_x^2}{2}. \quad (7)$$

В силу симметрии линзы фокальная кривая справа от линзы симметрична кривой (7) относительно оси X .

И наконец, найдем уравнение фокальной кривой в общем случае 1, когда фокусные расстояния разные и конечные. При этом одна из фокальных кривых (например, правая) может быть задана в виде

$$\Delta_z = \Psi(\Delta_x), \quad (8)$$

где (Δ_x, Δ_z) – координаты смещенного фокуса O_3 . Ограничимся случаем апланатической линзы. По формуле (1) найдем эйконал в произвольной точке $B(X, Z)$ на правой поверхности и прибавим к нему расстояние $|BO_3|$:

$$\begin{aligned} |BO_3| &= [(R \sin \theta \cos \varphi - \Delta_x)^2 + \\ &+ (\Delta_z - R \cos \theta)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Ограничиваясь линейными членами по δ_x , Δ_x , можно записать

$$\begin{aligned} L(O_1, B) + |BO_3| &= \rho + J + R + \\ &+ \sin \alpha \cos \varphi \delta_x - \sin \theta \cos \varphi \Delta_x + \dots \end{aligned}$$

Приведенная сумма в силу фокусировки есть константа, поэтому можно записать

$$\Delta_x = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \delta_x = \frac{1}{m} \delta_x, \quad (9)$$

где $m = \sin \theta / \sin \alpha$ – константа (параметр апланатизма).

По формуле (2) найдем эйконал в точке B , лежащей на оси, т.е. при $X = 0$ и $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} L(O_1, 0) &= \rho_0 + n_0 d_0 + \delta_z + \\ &+ \left(\frac{1}{2\rho_0} + \frac{g_1 - h_1}{2\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_x^2. \end{aligned}$$

Прибавляя к полученному значению эйконала в точке B расстояние от B до O_3 :

$$\begin{aligned} |BO_3| &= \sqrt{\Delta_X^2 + (R_0 + \Delta_Z)^2} = \\ &= R_0 + \Delta_Z + \frac{\Delta_X^2}{2R_0}, \end{aligned}$$

получим эйконал по лучу от точки O_1 до O_3 :

$$\begin{aligned} L(O_1, O_3) &= L_0 + \delta_Z + \left(\frac{1}{2\rho_0} + \frac{g_1 - h_1}{2\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_X^2 + \\ &+ \Delta_Z + \frac{\Delta_X^2}{2R_0}, \end{aligned}$$

где $L_0 = \rho_0 + n_0 d_0 + R_0$ – эйконал центрального луча. Выражая Δ_X через δ_X по формуле (9), а Δ_Z через δ_X по формуле (8) и требуя выполнения равенства $L(O_1, O_3) = L_0$, получаем уравнение фокальной кривой:

$$\delta_Z + \left(\frac{1}{2\rho_0} + \frac{g_1 - h_1}{2\rho_0^2(c_2 + g_2)} \right) \delta_X^2 + \Psi \left(\frac{\delta_X}{m} \right) + \frac{\delta_X^2}{2R_0 m^2} = 0.$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ФОРМУЛ ДЛЯ ЭЙКОНАЛА И ЕГО АБЕРРАЦИЙ

Была найдена разность эйконалов, вычисленных методом геометрической оптики и с помощью формул (1), (2) и (5) на выходной поверхности линзы с параболическим законом изменения диэлектрической проницаемости. Полученные данные приведены на рис. 4. На рис. 4а представлено распределение погрешности формул для эйконала на выходной поверхности линзы, которая преобразует цилиндрический фронт источника в плоский, а на рис. 4б – распределение погрешности для симметричной линзы. Кривые 1, 2 рассчитаны с использованием формулы (1), кривые 3, 4 – с использованием формулы (5). Из данных, представленных на рис. 4а, видно, что формула (5) почти на порядок точнее формулы (1), а из данных на рис. 4б – наоборот, на порядок хуже. Также видно, что погрешность формулы (1) обусловлена главным образом линейной составляющей, которая сдвигает точку фокусировки вдоль фокальной кривой и не влияет на величину aberrации, а зависимость на рис. 4б, определенная формулой (5), содержит существенную нелинейную погрешность.

Для этой же линзы была определена разность эйконалов, вычисленных методом геометрической оптики и с помощью формул (1) или (2). На рис. 5 приведены полученные результаты, и видно, что в области $|X| \leq 0.25$ погрешности формул примерно равны.

Далее была исследована погрешность формулы (1) при вычислении aberrации в линзе с двумя плоскостями симметрии и параметрами $\rho_0 = 1$,

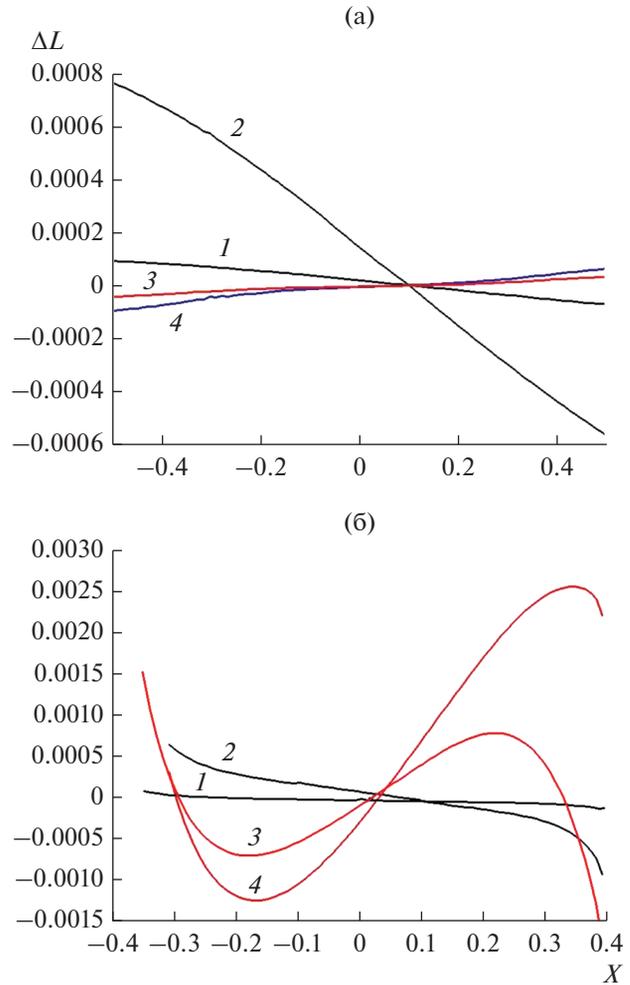


Рис. 4. Ошибка вычисления эйконала для линз с параметрами: а) $\rho_0 = 1, d_0 = 0.5, n_0 = 1.6, c_2 = 1, R_0 = \infty$; б) $\rho_0 = R_0 = 1, d_0 = 1, n_0 = 1.6, c_2 = 2.9$; кривые 1, 3 – $\delta_X = -0.1, \delta_Z = -0.01$, кривые 2, 4 – $\delta_X = -0.2, \delta_Z = -0.02$.

$R_0 = 1, d_0 = 1, n_0 = 1.6, c_2 = 2.9$. Добавим к величине эйконала в точке B выходной апертуры линзы для луча из источника, расположенного в точке $O_1(-\delta_X, -\delta_Z)$, расстояние до симметричной ей точки $O_3(\delta_X, \rho_0 + d_0 + R_0 + \delta_Z)$ и вычтем константу и линейную составляющую. В результате получаем

$$A(X) = \Phi(X) + |BO_3| - \Phi_0 - kX,$$

где Φ_0 – эйконал центрального луча несмещенного источника.

Эйконал $\Phi(X)$ будем вычислять двумя способами: по формуле (1) и методом геометрической оптики с использованием формулы

$$\Phi(X) = |O_1 P_1| + \int_{PB} nds,$$

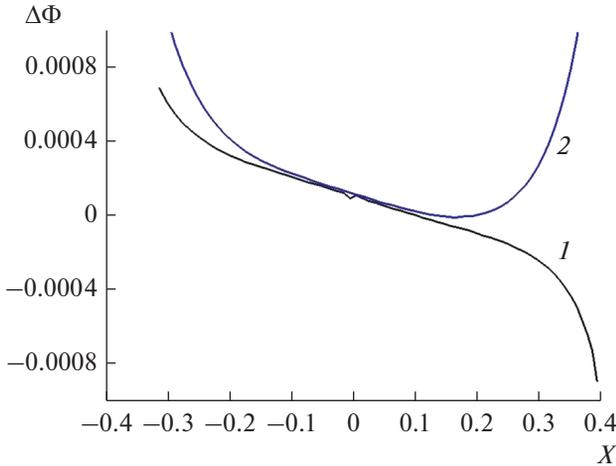


Рис. 5. Погрешности формул (1) (кривая 1) и (2) (кривая 2); параметры линзы: $\rho_0 = R_0 = 1, d_0 = 1, n_0 = 1.6, c_2 = 2.9$.

пределы интегрирования в которой находятся из уравнения луча для среды с квадратичной зависимостью диэлектрической проницаемости [4] для двух случаев:

1) если луч монотонный –

$$Z = Z_R + \int_{X_1}^{X_2} \frac{adx}{\sqrt{n_0^2 - c_2x^2 - a^2}} = Z_R + \frac{a}{\sqrt{c_2}} \left(\arcsin \frac{X_2}{p} - \arcsin \frac{X_1}{p} \right),$$

2) если луч имеет максимум –

$$Z = Z_R + \frac{a}{\sqrt{c_2}} \left(\pi - \arcsin \frac{X_2}{p} - \arcsin \frac{X_1}{p} \right).$$

Координаты точки пересечения луча (Z_2, X_2) с поверхностью находятся из системы двух уравнений, одно из которых – приведенное уравнение луча, а второе – уравнение образующей поверхности линзы $Z = \Psi(X)$.

Координата z для смещенного на $\delta_x = 0.2$ источника на фокальной кривой, вычисленная по формуле (7), равна $\delta_z = 0.01486$, а на оптимальной фокальной кривой, найденной путем минимизации aberrации – $\delta_z = 0.02686$. Зависимости величины aberrации эйконала от координаты точки на выходной поверхности линзы приведены на рис. 6а для фокальной кривой (7) и на рис. 6б для оптимальной фокальной кривой.

Следует отметить, что кривые на рис. 6а имеют значительные квадратичные составляющие. Это объясняется приближенным характером фокальной кривой, определенной формулой (7). Как видно из рис. 6б, оставшиеся квадратичные составляющие сопоставимы с составляющими более высоких

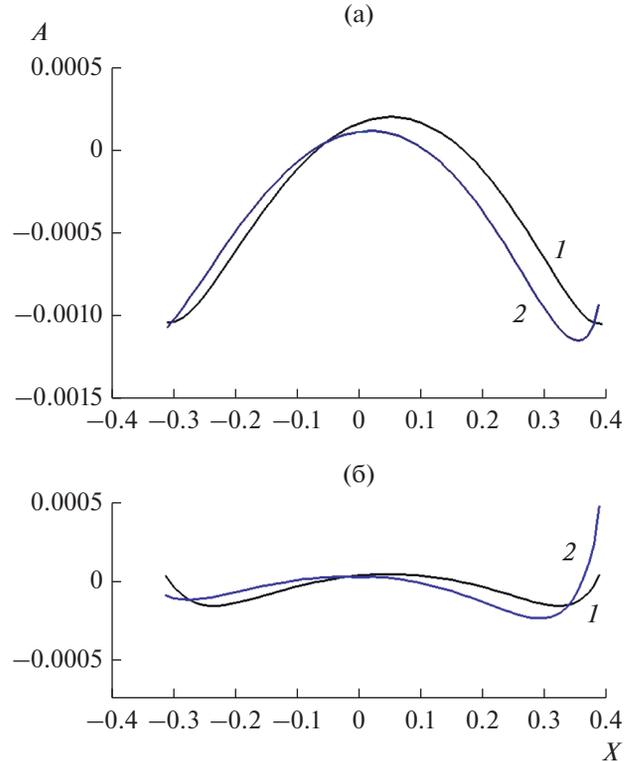


Рис. 6. Aberrации эйконала для приближенной (а) и оптимальной (б) фокальных кривых: 1 – точный расчет, 2 – расчет по формуле (1).

четных степеней. Нечетные степени практически отсутствуют из-за апланатизма системы.

Введем величину среднеквадратической aberrации (СА) по формуле

$$S_A = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Phi(X_i) + |BO_3| - \Phi_0)^2},$$

где $N = 100$ – число лучей, прошедших через апертуру линзы от источника на фокальной кривой. Когда эйконал $\Phi(X)$ вычисляется по формуле (1), то $S_A = 0.9 \times 10^{-4}$, а когда эйконал $\Phi(X)$ вычисляется методом геометрической оптики, то $S_A = 0.87 \times 10^{-4}$. Разность этих значений составляет 3×10^{-6} и определяет в данном случае погрешность вычисления СА эйконала с использованием формулы (1). Сравнивая эту разность с погрешностью вычисления эйконала (см. рис. 4б, кривая 2), можно убедиться, что последняя из них почти на три порядка больше.

Используя результаты работы [8], можно найти разложения поверхностей апланатической линзы с квадратичным законом изменения диэлектрической проницаемости $n^2(x) = n_0^2 - c_2x^2$:

$$f(x) = f_0 + f_2x^2 + f_4x^4, \tag{10}$$

$$\Psi(x) = f_0 + d_0 + \psi_2x^2 + \psi_4x^4, \tag{11}$$

где $f_0 = \rho_0$,

$$f_2 = \frac{1}{2(n_0 - 1)} \left(\frac{1}{f_0} - \frac{c}{\sin J} (\beta - \cos J) \right),$$

$$f_4 = \frac{B_{R1}}{4(n_0 - 1)T_q c A_1^2 g_1} - \frac{(4f_0 f_2 + 1)}{8(n_0 - 1)f_0^3},$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{2(n_0 - 1)} \sqrt{(c_2 + g_2)/\beta_2 - c_2},$$

$$\Psi_4 = \frac{B_{R2}}{16\Phi_2(n_0 - 1)^2}, \quad \beta = \frac{f_e}{f_0}, \quad \beta_2 = \beta^2,$$

$$c = \sqrt{c_2}, \quad B_{R1} = Dc_4 - \frac{c}{2n_0^2} S_1 + \frac{d_0 c}{2n_0^3} +$$

$$+ \frac{J'}{2n_0} - \frac{c\beta_4 A_1 \beta}{2S_q}, \quad J' = -\frac{1}{2} c g_2' A_1 T_q,$$

$$S_1 = 2A_1 n_0 (f_2 - \beta_2 \Phi_2), \quad g_1 = 2f_2 (n_0 - 1) - \frac{1}{f_0},$$

$$g_2 = g_1^2, \quad c_4 = 0, \quad J = \frac{d_0 c}{n_0},$$

$$g_2' = 8f_2^2 (n_0 - 1) - 4f_2 / f_0,$$

$$\beta_4 = f_e^2 (1 + 2f_0 f_2) / f_0^4,$$

$$S_q = \sqrt{g_2 + c_2 (1 - \beta_2)}, \quad T_q = \frac{\beta}{S_q} - \frac{1}{|g_1|},$$

$$A_1 = \frac{1}{c_2 + g_2}, \quad A_2 = \beta_2 A_1,$$

$$D = \frac{3J}{4c_2^2} - \frac{1}{4c_2} (K_2 - K_1) + \frac{1}{2} c T_q \left(A_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \right),$$

$$K_i = \sqrt{A_i (c_2^{-1} - A_i)}, \quad i = 1, 2,$$

$$g_3 = 4f_4 (n_0 - 1) + \frac{1}{2f_0^3} (4f_0 f_2 + 1),$$

$$g_4 = 2g_1 g_3, \quad B_1 = -\frac{(c_4 + g_4)}{(c_2 + g_2)^3},$$

$$B_2 = \beta_2 B_1 - \beta_4 A_1^2, \quad h_1 = 2\Psi_2 (n_0 - 1),$$

$$h_2 = h_1^2, \quad h_2' = 8\Psi_2^2 (n_0 - 1),$$

$$E_2 = \frac{1}{c_2 + h_2}, \quad E_2' = -E_2^2 h_2',$$

$$A_2' = -\beta_2 A_1^2 g_2' = -\beta_2 A_1^2 g_2',$$

$$B_{R2} = \frac{A_2' - E_2' - 2n_0 B_2}{2n_0 E_2^3} - c_4.$$

Линза преобразует сферический фронт во фронт, близкий к плоскому, и при этом приближенно выполняется условие апланатизма: $X = f_e \sin \alpha$, где α – угол выхода луча из источника, а X – коор-

дината точки выхода луча из линзы. Для более точного синтеза поверхностей линзы используем следующий алгоритм. Представим первую поверхность полиномом 8-й степени:

$$f(x) = f_0 + f_2 x^2 + f_4 x^4 + f_6 x^6 + f_8 x^8, \quad (12)$$

где $f_6 = f_8 = 0$ (f_2, f_4 определены выше). На первом этапе алгоритма рассмотрим лучи, падающие на левую поверхность, заданную формулой (12). Из закона преломления можно найти угол преломленного луча:

$$\xi = \arcsin \left(\frac{\sin \omega}{n(x_p)} \right) - \omega + \alpha,$$

где ω – угол между лучом и нормалью в точке x_p определяется соотношением $\omega = \arctg[f'(x_p)] + \alpha$. Траектория преломленного луча $x(z)$ в среде описывается уравнением Эйлера [14]:

$$\frac{x''}{1 + x'^2} + \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} x' - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

В силу того, что n не зависит от z , т.е. $\frac{\partial n}{\partial z} = 0$, это уравнение упрощается:

$$\frac{x''}{1 + x'^2} - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

Запишем начальные условия для интегрирования дифференциального уравнения второго порядка: $x(z_p) = x_p$, $x'(z_p) = \text{tg} \xi$. Уравнение (13) решается методом Рунге–Кутты до точки $B(X, Z)$, на которой выполняется условие равенства эйконала луча эйконалу центрального луча:

$$|OP| + \int_{PB} n ds + f_0 + d_0 - Z = f_0 + n_0 d_0,$$

где интеграл вычисляется вдоль траектории луча. То есть для каждой точки P на левой поверхности по приведенному алгоритму находится точка B на правой поверхности, которая обеспечивает идеальную фокусировку. Таким образом, массиву точек на левой поверхности соответствует массив точек правой поверхности. Для интерполяции поверхности между точками массива используется кубический сплайн.

Приведенная процедура исправляет ошибку фокусировки. Для уточнения условия апланатизма при нахождении точек на правой поверхности введем сумму:

$$\sigma = \frac{1}{N_p} \sum_P |X - f_e \sin \alpha|, \quad (14)$$

где α – угол выхода луча из источника, X – координата точки выхода луча из линзы, суммирование идет по всем N_p точкам. Далее минимизируем

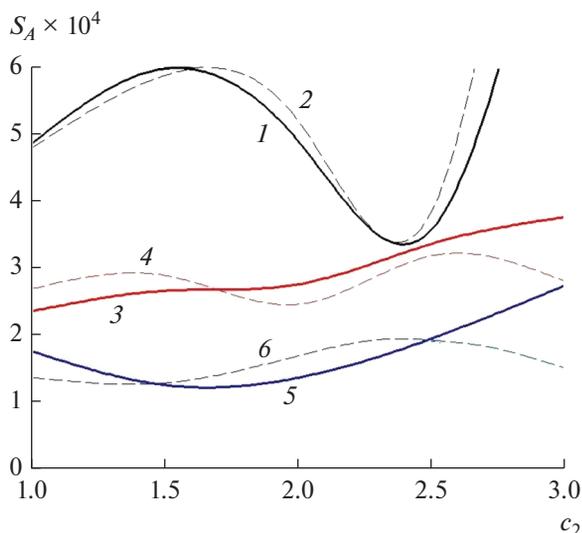


Рис. 7. Точные и приближенные среднеквадратические абберации эйконала при $f_e = 1.1$ (1, 2), $f_e = 1.2$ (3, 4), $f_e = 1.35$ (5, 6), рассчитанные по формуле (5) (кривые 1, 3, 5) и с использованием геометрической оптики (2, 4, 6).

величину σ , варьируя коэффициенты f_2, f_4, f_6, f_8 . В результате проведенной процедуры было получено значение $\sigma = 2 \times 10^{-4}$.

При смещении источника из фокуса градиентной линзовой антенны происходят искажения эйконала, которые можно охарактеризовать введенной выше величиной СА. В случае бесконечно удаленного фокуса эта величина описывает отклонение фронта от плоского и выражается формулой

$$S_A(\theta) = \min_{\delta_x, \delta_z} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Phi(X_i) - \Phi_0 - X_i \sin \theta - Z_i \cos \theta)^2},$$

где X_i, Z_i — координаты точки луча на выходной апертуре линзы, $\Phi(X_i)$ — величина эйконала в этих точках, $N = 100$ — число рассмотренных лучей.

Для линз с параметрами $f_0 = 1, d_0 = 0.5, n_0 = 1.6$ была найдена зависимость СА от c_2 (коэффициенты разложения $n^2(x) = n_0^2 - c_2 x^2$) при переменной f_e (фокальный параметр) и угле наклона луча 15 град. Результаты приведены на рис. 7: кривые 1, 2 соответствуют линзе с фокальным радиусом $f_e = 1.1$, кривые 3, 4 соответствуют линзе с $f_e = 1.2$, кривые 5, 6 — с $f_e = 1.35$. Штриховые кривые соответствуют СА, рассчитанным с использованием геометрической оптики, сплошные кривые — с использованием приближенной формулы (5). Как показали расчеты, значения

фокального радиуса большие чем 1.35, не приводят к уменьшению СА. Видно, что для фиксированного фокального радиуса и значений $c_2 < 2.5$ разность СА, вычисленной по формуле (5) и точной СА, не превосходит 0.3×10^{-4} , а при $2.5 < c_2 < 3$ эта разность возрастает до 10^{-4} .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- полученная приближенная формула для эйконала (13) не требует вычисления траекторий лучей в градиентной среде и определяется степенным рядом 2-й степени по смещению источника δ_x ;
- на основе полученной формулы выведены приближенные уравнения фокальных кривых;
- показана возможность использования приближенной формулы для вычисления аббераций в градиентных цилиндрических линзах и оптимизации их параметров.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вуд Р. Физическая оптика / Пер. с англ. под ред. Д.С. Рождественского. Л.; М.: ОНТИ, 1936.
2. Marchand E.W. Gradient Index Optics. N.-Y.; San Francisco; London: Acad. Press, Inc., 1978.
3. Микаэлян А.Л. // ДАН СССР. 1951. Т. 81. № 4. С. 569.
4. Зелкин Е.Г., Петрова Р.А. Линзовые антенны. М.: Сов. радио, 1974.
5. Калошин В.А. // ДАН. 2016. Т. 470. № 2. С. 153.
6. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 1991. Т. 36. № 12. С. 2301.
7. Венецкий А.С., Калошин В.А. // ДАН. 1994. Т. 335. № 1. С. 39.
8. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 1997. Т. 42. № 12. С. 1452.
9. Венецкий А.С., Калошин В.А. // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. № 7. С. 74.
10. Венецкий А.С., Калошин В.А. // ДАН. 2015. Т. 463. № 5. С. 533.
11. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 6. С. 533.
12. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2018. Т. 63. № 2. С. 144.
13. Венецкий А.С. // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug18/7/text.pdf>.
14. Микаэлян А.Л. Оптические методы в информатике. М.: Наука, 1990.