

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

УДК 517.54:517.385:530.145

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О СТРУКТУРЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ПРИ ПАДЕНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ
НА ПОЛУПРОЗРАЧНЫЙ НЕОДНОРОДНЫЙ
ПЛАЗМЕННЫЙ СЛОЙ (МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА)**

© 2021 г. Е. А. Палкин^{а, *}, А. А. Петрович^б

^аРоссийский новый университет,
ул. Радио, 22, Москва, 105005 Российская Федерация

^бМосковский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Институтский пер., 9, Долгопрудный Московской обл., 141701 Российская Федерация

*E-mail: palkin@rosnou.ru

Поступила в редакцию 09.07.2020 г.

После доработки 09.07.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

Рассмотрены различные асимптотические представления точного решения задачи о наклонном падении плоской волны на плазменный слой конечной толщины с параболическим профилем электронной плотности. Большим параметром асимптотик является отношение толщины слоя к длине волны. Проанализированы три случая: отражающего в геометрооптическом (ГО) приближении слоя, прозрачного в ГО-приближении слоя и критического слоя. Показано, что в значимой окрестности критического значения параметров слоя (для заданных характеристик падающей волны) существенным является эффект полупрозрачности, для адекватного учета которого и предложены корректные асимптотики. Представлены результаты численного моделирования структуры волнового поля в условиях значимого эффекта полупрозрачности и проведено их сравнение с ГО-решением.

DOI: 10.31857/S0033849421010071

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Волновые эффекты, связанные с формированием в полупрозрачных неоднородных плазменных слоях отраженных и прошедших через слой волн, наиболее просто исследовать в рамках модельной задачи о падении плоской волны на плоскостроистую неоднородную плазму с параболическим профилем распределения электронной плотности. Поэтому рассмотрим параметрическую модель неоднородного по координате x плазменного слоя, квадрат показателя преломления которого задан формулой

$$n^2(x) = 1 - \beta^2(a^2 - x^2) \quad x \in [-a, +a]. \quad (1)$$

Вне слоя будем считать, что $n^2(x) = 1$. В соотношении (1) $2a$ толщина слоя, β – “плотность” слоя, положительная величина равная отношению плазменной частоты в максимуме электронной плотности слоя к частоте падающего монохроматического излучения, деленная на полутолщину слоя.

Такая модель позволяет провести анализ формирования структуры волнового поля в области значимых параметров, соответствующих значимому эффекту полупрозрачности.

Реальные ионосферные плазменные слои имеют более сложную структуру, однако в области максимума электронной плотности, где эффект полупрозрачности наиболее существенен, данная модель является достаточной для оценки величины эффекта.

Модель параболического плазменного слоя неоднократно использовалась при исследовании основных эффектов при отражении электромагнитных волн от ионосферной плазмы (см., например, [1] и цитируемую там литературу). Кроме того, данная модель используется в квазиклассическом подходе к описанию эффектов подбарьерного туннелирования и надбарьерного отражения в квантовомеханических задачах (см., например, [2]). Однако в большинстве случаев рассмотрение носит качественный или оценочный характер в предположении почти полностью отражающего или почти прозрачного слоя.

В данной работе мы рассмотрим существенно значимые волновые эффекты, имеющие место именно в переходной области параметров, когда эффекты отражения и прохождения через слой соизмеримы. Такой плазменный слой мы далее будем называть полупрозрачным. Заметим, что

именно при условии полупрозрачности нижнего ионосферного слоя происходит дифракционное возбуждение межслоевых волноводных ионосферных каналов. Исследование количественных соотношений для формирующихся отраженной слоем и прошедшей через слой волн имеет большое значение для корректного учета возникающих явлений. Основным математическим методом для решения данной задачи служит построение равномерных и неравномерных асимптотических представлений точного решения. Параметром асимптотических разложений (большим параметром) является отношение толщины слоя к длине волны в свободном пространстве.

2. АСИМПТОТИКИ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим падение плоской монохроматической волны, направленной под углом θ , снизу на неоднородный слой плазмы (1) (рис. 1). Учитывая однородность задачи по оси y , представим решение соответствующего уравнения (уравнения Гельмгольца) в виде

$$\psi(x, y) = \psi_x(x) \exp(iky \sin \theta), \quad (2)$$

где функция $\psi_x(x)$ является решением уравнения внутри слоя –

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_x(x) + k^2(\cos^2 \theta - \beta^2(a^2 - x^2)) \psi_x(x) = 0; \quad (3)$$

$$x \in [-a, +a],$$

а вне слоя –

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_x(x) + k^2 \cos^2 \theta \psi_x(x) = 0; \quad x \notin [-a, +a];$$

$$ka \gg 1.$$

В качестве нормировочного условия рассматриваем падение плоской волны единичной амплитуды из области $x \leq -a$

$$\psi(x, y) = \exp\{ik[(x+a) \cos \theta + y \sin \theta]\} \quad (4)$$

и отсутствие волны, падающей на слой сверху, из области $x \geq a$.

Общее решение задачи (3) для комплексной амплитуды $\psi_x(x)$ представляется через функции параболического цилиндра (функции Вебера–Эрмита [3], обозначенные далее как $D_{\nu, k}^{\pm}(X)$) в виде суперпозиции двух линейно независимых функций [4, 5]:

$$\psi_x(x) = \exp\left(\frac{i}{2} kx^2 \beta\right) \times$$

$$\times \{C_+ D_{\nu, k}^+(X(x)) + C_- D_{\nu, k}^-(X(x))\}. \quad (5)$$

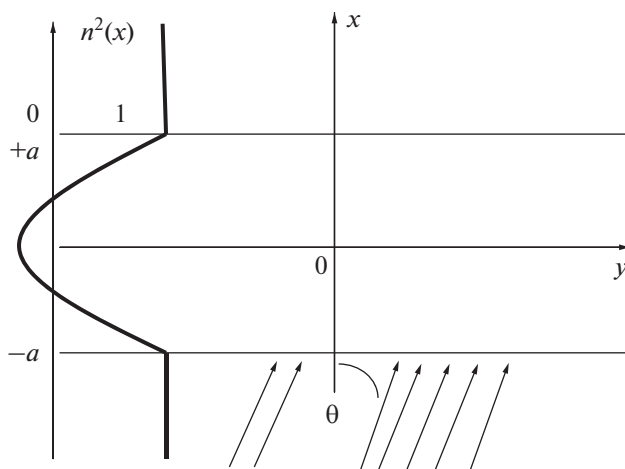


Рис. 1. Геометрия эталонной задачи.

Здесь и далее используются следующие обозначения [5]:

$$X = 2x\beta^{1/2}, \quad \nu = \left(\frac{\beta^2 a^2 - \cos^2 \theta}{2\beta}\right), \quad (6)$$

$$\Gamma = -k\pi\nu, \quad \text{и при } \nu > 0, \quad x_0 = \frac{\sqrt{2\nu}}{\beta^{1/2}},$$

$$D_{\nu, k}^{\pm}(X) = \int_{\gamma^{\pm}} \exp\{ik(t^2 + tX + \nu \ln t)\} t^{-1/2} dt. \quad (7)$$

В соотношении (7) контур γ^{\pm} определен так, что интеграл сходится при любых (конечных) комплекснозначных X и ν : начинается в третьем квадранте комплексной плоскости переменной t и уходит на бесконечность в первом квадранте, огибая сверху (контур γ^+), или снизу (контур γ^-) точку “0” (рис. 2). Для выделения регулярной ветви логарифмической функции и функции квадратного корня в плоскости переменной t введен разрез от точки “0”, не затрагивающий контур γ^{\pm} , а именно: вдоль отрицательной полуоси $\{\text{Im } t \leq 0, \text{Re } t = 0\}$ для контура γ^+ ; или вдоль положительной полуоси $\{\text{Im } t \geq 0, \text{Re } t = 0\}$ для контура γ^- . Выбор контура γ^{\pm} (контур γ^+ , или контур γ^-) определяет особенности интеграла (6), значимые для построения асимптотических разложений решения (5) [6].

Анализ решения (5) начнем с определения коэффициентов C_+ и C_- . Для этого в областях $-a + \varepsilon > x \geq -a$ и $+a - \varepsilon < x \leq +a$ (здесь $\varepsilon > 0$ – параметр, задающий некоторую окрестность границ слоя) рассмотрим асимптотики функций $D_{\nu, k}^{\pm}(X)$, главный член которых представляет решение (5) в виде квазиплоских волн, идущих к не-

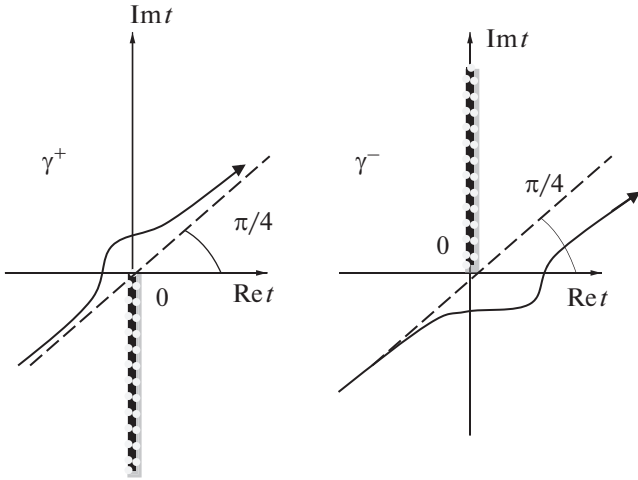


Рис. 2. Контурсы интегрирования γ^\pm для определения функций $D_{k,v}^\pm(X)$.

однородному слою или от него. При этом структура асимптотических разложений существенно зависит от значения параметра v . Для $v > 0$ имеет место решение, соответствующее “отражающему” (в ГО-приближении) слою, для $v < 0$ – “прозрачному” (в ГО-приближении) слою, а для $v = 0$ – “полупрозрачному” слою, разделяющему падающую волну на две, отраженную и прошедшую, с равными амплитудами.

Следуя работам [4, 5] и используя результаты работы [6], получим следующую последовательность математических соотношений.

1. Для “отражающего” слоя ($v > 0$) имеет место асимптотическое разложение типа Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) (или ГО-асимптотика):

а) в области $-a \leq x < -x_0 < 0$,

$$D_{v,k}^+(X(x)) \cong k^{-1/2} [\exp(i\Theta_1)l_1 + \exp(i\Theta_2)l_2], \quad (8)$$

где

$$\Theta_{1,2} = k \left\{ \frac{\beta}{2} \left(-x^2 \mp |x| \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} \right) + v \left[\ln \left(\frac{\beta^{1/2}}{2} \left(|x| \pm \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} \right) \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \quad (9)$$

$$l_{1,2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta^{1/4} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta} \right)^{1/4}} \exp\left(\pm i \frac{\pi}{4}\right), \quad (10)$$

а значит, при $x = -a$

$$\Theta_{1,2} = k \left\{ \frac{a}{2} (-\beta a \mp \cos \theta) + v \left[\ln \left(\frac{1}{2\beta^{1/2}} (\beta a \pm \cos \theta) \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \quad (11)$$

$$l_{1,2} = \frac{\sqrt{\pi}\beta^{1/4}}{\sqrt{\cos \theta}} \exp\left(\pm i \frac{\pi}{4}\right). \quad (12)$$

В формулах (9)–(12) верхний знак комбинаций \pm, \mp соответствует индексу “1”, нижний – индексу “2”, а сами индексы означают: “1” – ВКБ-компонента асимптотики функции $D_{v,k}^+(X(x))$, связанной с падающей на слой волной, а “2” – ВКБ-компонента отраженной слоем волны.

Для амплитудных множителей $l_{1,2}$ (формулы (10) и (12)) здесь и далее приводятся только главные члены асимптотического ряда по $(ka)^{-1}$.

б) В области $+a \geq x > x_0 > 0$

$$D_{v,k}^+(X(x)) \cong k^{-1/2} \exp(i\Theta_1 + \Gamma)l_1, \quad (13)$$

где

$$\Theta_1 = k \left\{ \frac{\beta}{2} \left(-x^2 - x \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} \right) + v \left[\ln \left(\frac{\beta^{1/2}}{2} \left(x + \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} \right) \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \quad (14)$$

$$l_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta^{1/4} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta} \right)^{1/4}} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right), \quad (15)$$

а значит, при $x = +a$

$$\Theta_1 = k \left\{ \frac{a}{2} (-\beta a - \cos \theta) + v \left[\ln \left(\frac{1}{2\beta^{1/2}} (\beta a + \cos \theta) \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \quad (16)$$

$$l_1 = \frac{\sqrt{\pi}\beta^{1/4}}{\sqrt{\cos \theta}} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right). \quad (17)$$

При этом ВКБ-асимптотика (13) относится к компоненте волны, падающей на слой сверху.

Используя теперь функциональное соотношение, следующее из определения (7):

$$D_{v,k}^-(X) = D_{v,k}^+(-X) \exp\left(i \frac{\pi}{2} - \Gamma\right), \quad (18)$$

из которого вытекают аналогичные соотношения и для асимптотических разложений функций $D_{v,k}^\pm(X)$, и выделяя согласно (8) и (13) в асимптотике представления (5) члены, соответствующие

волнам, бегущим к слою и от слоя, получим из граничных условий (4) искомую нормировку:

$$C_+ \cong k^{1/2} \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{\pi} \beta^{1/4}} \frac{1}{(1 + \exp(2\Gamma))} \exp\left(i\Phi_0 - i\frac{\pi}{4}\right), \quad (19)$$

$$\Phi_0 = k \left\{ \frac{a \cos \theta}{2} - v \left[\ln \left(\frac{a\beta + \cos \theta}{2\beta^{1/2}} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \quad (20)$$

$$C_- = C_+ \exp(2\Gamma). \quad (21)$$

В частности, для отраженной (отр) слоем и прошедшей (прош) слои волн, представленных в форме ВКБ-асимптотики (квазиплоские волны)

$$\psi(x, y) = A(x) \exp(i\Phi(x) + ik y \sin \theta), \quad (22)$$

в рассматриваемых областях неоднородного слоя получаем

$$\Phi_{\text{отр}}(x) = k \left\{ \frac{a \cos \theta}{2} + \frac{|x|\beta}{2} \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} + v \ln \left[\frac{|x| - \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}}}{a + \frac{\cos \theta}{\beta}} \right] \right\}, \quad (23)$$

$$A_{\text{отр}} \cong \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\beta^{1/2} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta}\right)^{1/4}} \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)}{(1 + \exp(2\Gamma))} \quad (24)$$

и

$$\Phi_{\text{прош}}(x) = k \left\{ \frac{a \cos \theta}{2} + \frac{x\beta}{2} \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} + v \ln \left[\frac{x - \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}}}{a + \frac{\cos \theta}{\beta}} \right] \right\}, \quad (25)$$

$$A_{\text{прош}} \cong \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\beta^{1/2} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta}\right)^{1/4}} \frac{\exp(\Gamma)}{(1 + \exp(2\Gamma))}. \quad (26)$$

Из (23)–(26) при $x = -a$ и $x = +a$ следуют формулы для комплексных коэффициентов отражения и прохождения для условия $v > 0$ (см. также [5]):

$$R_{v>0} = \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)}{(1 + \exp(2\Gamma))} \times \exp \left\{ ik \left[a \cos \theta + v \ln \left(\frac{a\beta - \cos \theta}{a\beta + \cos \theta} \right) \right] \right\}, \quad (27)$$

$$T_{v>0} = \frac{\exp(\Gamma)}{(1 + \exp(2\Gamma))} \times \exp \left\{ ik \left[a \cos \theta + v \ln \left(\frac{a\beta - \cos \theta}{a\beta + \cos \theta} \right) \right] \right\}. \quad (28)$$

Отметим также, что падающая (пад) на слой волна, заданная в ВКБ форме (22) в области $-a \leq x < -x_0 < 0$, имеет следующие представления для фазовой и амплитудной функций:

$$\Phi_{\text{пад}}(x) = k \left\{ \frac{a \cos \theta}{2} - \frac{|x|\beta}{2} \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} + v \ln \left[\frac{|x| + \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}}}{a + \frac{\cos \theta}{\beta}} \right] \right\}, \quad (29)$$

$$A_{\text{пад}} \cong \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\beta^{1/2} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta}\right)^{1/4}}. \quad (30)$$

2. Для модели “прозрачного” слоя ($v < 0$) последовательность соответствующих математических соотношений такова:

а) в области $-a \leq x < 0$

$$D_{v,k}^+(X(x)) \cong k^{-1/2} [\exp(i\Theta_1)l_1 + \exp(i\Theta_2 + \Gamma)l_2], \quad (31)$$

где величины l_1 и l_2 представлены формулой (10), величина Θ_1 – формулой (9), а величина Θ_2 отличается от соответствующего выражения в (9) только изменением знака в выражении под логарифмом:

$$\Theta_2 = k \left\{ \frac{\beta}{2} \left(-x^2 - |x| \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} \right) + v \ln \left[\frac{\beta^{1/2} \left(\sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} - |x| \right)}{2} \right] - \frac{1}{2} \right\}. \quad (32)$$

Как и в случае “отражающего” слоя, индекс “1” – отвечает ВКБ-компоненте асимптотики (31) функции $D_{v,k}^+(X(x))$, связанной с падающей на слой волной, а “2” – ВКБ-компоненте отраженной “прозрачным” слоем волны. Особенности ВКБ асимптотических представлений в данном случае имеют место в окрестности точки $x = 0$, т.е. в области максимума слоя, который представляет “границу раздела” областей применимости различных асимптотик ВКБ типа для функции $D_{v,k}^+(X(x))$. Для “отражающего” слоя, как это видно из формул (9), (10), (14), (15), (23)–(26), (29), (30) такой границей служит критический уровень $x = \pm x_0$.

б) В области $+a \geq x > 0$ справедлива асимптотика (13) с учетом того факта, что теперь $\Gamma > 0$.

Для величин l_1 и Θ_1 справедливы формулы (14) и (15). При этом, как и в предыдущем случае, ВКБ-асимптотика (13) относится к компоненте волны, падающей на слой сверху.

Формулы (19)–(21) определяют регулярные по v выражения для коэффициентов C_+ и C_- решения (5), поэтому они могут использоваться и для $v < 0$, и для $v = 0$. В частности, нетрудно показать, что используя функциональное соотношение (18) и выделяя на уровне $x = -a$ компоненты асимптотических представлений решения (5), отвечающие падающей снизу на слой волне единичной амплитуды, а на уровне $x = +a$ компоненты падающей сверху на слой волне (нулевой амплитуды), вновь получаем нормировку (19)–(21).

В отличие от коэффициентов C_+ и C_- , ВКБ-асимптотики точного решения (5) не являются равномерными по v . Поэтому продолжить формулы (23)–(28) для асимптотики вида (22) из области $v > 0$ в область $v < 0$ нельзя. В этой области значений параметра v , используя разложения (31) и (13) для функций $D_{v,k}^\pm(X(x))$, получим:

а) для $-a \leq x < 0$

$$\Phi_{\text{отр}}(x) = k \left\{ \frac{a \cos \theta}{2} + \frac{|x|\beta}{2} \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} + \right. \\ \left. + v \ln \left[\frac{\sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} - |x|}{a + \frac{\cos \theta}{\beta}} \right] \right\}, \quad (33)$$

$$A_{\text{отр}} \cong \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\beta^{1/2} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta}\right)^{1/4}} \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{2} + \Gamma\right)}{(1 + \exp(2\Gamma))}, \quad (34)$$

б) для $0 < x \leq +a$ также $\Phi_{\text{прош}}(x)$ задается формулой (25), а

$$A_{\text{прош}} \cong \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\beta^{1/2} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta}\right)^{1/4}} \frac{\exp(2\Gamma)}{(1 + \exp(2\Gamma))}. \quad (35)$$

Для падающей на слой волны вида (22) в области $-a \leq x < 0$ остаются справедливыми формулы (29), (30).

Из выражений (25), (33)–(35), определенных при $x = -a$ и $x = +a$ следуют формулы для ком-

плексных коэффициентов отражения и прохождения для случая $v < 0$ (см. также [5]):

$$R_{v<0} = \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{2} + \Gamma\right)}{(1 + \exp(2\Gamma))} \times \\ \times \exp\left\{ ik \left[a \cos \theta + v \ln \left(\frac{\cos \theta - a\beta}{\cos \theta + a\beta} \right) \right] \right\}, \quad (36)$$

$$T_{v<0} = \frac{1}{(1 + \exp(-2\Gamma))} \times \\ \times \exp\left\{ ik \left[a \cos \theta + v \ln \left(\frac{\cos \theta - a\beta}{\cos \theta + a\beta} \right) \right] \right\}. \quad (37)$$

3. Равномерное по v обобщение формул (22)–(28) и (33)–(37) строится на основе асимптотики точного решения с применением в асимптотическом разложении функций $D_{v,k}^\pm(X(x))$ интегральной функции Бемера–Френеля (или гамма-функции комплексного аргумента) [4, 6]. Такое асимптотическое представление позволяет связать (асимптотически) указанные формулы в области $v \sim 0$, поскольку данная асимптотика справедлива как для положительных, так и для отрицательных значений v , включая и значение $v = 0$. Следуя [6], используем следующее асимптотическое разложение функции $D_{v,k}^+(X(x))$:

а) в области $-a \leq x < 0$,

$$D_{v,k}^+(X(x)) \cong \\ \cong k^{-1/2} \left[\exp(i\Theta_1) l_1 + \exp(i\Theta_2) B^-(\lambda(v)) l_2 \right], \quad (38)$$

где Θ_1 и l_1 все также определяются формулами (9) и (10) и соответствующее слагаемое в (38) отвечает квазиплоской волне, падающей снизу на неоднородный слой, а второе слагаемое, содержащее интеграл Бемера–Френеля [3]

$$B^-(X) = \int_{\gamma^-} \exp\{i(-t + X \ln t)\} t^{-1/2} dt \quad (39)$$

(контур γ^- для знака “-” проходит, огибая точку “0” сверху, по нижней части комплексной плоскости переменной t с разрезом от точки “0” вдоль отрицательной части мнимой оси), представляет отраженную слою волну. При этом

$$\Theta_2 = k \left\{ \frac{\beta}{2} \left(-x^2 + |x| \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} \right) + \right. \\ \left. + v \left[\ln \left(\frac{\beta^{1/2}}{2kv} \left(|x| - \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} \right) \right) + \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (40)$$

и $\lambda = kv$,

$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\beta^{1/4} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta}\right)^{1/4}}. \quad (41)$$

Как и в предыдущих асимптотических разложениях, формулами (40) и (41) представлены главные члены асимптотики (38).

б) В области $+a \geq x > 0$ остается справедливой формула (13) с параметрами, определенными в (14) и (15).

Снова используя в (5) соотношение (18), а также найденные ранее константы C_+ и C_- (см. (19), (21)), для различных волновых компонент общего решения получим следующие формулы:

$$\Psi_{\text{отр/прош}}(x, y) = A_{\text{отр/прош}}(x) \times \exp(i\Phi_{\text{отр/прош}}(x)) B^-(kv) \exp(iky \sin \theta), \quad (42)$$

в области $-a \leq x < 0$

$$\Phi_{\text{отр}}(x) = k \left\{ \frac{a \cos \theta}{2} + \frac{|x|\beta}{2} \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} + v \ln \left[\frac{|x| - \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}}}{kv \left(a + \frac{\cos \theta}{\beta} \right)} + 1 \right] \right\}, \quad (43)$$

$$A_{\text{отр}} \cong \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{2\pi\beta}^{1/2} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta} \right)^{1/4} (1 + \exp(2\Gamma))} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right), \quad (44)$$

и в области $+a \geq x > 0$

$$\Phi_{\text{прош}}(x) = k \left\{ \frac{a \cos \theta}{2} + \frac{x\beta}{2} \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}} + v \ln \left[\frac{x - \sqrt{x^2 - \frac{2v}{\beta}}}{kv \left(a + \frac{\cos \theta}{\beta} \right)} + 1 \right] \right\}, \quad (45)$$

$$A_{\text{прош}} \cong \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{2\pi\beta}^{1/2} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta} \right)^{1/4} (1 + \exp(2\Gamma))} \exp\left(+i\frac{\pi}{4} + \Gamma\right). \quad (46)$$

Естественно, что для падающей на слой волны вида (22) в области $-a \leq x < 0$ остаются справедливыми формулы (29) и (30). Если вместо функции Бемера–Френеля использовать гамма-функ-

цию $\hat{\Gamma}$ комплексного аргумента, для которой справедливо соотношение

$$B^-(kv) = \hat{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + ikv\right) \times \exp\left(-i\frac{\pi}{4} - \frac{\Gamma}{2}\right) (1 + \exp(2\Gamma)), \quad (47)$$

то формула (42) примет вид

$$\Psi_{\text{отр/прош}}(x, y) = \tilde{A}_{\text{отр/прош}}(x) \times \exp(i\Phi_{\text{отр/прош}}(x)) \hat{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + ikv\right) \exp(iky \sin \theta), \quad (48)$$

где, соответственно, в области $-a \leq x < 0$

$$\tilde{A}_{\text{отр}} \cong \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{2\pi\beta}^{1/2} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta} \right)^{1/4}} \exp\left(-i\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\Gamma\right) \quad (49)$$

и в области $+a \geq x > 0$

$$\tilde{A}_{\text{прош}} \cong \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{2\pi\beta}^{1/2} \left(x^2 - \frac{2v}{\beta} \right)^{1/4}} \exp\left(\frac{1}{2}\Gamma\right). \quad (50)$$

Из (42)–(50) при $x = -a$ и $x = +a$ следуют формулы для комплексных коэффициентов отражения и прохождения для условия $v \sim 0$:

$$R_{v \sim 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1 + \exp(2\Gamma))} B^-(kv) \times \exp\left\{i\Phi_{\text{отр/прош}}(-a) - i\frac{\pi}{4}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + ikv\right) \exp\left\{i\Phi_{\text{отр/прош}}(-a) - i\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2}\right\}, \quad (51)$$

$$T_{v \sim 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1 + \exp(2\Gamma))} B^-(kv) \times \exp\left\{i\Phi_{\text{отр/прош}}(+a) + i\frac{\pi}{4} + \Gamma\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + ikv\right) \exp\left\{i\Phi_{\text{отр/прош}}(+a) + \frac{\Gamma}{2}\right\}, \quad (52)$$

где

$$\Phi_{\text{отр/прош}}(\pm a) = k \left\{ a \cos \theta + v \ln \left[\frac{2\beta}{k(a\beta + \cos \theta)^2} + 1 \right] \right\}. \quad (53)$$

Формулы (51), (52), без учета экспоненциального множителя единичной амплитуды с фазовой функцией (53), соответствуют результатам, полученным в [7, 8].

При $v = 0$ из (51) и (52) получим

$$R_{v=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{ika \cos \theta - i\frac{\pi}{2}\right\}, \quad (54)$$

$$T_{v=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\{ika \cos \theta\}. \quad (55)$$

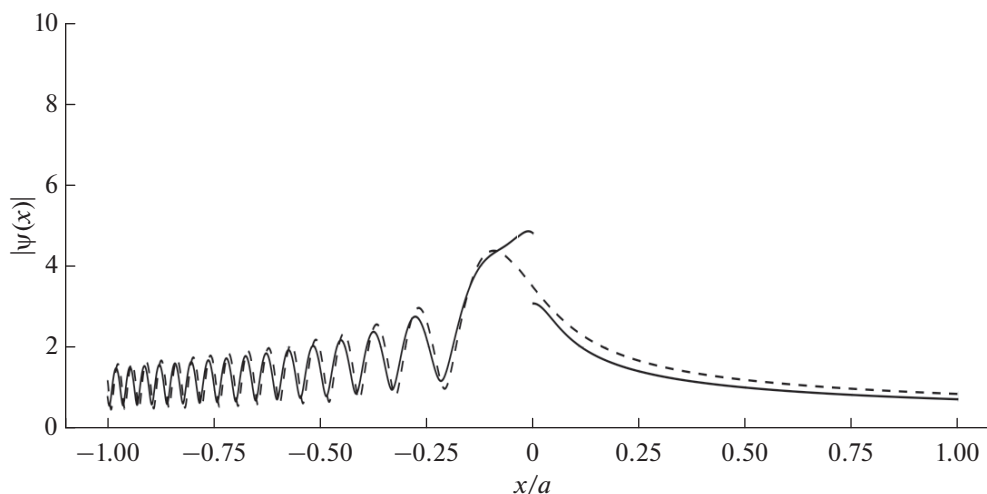


Рис. 3. Структура волнового поля при отражении от “прозрачного” слоя ($ka = 100$ и $\theta = 4^\circ$).

3. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотренные выше асимптотические представления решения задачи о падении плоской волны на параболический плазменный слой являются следствиями разложений точного решения (5). Вместе с тем, данная модель многократно исследовалась геометрическими методами (соответственно методами ВКБ). Естественен вопрос: насколько полученные выражения совпадают с формулами ГО? Прямой расчет лучевых траекторий, амплитудных и фазовых характеристик квазиплоских волн, вычисленных на основе лучевых построений, и сравнение различных видов асимптотических разложений с точным решением позволяют сделать следующие выводы.

1. В главном члене асимптотических представлений в области применимости формул ГО фазовые функции, определенные через асимптотические разложения точного решения (формулы (23), (25) и (29)), совпадают с результатами прямого расчета эйконала квазиплоских волн.

2. Амплитудные множители, полученные методом ГО, будут совпадать с амплитудными членами (24), (26), (30), (34) и (35) в форме (22), если учесть факторы, выделенные в указанных формулах как дополнительные множители (коэффициенты отражения и прохождения соответствующих волн), в том числе и для “прозрачного” слоя. В последнем случае в качестве уровня отражения лучевых траекторий следует брать уровень $x = 0$, вводить для этого эффективного отражения дополнительный фазовый сдвиг $-\pi/2$, а само отражение рассчитывать, как зеркальное.

3. Формирование волны просачивания через “отражающий” слой можно трактовать как формирование лучевой конгруэнции и соответствующего поля с уровня, симметрично расположенного относительно уровня отражения волны, падающей снизу, т.е. при $x = x_0$. При этом фаза, рассчитанная вдоль падающего луча, переносится на луч волны просачивания без каких-либо дополнительных изменений.

4. Формулы ГО (в областях их применимости) можно использовать для расчета полей и в случае критических значений параметра $\nu \sim 0$. Для этого необходимо использовать равномерные по ν асимптотические представления для амплитудных множителей отраженной волны и волны просачивания (формулы (42), (48), (51), (52)).

На основе анализа различных асимптотических представлений решения модельной задачи и результатов расчета волнового поля внутри параболического неоднородного слоя с использованием этих асимптотик, представленных на рис. 3–5 соответственно для “прозрачного”, критического и “отражающего” слоя, можно утверждать, что наличие волны просачивания для “отражающего” слоя и волны частичного отражения для “прозрачного” слоя существенно меняет общепринятое в рамках ГО представление о характере волнового поля в задаче отражения волны от слоя конечной толщины. Так, отраженная “прозрачным” (в рамках ГО) слоем волна интерферирует с падающей на слой волной, формируя характерные осцилляции в области, где с позиции ГО имеется только поле падающей волны (см. рис. 3). В области каустической тени (за каустикой отраженных ГО лучей) для случая “отражающего” слоя, волна просачивания имеет не экспоненциальное ослабление, а

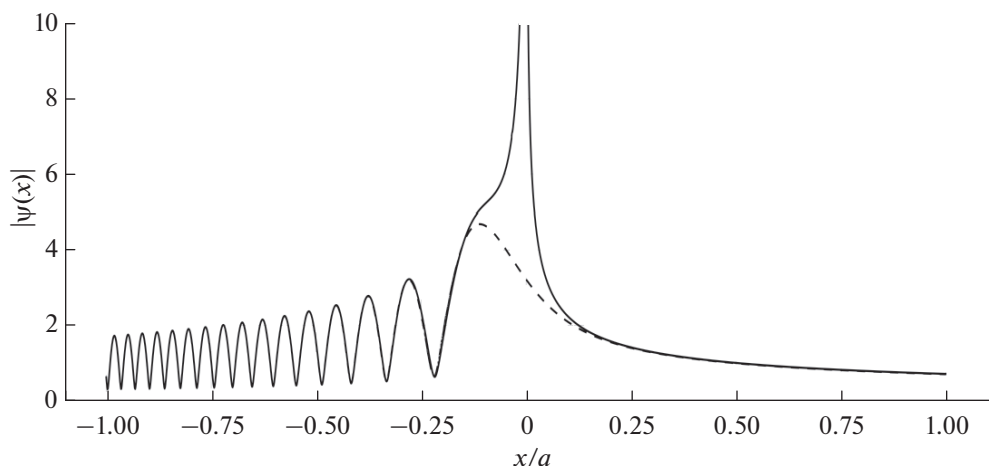


Рис. 4. Структура волнового поля при критическом отражении ($ka = 100$ и $\theta = 5^\circ$).

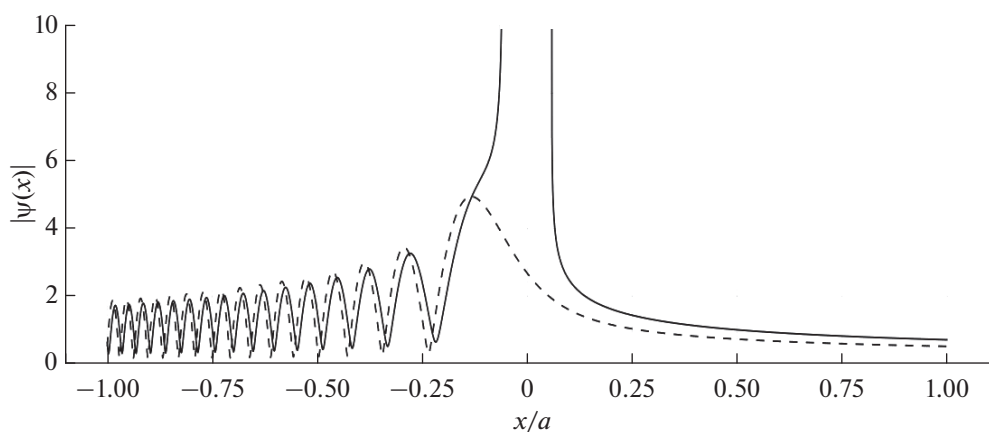


Рис. 5. Структура волнового поля при отражении от “отражающего” слоя ($ka = 100$ и $\theta = 6^\circ$).

ослабление чисто геометрооптического характера, связанное с расходимостью лучей, отвечающих волне просачивания (см. рис. 5). То есть в области, близкой к условиям критического отражения, “дифракционное затекание” волнового поля в область каустической тени существенно больше, чем это предсказывает ГО-приближение и его обобщение – волновая теория катастроф [9]. Оценка области углов падения волны на слой, где существенны указанные эффекты, дана в [8].

Отметим также, что при моделировании структуры поля в условиях, близких к критическому отражению, были применены как рассмотренные в работе неравномерные асимптотики для расчета амплитудных множителей квазиплоских волн (сплошные линии с разрывами на рис. 3–5), так и точное решение (5) непосредственно в области отражения, где эти приближения не работают (штриховые линии на рис. 3–5).

Как видно из приведенных графиков, даже при $ka = 100$ структура волнового поля хорошо воспроизводится асимптотическими формулами вплоть до критической области максимума слоя (порядка $X \sim \pm 0.25$ или $x \sim \pm 0.1\beta^{-1/2}$). Имеющее место смещение интерференционных максимумов и минимумов на рис. 3 и 5 для “прозрачного” и “отражающего” слоя соответственно, указывает на наличие систематических погрешностей в оценке фазовых соотношений для падающей и отраженной компонент волнового поля при использовании неравномерных по v асимптотических формул для коэффициентов отражения и прохождения (просачивания). Последнее может влиять на качество результатов моделирования фазовых и поляризационных характеристик волн, при прохождении и отражении их в неоднородных плазменных слоях. При использовании

равномерных асимптотических формул (51)–(53) (при построении рис. 4) такой эффект не наблюдается.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа подготовлена при поддержке Российского научного фонда (соглашение № 20-12-00299).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
3. *Oldham K.B., Myland J.C., Spanier J.* An Atlas of Functions. Springer, 2008.
4. *Палкин Е.А., Петрович А.А.* // Матер. VII Всерос. Армандовских чтений. Всерос. науч. конф. “Современные проблемы дистанционного зондирования, дифракции и распространения радиоволн”. Муром, 27–29 июня 2017. Муром: Изд-во Муромского института ВлГУ, 2017. С. 55.
5. *Палкин Е.А., Петрович А.А.* // Матер. II Всерос. науч. конф. “Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции”, Муром, 26–28 июня 2018 г. Муром: Изд-во Муром. ин-та ВлГУ, 2018. С. 54.
6. *Палкин Е.А., Петрович А.А.* // Вестн. Рос. нового ун-та. Сер. “Сложные системы: модели, анализ и управление”. 2018. Вып. 1. С. 18.
7. *Палкин Е.А., Петрович А.А.* // Матер. Всерос. науч. открытой конф. “Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн”, Муром, 28–30 мая 2019 г., Муром: Изд-во Муром. ин-та ВлГУ, 2019. С. 38.
8. *Палкин Е.А., Петрович А.А.* // Матер. XXVI Всерос. открытой науч. конф. “Распространение радиоволн” (РРВ-26). Казань, 1–6 июля 2019 г., Казань: Изд-во КазГУ, 2019. Т. 2. С. 430.
9. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 10. С. 1155.