

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 621.391.2

## ОПТИМАЛЬНЫЕ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВОС-СИГНАЛОВ В ПЕРСПЕКТИВНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

© 2021 г. М. С. Ярлыков\*

Редакция журнала “Радиотехника и электроника”,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 26.05.2020 г.

После доработки 26.05.2020 г.

Принята к публикации 15.06.2020 г.

На базе марковской теории оценивания случайных процессов методом поэтапного решения уравнения Стратоновича решена задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов, предназначенных для применения в глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай). Задача оптимальной нелинейной фильтрации решена применительно к векторному дискретно-непрерывному марковскому случайному процессу для случая, когда его непрерывная часть представляет собой векторный диффузионный марковский процесс, а дискретная часть характеризуется простой цепью Маркова на несколько положений. Принято, что полезные ВОС-сигналы наблюдаются на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Представлены основные аналитические соотношения оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов, а также соответствующая структурная схема квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов ГНСС. Результаты работы также применимы в случаях шумоподобных сигналов современных ГНСС, у которых ВОС-сигналы пока не используются.

DOI: 10.31857/S0033849421010101

### ВВЕДЕНИЕ

Меандровые шумоподобные сигналы (ШПС), называемые в англоязычной литературе ВОС-сигналами (binary offset carrier modulated signals), и их разновидности весьма привлекательны для применения в глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай) [1–4].

Первыми ВОС-сигналами, примененными на практике, были сигналы М-кода в системе GPS. В 2005 г. навигационный космический аппарат (НКА) Block-IIIR-14M (SVN-49) ГНСС GPS впервые начал передавать из космического пространства на Землю ВОС-сигналы М-кода с меандровой модуляцией типа ВОС(10, 5) [5–7].

К настоящему времени ВОС-сигналы и их разновидности (AltВОС-сигналы и СВOC-сигналы) (composite ВОС-сигналы) все более широко применяются в ГНСС GPS и ГНСС Galileo [4, 8–10]. В связи с этим важны исследования по созданию оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС.

При формировании алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС исходят из того, что принимаемый навигационной аппаратурой пользователей (НАП) полезный радиосигнал от  $j$ -го НКА ( $j = \overline{1, J}$ ) является нелинейной функцией от векторного дискретно-непрерывного процесса (ДНП) [1–4]. Векторный ДНП  $[X^T(t), \Theta_j(t)]^T$  (здесь и далее  $T$  – символ транспонирования) имеет непрерывную часть, образующую векторный диффузионный марковский случайный процесс  $X(t)$  (или его выборку), и дискретную часть в виде дискретного параметра  $\Theta_j(t)$ , который содержит навигационную служебную информацию (СИ) от  $j$ -го НКА,  $j = \overline{1, J}$  и представляет собой простую цепь Маркова на  $M$  положений. В принимаемом от  $j$ -го НКА ВОС-сигнале параметр  $\Theta_j(t)$  является манипулируемой фазой. В дальнейшем там, где это не вызывает сомнения, в обозначении дискретного параметра  $\Theta_j(t)$  и в соответствующих выкладках индекс  $j$  во избежание громоздкости не приводим.

Компоненты марковского случайного процесса  $X(t)$ , как правило, представляют собой запаздывание радиосигнала (содержащее информацию о пространственном положении НАП и ее динамике), его фазу, доплеровский сдвиг частоты и т.д.

Навигационные ВОС-сигналы в зависимости от относительного фазирования псевдослучайной последовательности (ПСП) дальномерного кода и меандрированного поднесущего колебания (МПК) разделяют на синусные ВОС-сигналы ( $\sin$ ВОС) и косинусные ВОС-сигналы ( $\cos$ ВОС) [4]. В работе ограничиваемся рассмотрением только  $\sin$ ВОС-сигналов, поэтому далее для краткости, как обычно, приставку “sin” опускаем.

Для определенности рассуждений далее всюду при конкретизации положений полагаем, что НАП установлена на высокочастотном подвижном объекте, в частности летательном аппарате (ЛА), таком как самолет, вертолет, беспилотный ЛА и т.д. Определение местоположения пользователя в НАП ГНСС основывается на псевдодальномерном беззапросном методе, при котором требуется одновременная видимость минимум четырех НКА [11, 12].

Для вычисления на основе измеренных псевдодальностей прямоугольных координат пользователя (в системе ПЗ-90 или WGS-84) в НАП необходимо, кроме того, иметь полученные с помощью СИ сведения об эфемериде, альманахе, поправках к бортовой шкале времени (ШВ) и т.д. для каждого НКА [11, 12].

Ставить и корректно решать задачи синтеза оптимальных (или близких к ним – квазиоптимальных) алгоритмов приема и обработки, векторных ДНП, как известно, дает возможность марковская теория оценивания (МТО) случайных процессов, созданная на базе математического аппарата условных марковских процессов [13–17].

Для конструктивного решения методами МТО задачи синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки радиосигналов (в частности, с целью возможности применения метода поэтапного решения уравнения Стратоновича) используется тот факт, что у навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов) время корреляции компонент вектора непрерывных параметров  $X(t)$  много больше длительности такта цепи Маркова дискретных параметров  $\Theta_j(t)$  ( $j = \overline{1, J}$ ) [4, 15]. По этой причине в пределах каждого тактового интервала принимаемого радиосигнала случайный процесс  $X(t)$  аппроксимируем соответствующим квазислучайным процессом [4, 15].

Решение задач синтеза алгоритмов приема и обработки векторных ДНП методами МТО, как известно, опирается на разложение совместной апостериорной плотности вероятности (АПВ) дискрет-

но-непрерывного вектора состояния (ВС) по одному из двух вариантов [14–17].

Первый вариант разложения совместной АПВ основан на представлении ее в виде произведения безусловной апостериорной вероятности (АВ) состояния дискретного процесса (ДП)  $\Theta_j(t)$  и условной АПВ непрерывного процесса (НП)  $X(t)$ . При втором варианте разложения совместной АПВ рассматривается условная АВ состояния ДП  $\Theta_j(t)$ , тогда как вектор НП  $X(t)$  характеризуется безусловной АПВ.

Синтезированные алгоритмы приема и обработки, которые основаны на первом варианте разложения совместной АПВ, носят название алгоритмов с переприсвоением значений параметров условных АПВ вектора НП  $X(t)$ , а те алгоритмы, в которых используется второе представление совместной АПВ, – алгоритмов с обратными связями по ДП  $\Theta_j(t)$  ( $j = \overline{1, J}$ ) [14–16].

Оба варианта разложения АПВ дискретно-непрерывного ВС в соответствии с теоремой Байеса эквивалентны. В то же время квазиоптимальные алгоритмы и соответствующие структурные схемы устройств для обработки радиосигналов, синтезированные указанными методами, естественно, отличаются заметными особенностями.

Отметим, что алгоритмы с обратной связью по ДП требуют, чтобы время корреляции компонент вектора НП  $X(t)$  было много больше длительности такта цепи Маркова, характеризующей ДП  $\Theta_j(t)$  ( $j = \overline{1, J}$ ). Тогда как алгоритмы с переприсвоением свободны от ограничения, накладываемого на скорость изменения компонент вектора НП  $X(t)$ . В то же время следует заметить, что в общем случае (при зависимых значениях ДП  $\Theta_j(t)$  на соседних тактах) алгоритмы с переприсвоением отличаются несколько большей громоздкостью (многоканальностью) структурной схемы приема и обработки радиосигналов [14–17].

Поскольку у навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов) время корреляции компонент вектора НП  $X(t)$  много больше длительности такта цепи Маркова ДП  $\Theta_j(t)$ , то далее в работе, решая задачу синтеза, используем при разложении совместной АПВ дискретно-непрерывного ВС  $[X^T(t), \Theta_j(t)]^T$  алгоритм с обратной связью по ДП  $\Theta_j(t)$ .

Цель работы – получить аналитические соотношения для оптимальных и квазиоптимальных оценок дискретно-непрерывного ВС  $[X^T(t), \Theta_j(t)]^T$  и ковариационной матрицы квазиоптимальных ошибок оценивания вектора НП  $X(t)$ , а также на этой основе разработать соответствующую структурную схему квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов перспективных ГНСС.

В иллюстрирующих примерах опираемся на sinBOC-сигналы с меандровой модуляцией типа BOC(1,1) на несущей частоте  $f_H = 1575.42$  МГц при базовой (опорной) частоте  $f_{OP} = 1.023$  МГц, которые характерны для E1OS сигналов ГНСС Galileo и для L1C сигналов ГНСС GPS применительно к спутникам нового поколения GPS III [4, 7, 8, 12]. Напомним, что первый спутник в серии GPS-III (GPS III SV01) был запущен 23 декабря 2018 г.

В данной работе везде каждый вектор понимается в виде вектора-столбца, а производная от скалярной функции по вектору-столбцу всюду понимается как вектор-строка.

## 1. ПРИНИМАЕМЫЙ ВОС-СИГНАЛ

Излучаемый бортовым передатчиком от  $j$ -го НКА ( $j = \overline{1, J}$ ) из состава спутниковой группировки ВОС-сигнал  $s_{ji}(t)$  характеризуется выражением [1, 4]

$$s_{ji}(t - t_0) = A_{ji} d_j(t - t_0) \times \cos[\omega_{jH}(t - t_0) + \Theta_j(t_k - t_0)\pi + \varphi_{ji}(t)], \quad (1)$$

где  $A_{ji} = \sqrt{2P_{jcp}}$  – амплитуда ВОС-сигнала от  $j$ -го НКА на выходе передатчика;  $P_{jcp}$  – средняя мощность ВОС-сигнала на выходе передатчика;  $d_j(t)$  – модулирующая функция (МФ) ВОС-сигнала  $s_{ji}(t)$ , отражающая специфику навигационных ШПС и собственно ВОС-сигналов;  $\Theta_j(t_k)$  – информационный ДП, предназначенный для передачи СИ от  $j$ -го НКА;  $\omega_{jH} = 2\pi f_{jH}$  – круговая несущая частота радиосигнала;  $f_{jH}$  – несущая частота ВОС-сигнала;  $\varphi_{ji}(t)$  – фаза радиосигнала;  $t_0$  – начало отсчета.

Информационный ДП  $\Theta_j(t_k)$  в (1) характеризует двоичную фазовую манипуляцию (ФМ) (BPSK – binary phase-shift keying) излучаемых радиосигналов  $s_{ji}(t)$ . При двоичной ФМ в сигнале  $s_{ji}(t)$  используются два значения фазы несущего колебания,  $0^\circ$  и  $180^\circ$ . В таком случае ДП  $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_{ji}\}$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) принимает значения  $\vartheta_{j1} = 0$  или  $\vartheta_{j2} = 1$ . Смена значений ДП  $\Theta_j(t_k)$  может происходить в моменты  $t_k = t_0 + k\tau_{СИ}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\tau_{СИ}$  – длительность информационной посылки СИ от  $j$ -го НКА.

ДП  $\Theta_j(t_k)$  содержит сведения об эфемеридах, альманахе, поправках к бортовой ШВ и т.д. для  $j$ -го НКА ( $j = \overline{1, J}$ ) группировки ГНСС [11, 12].

Далее при рассмотрении сигналов  $s_{ji}(t)$  от  $j$ -го НКА, в формулах типа (1), индекс “ $j$ ” там, где это не вызывает сомнения, и для уменьшения громоздкости не приводим.

В случае ВОС-сигналов  $s_{ji}(t)$  (1) МФ  $d(t)$  является результатом перемножения двух двоичных последовательностей: собственно ПСП дальномерного кода и МПК (специфика ВОС-сигналов) [2, 4].

Таким образом, МФ ВОС-сигнала  $d(t)$  записывается в виде [2, 3, 5, 6]

$$d(t - t_0) = g(t - t_0)r(t - t_0), \quad (2)$$

где  $g(t)$  – ПСП дальномерного кода, характеризующая специфику навигационных ШПС, и  $r(t)$  – МПК, отражающее специфику ВОС-сигналов  $s_{ji}(t)$ .

Как видно из (2), МФ  $d(t)$  образуется путем перемножения взаимно синхронизированных двоичных последовательностей  $g(t)$  и  $r(t)$ , каждая из которых состоит из чередующихся единичных видеоимпульсов соответствующей длительности, меняющих свою полярность по определенным законам согласно кодовым коэффициентам, значения которых на каждом такте равны  $+1$  или  $-1$ .

Формула для ПСП дальномерного кода  $g(t)$ , описывающая один ее период, имеет традиционный вид [4, 11, 12]

$$g(t - t_0) = \sum_{k=0}^{L-1} v_k \text{rect}_{\tau_c}[t - k\tau_c - t_0], \quad (3)$$

где  $\tau_c$  – длительность элемента (символа) ПСП  $g(t)$ ;  $L$  – коэффициент расширения спектра, т.е. число элементов на периоде ПСП  $g(t)$ ;

$$k = 0, 1, 2, \dots, (L - 1).$$

Видно, что частота следования элементов ПСП  $g(t)$  равна  $f_c = 1/\tau_c$ . Функция  $\text{rect}_{\tau_c}[\cdot]$  в (3) представляет собой импульс единичной амплитуды длительностью  $\tau_c$ :

$$\text{rect}_{\tau_c}[t - k\tau_c] = \begin{cases} 1 & \text{при } k\tau_c \leq t < (k+1)\tau_c; \\ 0 & \text{при } k\tau_c > t \geq (k+1)\tau_c, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{где } k = 0, 1, 2, \dots, (L - 1).$$

Кодовые коэффициенты  $v_k$ , образующие ПСП дальномерного кода  $g(t)$  (3), принимают на каждом ее элементе длительностью  $\tau_c$  значения  $+1$  или  $-1$  согласно закону чередования элементов на ее периоде.

Длительность периода ПСП  $g(t)$  (3) равна

$$T_L = L\tau_c. \quad (5)$$

Так, например, дальномерный код стандартной точности в ГНСС типа ГЛОНАСС представляет собой периодическую последовательность

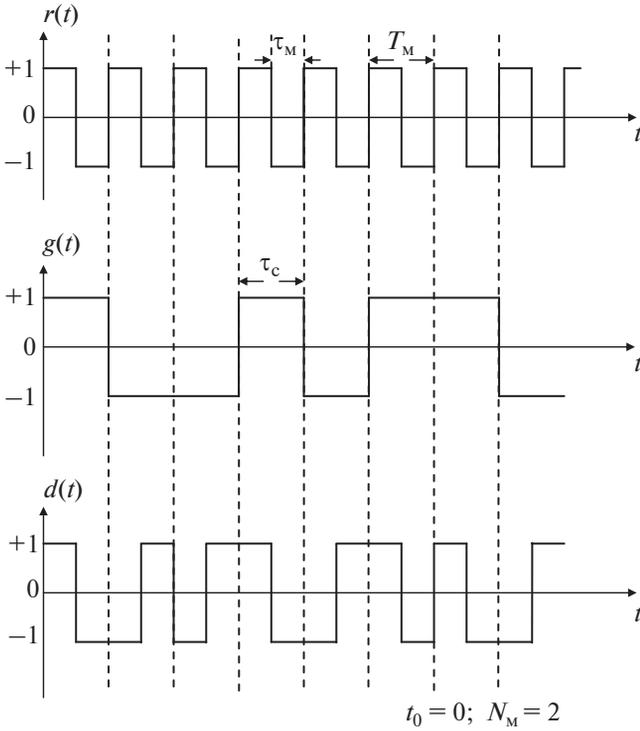


Рис. 1. Формирование модулирующей функции ВОС-сигнала.

максимальной длины (М – последовательность, или последовательность Хаффмена) с периодом  $T_L = 1$  мс и частотой следования элементов ПСП  $f_c = 511$  кГц; в ГНСС типа GPS дальномерный С/А код является периодической последовательностью Голда с периодом  $T_L = 1$  мс и частотой следования элементов ПСП  $f_c = 1.023$  МГц [11, 12, 18].

У ГНСС Galileo для E1OS сигналов и ГНСС GPS для L1C сигналов длительность элемента ПСП  $g(t)$   $\tau_c \approx 1$  мкс и длительность информационной посылки дискретного параметра  $\Theta(t_k)$   $\tau_{СИ} = 20$  мс [4, 12, 18].

У ГНСС ГЛОНАСС длительность элемента ПСП  $g(t)$   $\tau_c \approx 2$  мкс и длительность информационной посылки дискретного параметра  $\Theta(t_k)$   $\tau_{СИ} = 20$  мс [4, 11, 12].

В формуле (2) МПК  $r(t)$  определяется следующим выражением [2, 4]:

$$r(t) = \text{sign}[\sin \omega_M t], \quad (6)$$

где функция “сигнум”  $z$  равна

$$\text{sign } z = \begin{cases} 1, & z > 0; \\ 0, & z = 0; \\ -1, & z < 0, \end{cases}$$

$\omega_M = 2\pi f_M$  – круговая частота МПК  $r(t)$ ,  $f_M = 1/T_M$  – частота МПК  $r(t)$ ,  $T_M = 2\tau_M$  – период МПК,  $\tau_M$  – длительность импульса МПК (меандрового импульса). Видно, что выполняется соотношение

$$f_M = \frac{1}{2\tau_M}. \quad (7)$$

Для количественной характеристики различных типов ВОС-сигналов используется коэффициент кратности меандровых импульсов  $N_M$ , который равен количеству импульсов МПК  $r(t)$ , укладывающихся на длительности элемента ПСП  $g(t)$  [2, 4]:

$$N_M = \frac{\tau_c}{\tau_M} = \frac{2f_M}{f_c} = \frac{2\alpha}{\beta}, \quad (8)$$

где  $\alpha = \frac{f_M}{f_{оп}}$  и  $\beta = \frac{f_c}{f_{оп}}$  – параметры меандровой модуляции ВОС-сигналов.

На рис. 1 представлены графики ПСП дальномерного кода  $g(t)$  (при произвольно заданной в примере реализации), МПК  $r(t)$  и МФ  $d(t)$  ВОС-сигналов при коэффициенте кратности меандровых импульсов  $N_M = 2$ , что соответствует, например, типу меандровой модуляции ВОС(1, 1).

Векторное наблюдение  $\Xi(t)$  на входе приемника НАП от всех одновременно видимых в данный момент времени НКА спутниковой группировки имеет вид

$$\Xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_j(t), \dots, \xi_J(t)]^T, \quad (9)$$

$$t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J},$$

где  $\xi_j(t)$  – наблюдение на входе приемника НАП от  $j$ -го НКА,  $j$  – номер НКА,  $J$  – общее число всех одновременно видимых в данный момент времени НКА.

Наблюдение от  $j$ -го НКА  $\xi_j(t)$  представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала и шума:

$$\xi_j(t) = s_j(t) + n_j(t), \quad t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \quad (10)$$

где  $s_j(t)$  – принимаемый полезный ВОС-сигнал от  $j$ -го НКА на входе приемника НАП, соответствующий радиосигналу  $s_{и}(t)$  (1);  $n_j(t)$  – аддитивная флуктуационная помеха в наблюдении  $\xi_j(t)$  от  $j$ -го НКА.

Флуктуационная помеха  $n_j(t)$ , аппроксимируемая стационарным белым гауссовским шумом (БГШ), имеет статистические характеристики:

$$M[n_j(t)] = 0; \quad M[n_j(t)n_j(t + \tau)] = \frac{1}{2} N_{0j} \delta|\tau|, \quad (11)$$

где  $N_{0j}$  – интенсивность БГШ,  $M[\cdot]$  – символ усреднения по множеству реализаций.

На входе приемника НАП принимаемый от  $j$ -го НКА полезный ВОС-сигнал  $s_j(t)$  с использованием двоичной ФМ для передачи СИ согласно (1) имеет вид

$$s_j(t) = A_j d_j(t - \tau_{3j}) \cos[(\omega_{Hj} + \Delta\omega_{Dj} + \Delta\omega_j) \times (t - \tau_{3j}) + \Theta_j(t_k - \tau_{3j})\pi + \varphi_j(t)], \quad j = \overline{1, J}, \quad (12)$$

где  $\tau_{3j}$  – запаздывание принимаемого радиосигнала  $s_j(t)$  на трассе от  $j$ -го НКА до НАП;  $\Theta_j(t_k)$  – ДП, содержащий СИ от  $j$ -го НКА;  $\Delta\omega_{Dj}$  – доплеровский сдвиг несущей частоты принимаемого радиосигнала  $s_j(t)$  на трассе от  $j$ -го НКА до НАП;  $\Delta\omega_j$  – медленный сдвиг несущей частоты  $\omega_{Hj}$ , возникающий в канале распространения радиосигнала  $s_j(t)$  и в измерительном устройстве приемника. Начало отсчета в (12) принято равным  $t_0 = 0$ .

Рассматривая принимаемые сигналы от  $j$ -го НКА, в ф-лах типа (12) (аналогично ф-ле (1)) там, где это не вызывает сомнения, индекс “ $j$ ” для уменьшения громоздкости опускаем.

Тогда выражение (12) записывается в виде

$$s(t) = Ad(t - \tau_3) \cos[(\omega_H + \Delta\omega_D + \Delta\omega) \times (t - \tau_3) + \Theta(t_k - \tau_3)\pi + \varphi(t)]. \quad (13)$$

В ряде случаев принимаемый от  $j$ -го НКА ВОС-сигнал  $s(t)$  (13) с использованием двоичной ФМ для передачи СИ от  $j$ -го НКА представляется в другой эквивалентной (13) форме записи

$$s(t) = \begin{cases} Ad(t - \tau_3) \cos[(\omega_H + \Delta\omega_D + \Delta\omega_p) \times (t - \tau_3) + \varphi(t)] & \text{при } \vartheta_1 = 0, \\ -Ad(t - \tau_3) \cos[(\omega_H + \Delta\omega_D + \Delta\omega_p) \times (t - \tau_3) + \varphi(t)] & \text{при } \vartheta_2 = 1. \end{cases} \quad (14)$$

В современных ГНСС для передачи СИ применяются полезные сигналы  $s(t)$  с двоичной ФМ (13). Наряду с этим в ряде технических приложений навигации и связи (например, в спутниковой системе связи Globalstar) используется также четверичная (квадратурная) ФМ (QPSK – Quadrature Phase Shift Keying), что позволяет более эффективно использовать предоставленную полосу частот. Поэтому ДП  $\Theta(t_k)$  для передачи СИ характеризуем в данной работе более общей моделью с использованием многопозиционной ФМ [19].

Тогда в соответствии с (13) на входе приемника НАП принимаемый от  $j$ -го НКА полезный ВОС-сигнал  $s(t)$  с использованием многопозиционной ФМ для передачи СИ (без учета каких-либо тех-

нических особенностей) описывается следующим выражением:

$$s(t) = Ad(t - \tau_3) \cos[(\omega_H + \Delta\omega_D + \Delta\omega) \times (t - \tau_3) + \Theta(t_k - \tau_3) \frac{2\pi}{M} + \varphi(t)], \quad (15)$$

где характеризующий многопозиционную ФМ ДП  $\Theta(t_k) = \{\vartheta_i\}$  применительно к  $j$ -му НКА определяется соотношением:

$$\vartheta_i = i - 1, \quad \Theta(t_k) = \{i - 1\}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (16)$$

$i$  – номер состояния ДП  $\Theta(t_k)$ .

В формулах (15) и (16)  $M = 2^n$  – показатель многопозиционности ФМ,  $n$  – целое положительное число.

Так, например, при  $M = 2$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) имеем двоичную ФМ, и сигнал (15) принимает вид (13); при  $M = 4$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) – квадратурную ФМ.

Запаздывание  $\tau_3$  принимаемого радиосигнала  $s(t)$  (15) на трассе от  $j$ -го НКА до НАП имеет вид [11]

$$\tau_3 = \tau_D + \Delta\tau_1 + \Delta\tau_2 + \Delta\tau_3 + \Delta\tau_n + \Delta\tau_r + \Delta\tau_{\Pi}, \quad (17)$$

где  $\tau_D(t)$  – задержка принимаемого радиосигнала  $s(t)$ , обусловленная дальностью трассы между  $j$ -м НКА и НАП;  $\Delta\tau_1$  и  $\Delta\tau_2$  – сдвиги ШВ  $j$ -го НКА и НАП относительно системного времени;  $\Delta\tau_3$  – задержка сигнала за счет неточного прогноза эфемерид;  $\Delta\tau_n$  и  $\Delta\tau_r$  – ионосферная и тропосферная задержки сигнала;  $\Delta\tau_{\Pi}$  – случайная задержка сигнала, вызванная уходом частоты передатчика  $j$ -го НКА.

Задержка  $\tau_D(t)$  принимаемого радиосигнала  $s(t)$ , обусловленная дальностью трассы между  $j$ -м НКА и НАП, характеризуется выражением

$$\tau_D(t) = D(t)/c, \quad (18)$$

где  $D(t)$  – дальность трассы между  $j$ -м НКА и НАП;  $c$  – скорость распространения радиоволн.

Доплеровский сдвиг несущей частоты  $\omega_H$  принимаемого от  $j$ -го НКА радиосигнала  $s(t)$  (15) имеет вид [11]

$$\Delta\omega_D(t) = \omega_H \frac{V(t)}{c}, \quad (19)$$

где  $V(t) = \frac{dD(t)}{dt}$  – радиальная скорость перемещения НАП относительно  $j$ -го НКА.

Случайная фаза  $\varphi(t)$  принимаемого от  $j$ -го НКА радиосигнала  $s(t)$  (15) достаточно полно

описываются следующей системой стохастических дифференциальных уравнений [15, 20]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \Delta\omega(t) - \frac{\omega_H}{c} \frac{dD(t)}{dt} + \sqrt{\frac{N_\varphi}{2}} n_\varphi(t), \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \\ \frac{d\Delta\omega(t)}{dt} &= -\gamma_\omega \Delta\omega(t) + \sqrt{2\gamma_\omega \sigma_\omega^2} n_{\delta\omega}(t), \\ \Delta\omega(t_0) &= \Delta\omega_0, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $n_\varphi(t)$  и  $n_{\delta\omega}(t)$  – взаимонезависимые стандартные БГШ (с нулевыми математическими ожиданиями (МО) и единичными интенсивностями);  $\Delta\omega(t)$  – медленный сдвиг несущей частоты  $\omega_H$  сигнала  $s(t)$  из-за нестабильности задающих генераторов  $j$ -го НКА и НАП, а также в связи с изменением внешних условий функционирования;  $\sigma_\omega^2$  – дисперсия нестабильности частоты;  $\gamma_\omega$  – коэффициент, характеризующий ширину спектра уходов частоты  $\Delta\omega(t)$ ;  $N_\varphi$  – интенсивность собственных фазовых флуктуаций приемника НАП.

Связь между дальностью  $D(t)$  и прямоугольными координатами в геодезической системе координат  $j$ -го НКА и НАП имеет вид [15]

$$\begin{aligned} D_{\text{изм}}(t) &= D(t) + \delta D = \\ &= \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} + \delta D, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $x_j, y_j, z_j$  – прямоугольные координаты  $j$ -го НКА;  $x, y, z$  – прямоугольные координаты объекта (например, самолета), на котором размещена НАП;  $D_{\text{изм}}(t)$  – измеренное значение дальности  $D(t)$  (псевдодальность);  $\delta D$  – неизвестная постоянная на время измерения ошибка (например, за счет расхождения ШВ  $j$ -го НКА и НАП).

В соответствии с (19) и (21) радиальная псевдоскорость характеризуется следующим выражением:

$$\begin{aligned} V_{\text{изм}}(t) &= \frac{d}{dt} D_{\text{изм}}(t) = \\ &= K_x(V_x - W_{jx}) + K_y(V_y - W_{jy}) + K_z(V_z - W_{jz}), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$V_x(t) = \frac{d}{dt} x(t), \quad V_y(t) = \frac{d}{dt} y(t), \quad V_z(t) = \frac{d}{dt} z(t)$$

– проекции скорости объекта (например, самолета), на котором размещена НАП;

$$\begin{aligned} W_{jx}(t) &= \frac{d}{dt} x_j(t), \quad W_{jy}(t) = \frac{d}{dt} y_j(t), \\ W_{jz}(t) &= \frac{d}{dt} z_j(t) \end{aligned}$$

– проекции скорости  $j$ -го НКА;

$$K_x = \frac{x_j - x}{D_{\text{изм}}(t)}, \quad K_y = \frac{y_j - y}{D_{\text{изм}}(t)}, \quad K_z = \frac{z_j - z}{D_{\text{изм}}(t)} \quad (23)$$

– направляющие косинусы.

Обычно значения направляющих косинусов  $K_x, K_y$  и  $K_z$  (23) на тактовых интервалах времени принимают постоянными.

Значения координат  $x_j, y_j, z_j$  каждого  $j$ -го НКА и их производные  $W_{jx}, W_{jy}, W_{jz}$  в НАП являются известными в результате обработки СИ, и они при решении задач синтеза относятся к вектору управления  $\mathbf{U}_{\text{упр}}(t)$ .

Таким образом, принимаемый от  $j$ -го НКА ( $j = \overline{1, J}$ ) полезный ВОС-сигнал  $s_j(t)$  (15) согласно (18)–(23) (без учета каких-либо технических особенностей) является функцией ДП  $\Theta_j(t_k)$  и вектора непрерывных параметров радиосигнала (ПРС)  $\mathbf{Y}_j(t)$ ,

$$s_j(t) = s[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_j(t)], \quad (24)$$

где

$$\mathbf{Y}_j(t) = \left[ D_{\text{изм}}(t) \frac{d}{dt} D_{\text{изм}}(t) \varphi_j(t) \Delta\omega_j(t) \right]^T, \quad (25)$$

$$j = \overline{1, J},$$

–  $j$ -й вектор ПРС, т.е. тех параметров, от которых принимаемый от  $j$ -го НКА сигнал  $s_j(t)$  непосредственно зависит.

Из рассмотрения (25) видно, что совокупность векторов ПРС  $\mathbf{Y}_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , содержит необходимую информацию о положении и динамике движения объекта (например, самолета), на котором установлена НАП, а также об условиях распространения радиоволн и стабильности несущей частоты.

Векторы ПРС  $\mathbf{Y}_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$  (и в конечном итоге зависящий от них вектор НП  $\mathbf{X}(t)$ ) подлежат оцениванию при решении задачи синтеза.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

При постановке задачи синтеза алгоритмов приема и обработки информации методами МТО следует в пространстве состояний выбрать и обосновать вектор наблюдения (ВН) и вектор состояния (ВС), а также описать динамику этих векторов, разработав соответствующие математические модели (ММ). При этом необходимо задать критерий оптимальности в соответствии с физическим смыслом и целью решаемой задачи синтеза [13–15, 17].

В решаемой задаче синтеза ВН  $\Xi(t)$  (9) представляет собой совокупность  $J$  принимаемых приемником НАП (для определенности установленном, например, на самолете) ВОС-сигналов, искаженных помехами, от всех одновременно видимых НКА группировки ГНСС.

В соответствии с (9)–(11) ВН  $\Xi(t)$  может быть представлен в следующем виде:

$$\Xi(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{G}_{\Xi}(t)\mathbf{N}(t), \quad t \in [t_0, t), \quad (26)$$

где

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_j(t), \dots, s_J(t)]^T$$

– вектор принимаемых полезных ВОС-сигналов от всей совокупности  $J$  одновременно видимых в данный момент НКА;

$$\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_j(t), \dots, n_J(t)]^T$$

– вектор аддитивных независимых стандартных БГШ с известными характеристиками в соответствии с (11);  $j = \overline{1, J}$ .

Входящая в формулу (26) невырожденная матрица  $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t)$  интенсивностей помех  $\mathbf{N}(t)$  имеет вид

$$\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t) = \mathbf{G}_{\Xi}(t)\mathbf{G}_{\Xi}^T(t). \quad (27)$$

Полезный ВОС-сигнал  $s_j(t)$ , принимаемый от  $j$ -го НКА, определяется выражением (15).

При выборе и обосновании ВС исходим из того, что решается главная задача навигации: определение пространственных координат объекта (самолета), на котором установлена НАП, и их производных (компоненты скорости полета и ускорения). Сопутствующими компонентами ВС при этом являются параметры, характеризую-

ющие флуктуации фазы принимаемого сигнала, нестабильность частоты задающего генератора и т.п. [20].

Применительно к решаемой задаче синтеза ВС представляет собой ДНП

$$[\mathbf{X}^T(y), \Theta_j(t_k)]^T,$$

где  $\Theta_j(t_k)$  – ДП, характеризующий предназначенную для передачи СИ от  $j$ -го НКА ( $j = \overline{1, J}$ ) многопозиционную ФМ (15) ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (12);  $\mathbf{X}(t)$  – вектор НП, содержащий информацию о положении в пространстве и динамике движения объекта (например, самолета), на котором установлена НАП, а также сведения об условиях распространения радиоволн и стабильности несущей частоты.

Далее рассмотрим вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  и его взаимосвязь с векторами ПРС  $\mathbf{Y}_j(t)$  (25), где  $j = \overline{1, J}$ .

Для характеристики вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  используем ММ динамики объектов навигации на основе прямоугольной гринвичской системы координат (СК), описывающую положение объекта (например, самолета), на котором установлена НАП, в пространстве и его движение применительно к небольшим отрезкам времени. При этом вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  может быть представлен в следующем виде [20, 21]:

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{X}_c^T(t), \mathbf{V}^T(t), \mathbf{A}^T(t), \mathbf{\Phi}^T(t), \mathbf{\Delta\Omega}^T(t), \mathbf{\Delta D}^T(t)]^T, \quad (28)$$

где  $\mathbf{X}_c(t) = [x, y, z]^T$  – вектор прямоугольных координат объекта (например, самолета), на котором размещена НАП;

$$\mathbf{V}(t) = [V_x, V_y, V_z]^T \quad \text{и} \quad \mathbf{A}(t) = [A_x, A_y, A_z]^T$$

– векторы земной скорости и ускорения объекта (например, самолета) на оси прямоугольной гринвичской СК;

$$\mathbf{\Phi}(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_j(t), \dots, \varphi_J(t)]^T$$

– вектор случайных фаз принимаемых полезных ВОС-сигналов  $s_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , от всей совокупности одновременно видимых в данный момент НКА;

$$\mathbf{\Delta\Omega}(t) = [\Delta\omega_1(t), \Delta\omega_2(t), \dots, \Delta\omega_j(t), \dots, \Delta\omega_J(t)]^T$$

– вектор медленных уходов несущих частот принимаемых полезных ВОС-сигналов  $s_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , от всей совокупности одновременно видимых в данный момент НКА;

$$\mathbf{\Delta D}(t) = [\delta d_1(t), \delta d_2(t), \dots, \delta d_j(t), \dots, \delta d_J(t)]^T$$

– вектор сдвигов ШВ НАП относительно ШВ каждого видимого НКА, выраженный в единицах дальности.

Отметим, что при решении задач синтеза алгоритмов приема и обработки сигналов в комплексных системах навигации (например, в случае наблюдений сигналов не только ГНСС, но и сигналов доплеровского измерителя скорости или инерциальной навигационной системы) используется несколько более сложная ММ динамики объектов навигации. В таком случае земную скорость объекта  $\mathbf{V}(t)$  в (28) представляют в виде

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Delta V}(t),$$

где  $\mathbf{V}_0$  – средняя земная скорость объекта,  $\mathbf{\Delta V}(t)$  – флуктуационная составляющая земной скорости объекта, и обе компоненты земной скорости оцениваются отдельно [21].

Динамика компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  (28) применительно к высокодинамичным объектам (например, самолетам) достаточно полно описывается системой стохастических дифференциальных уравнений следующего вида [20, 21]:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{X}_c(t) &= \mathbf{V}(t), & \mathbf{X}_c(t_0) &= \mathbf{X}_{c0}; \\
\frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) &= \mathbf{A}(t), & \mathbf{V}(t_0) &= \mathbf{V}_0; \\
\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) &= -[\alpha + \beta]\mathbf{A}(t) - \alpha\beta\mathbf{V}(t) + \sqrt{2(\alpha + \beta)\sigma_A^2}\mathbf{N}_A(t), & \mathbf{A}(t_0) &= \mathbf{A}_0; \\
\frac{d}{dt} \Phi(t) &= \Delta\Omega(t) - \frac{\omega_H}{c} \frac{d}{dt} \mathbf{D}(t) + \mathbf{N}_\Phi(t), & \Phi(t_0) &= \Phi_0; \\
\frac{d}{dt} \Delta\Omega(t) &= -\Gamma_\omega \Delta\Omega(t) + \mathbf{N}_{\Delta\Omega}(t), & \Delta\Omega(t_0) &= \Delta\Omega_0; \\
\frac{d}{dt} \Delta\mathbf{D} &= 0, & \Delta\mathbf{D}(t_0) &= \Delta\mathbf{D}_0;
\end{aligned} \tag{29}$$

где  $\sigma_A^2$  – дисперсия флуктуаций ускорения;  $\mathbf{N}_A(t)$  – вектор формирующих стандартных БГШ;  $\alpha$  и  $\beta$  – размерные коэффициенты, определяющие спектр флуктуаций ускорения;

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_\Phi(t) &= [n_{\Phi 1}(t), \dots, n_{\Phi i}(t), \dots, n_{\Phi J}(t)]^T \text{ и} \\
\mathbf{N}_{\Delta\Omega}(t) &= [n_{\Delta\Omega 1}(t), \dots, n_{\Delta\Omega i}(t), \dots, n_{\Delta\Omega J}(t)]^T
\end{aligned}$$

– векторы независимых формирующих БГШ соответствующих интенсивностей;

$$\mathbf{D}(t) = [D_1(t), D_2(t), \dots, \dots, D_J(t)]^T$$

– вектор дальностей применительно ко всей совокупности одновременно видимых в данный момент НКА;  $D_j(t)$  – дальность между  $j$ -м НКА и НАП;  $\Gamma_\omega$  – диагональная матрица, у которой на главной диагонали находятся элементы  $\gamma_{\omega_j}$  ( $j = \overline{1, J}$ ).

Из рассмотрения (28) и (29) следует, что вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  представляет собой многокомпонентный диффузионный гауссовский марковский процесс, который в общем виде может быть описан линейным векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{A}_X(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{C}_X(t)\mathbf{U}_{\text{упр}}(t) + \mathbf{G}_X(t)\mathbf{N}_X(t), \tag{30} \\
\mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0,
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  – вектор-столбец НП размером  $(n \times 1)$ ;  $n$  – число компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ ;  $\mathbf{A}_X(t)$  – матрица состояния размером  $(n \times n)$ ;  $\mathbf{U}_{\text{упр}}(t)$  – детерминированный вектор управления;  $\mathbf{C}_X(t)$  – матрица управления;  $\mathbf{N}_X(t)$  – вектор стандартных БГШ;  $\mathbf{G}_X(t)$  – матрица интенсивностей шумов;  $\mathbf{B}_{XX}(t) = \mathbf{G}_X(t)\mathbf{G}_X^T(t)$  – матрица коэффициентов диффузии вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ .

Взаимосвязь вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  (29) и векторов ПРС  $\mathbf{Y}_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , определяется (24) и согласно (20), (21) и (22) может быть представлена в виде

$$\mathbf{Y}_j(t) = \mathbf{L}_j \{\mathbf{X}(t)\} = [l_{j1} \ l_{j2} \ l_{j3} \ l_{j4}]^T, \tag{31}$$

где  $\mathbf{L}_j \{\mathbf{X}(t)\}$  – нелинейная векторная функция, компоненты которой равны:

$$\begin{aligned}
l_{j1} &= D_{j\text{изм}}(t) = \\
&= \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} + \delta D, \\
l_{j2} &= \frac{d}{dt} D_{j\text{изм}} = K_x(V_x - W_{jx}) + \\
&+ K_y(V_y - W_{jy}) + K_z(V_z - W_{jz}), \\
l_{j3} &= \varphi_j(t), \quad l_{j4} = \Delta\omega_j(t).
\end{aligned}$$

Таким образом, из рассмотрения (16), (28), (29) и (31) видно, что принимаемый от  $j$ -го НКА полезный ВОС-сигнал  $s_j(t)$  (24) является функцией ДП  $\Theta_j(t_k)$  и вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ :

$$s_j(t) = s[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{X}(t)]. \tag{32}$$

Принимаемый сигнал  $s_j(t)$  содержит информацию, определяющую пространственное положение и движение объекта (например, самолета), на котором установлена НАП, а также СИ (сведения об эфемериде, альманахе, поправках к бортовой ШВ и т.д.) от  $j$ -го НКА. Дискретный процесс  $\Theta_j(t_k)$  согласно (16) применительно к  $j$ -му НКА записывается в виде  $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_{ij}\}_j = \{i - 1\}_j$ . Он описывается простой цепью Маркова на  $M$  положений и принимает одно из значений  $\vartheta_i = i - 1$ , где  $i = \overline{1, M}$ . Далее для простоты индекс  $j$  в обозначениях применительно к ДП  $\Theta_j(t_k)$  опущен.

Возможные моменты перехода ДП  $\Theta(t_k)$  из одного состояния в другое являются дискретными и определяются выражением

$$t_k = t_0 + kT, \text{ где } T = \text{const}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для ГНСС типов GPS, Galileo и ГЛОНАСС длительность такта  $T = t_{k+1} - t_k$  ДП  $\Theta(t_k)$  равна дли-

тельности информационной посылки СИ:  $T = \tau_{СИ} = 20 \text{ мс}$  [11, 12].

В общем случае у принимаемого сигнала  $s(t)$  (15) моменты времени  $t_k$  перехода ДП  $\Theta(t_k)$  из одного состояния в другое являются случайными, поскольку они зависят от случайного запаздывания принимаемого сигнала  $\tau_3(t)$  (17).

На всех тактовых полуинтервалах времени  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , ДП  $\Theta(t_k)$  остается постоянным, и он может быть описан соответствующим априорным уравнением вида

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = 0, \text{ где } t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

Применительно к ДП  $\Theta(t_k)$  матрица одношаговых вероятностей перехода и вектор вероятностей начального состояния соответственно имеют вид [15, 17]:

$$\begin{aligned} \pi(t_k) &= [\pi_{il}(t_k)], \text{ где} \\ \pi_{il}(t_k) &= P\{\Theta(t_k + 0) = \vartheta_i | \Theta(t_k - 0) = \vartheta_l\}, \quad (34) \\ & i, l = \overline{1, M}; \end{aligned}$$

$$P_{\vartheta_i}(t_0) = \{P_{\vartheta_i}(t_0)\}, \text{ где } i = \overline{1, M}.$$

Вероятности состояний ДП  $\Theta(t_k)$   $P_{\vartheta_i}(t_k + 0) \triangleq P(t_k + 0, \Theta(t_k + 0) = \vartheta_i)$  в начале  $k$ -го такта  $[t_k, t_{k+1})$  определяются формулой

$$P_{\vartheta_i}(t_k + 0) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{\vartheta_m}(t_k - 0), \quad i = \overline{1, M}, \quad (35)$$

где  $P_{\vartheta_m}(t_k - 0)$  – вероятность состояния ДП  $\Theta(t_k)$  в конце  $(k - 1)$ -го такта  $[t_{k-1}, t_k)$ .

В задачах по синтезу оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ДНП с использованием методов МТО применяется поэтапное решение уравнения Стратоновича [15, 22]. Возможность решения уравнения Стратоновича для АПВ оцениваемых ДНП поэтапно обусловлена спецификой непрерывных (28) и дискретных (33) компонент ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

При использовании метода поэтапного решения уравнения Стратоновича удастся обоснованно упростить ММ оцениваемого ВС и тем самым повысить конструктивность решения задачи синтеза. Суть такого упрощения ММ заключается в возможности описания динамики непрерывных компонент ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  на характерных полуинтервалах времени (применительно к ГНСС на длительности полуинтервала для передачи СИ  $\tau_{СИ} = 20 \text{ мс}$ ) квазислучайными процессами [15, 21].

В таких случаях используется двухэтапная обработка ВН  $\Xi(t)$  (26). На первом этапе применительно к каждому  $k$ -му такту  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , обрабатывается только вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , поскольку ДП  $\Theta_j(t)$  при этом остается постоянным. В таком случае для первого этапа обработки удается найти точное решение уравнения Стратоновича как решение нелинейной задачи оценки параметров в силу аппроксимации ММ вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  (29) векторным квазислучайным процессом.

На втором этапе обработка осуществляется в дискретном времени в точках  $t_k + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), т.е. в точках возможной смены состояния ДП  $\Theta_j(t)$ . При этом оценки компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ , полученные на первом этапе обработки, используются в качестве начальных значений для второго этапа обработки ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

В дискретные моменты времени  $t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) вектор НП  $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$ , характеризуемый соотношениями (28) и (29), описывается эквивалентным применительно к (30) линейным векторно-матричным стохастическим разностным уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= \Phi_{XX}(t_k, t_{k-1})\mathbf{X}_{k-1} + \\ &+ \Psi_{XU}(t_k, t_{k-1})U_{\text{упрк}} + \Gamma_X(t_k, t_{k-1})\mathbf{N}_{Xk}, \quad (36) \end{aligned}$$

где  $\Phi_{XX}$ ,  $\Psi_{XU}$  и  $\Gamma_X$  – известные матрицы,  $\mathbf{N}_{Xk} = \mathbf{N}_X(t_k)$  – вектор формирующих стандартных дискретных БГШ,  $U_{\text{упрк}}$  – дискретный вектор управления.

Полагаем, что длительность тактового интервала (информационной посылки СИ)  $T = t_{k+1} - t_k$  ДП  $\Theta(t_k)$  ( $T = \tau_{СИ} = 20 \text{ мс}$ ) достаточно мала, чтобы в (32) вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  на каждом полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , можно было с требуемой для оценивания степенью точности аппроксимировать векторным квазислучайным процессом [15, 21, 22]:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{X}_0 &= \mathbf{X}(t_0), \quad (37) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$ ;  $\mathbf{X}_k = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{X}_k)$  – начальное значение на  $k$ -м такте,  $\mathbf{f}(\cdot)$  – детерминированная векторная функция.

Входящая в линейное векторно-матричное стохастическое разностное уравнение (36) функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)$  имеет вид [15, 21, 22]

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k) = \Phi_{XX}(t, t_k)\mathbf{X}_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (38)$$

где  $\Phi_{XX}(t, t_k)$  – переходная матрица состояния, характеризуемая (36).

В соответствии с (37) принимаемый от  $j$ -го НКА полезный ВОС-сигнал  $s_j(t)$  (32) в пределах одного тактового полуинтервала принимает вид

$$s_j(t) = s[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{f}(t_k, \mathbf{X}_k)], \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (39)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, j = \overline{1, J}.$$

Решение задачи синтеза применительно к  $j$ -му НКА состоит в том, чтобы на  $k$ -м такте, где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , имея наблюдения (26) и располагая априорными сведениями (16), (28), (29) и (30) об оцениваемом ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , получить оптимальную оценку  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$  выборки вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  и оптимальные оценки  $\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0)$  ДП  $\Theta_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

Оптимальная оценка  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$  выборки вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  должна удовлетворять критерию минимума апостериорного риска при квадратичной функции потерь.

Как известно [14, 15], оптимальной оценкой  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ , удовлетворяющей этому критерию, является апостериорное математическое ожидание (МО)  $M_{ps}[\mathbf{X}_{k+1}]$  выборки вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ :

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = M_{ps}[\mathbf{X}_{k+1}] = \int_{\mathbf{X}_{k+1}} \mathbf{X}_{k+1} p_{ps}(t, \mathbf{X}_{k+1}) d\mathbf{X}_{k+1}, \quad (40)$$

где  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  – оптимальная оценка НП  $\mathbf{X}(t)$ ;

$$p_{ps}(t, \mathbf{X}_{k+1}) \triangleq p(t, \mathbf{X}_{k+1} | \Xi^{t_{k+1}})$$

– АПВ выборки  $\mathbf{X}_{k+1}$ ;

$$\Xi^{t_{k+1}} = \{\Xi(\tau) : \tau \in [t_0, t_{k+1}]\}$$

– реализация ВН  $\Xi(t)$  на отрезке  $[t_0, t_{k+1}]$ . Отметим, что в случае, когда АПВ является унимодальной и гауссовской, то оптимальная оценка  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  согласно критерию (40) и согласно критерию максимума АПВ совпадают [14, 15], чем и воспользуемся в дальнейшем.

Оптимальная оценка  $\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0)$  ДП  $\Theta_j(t)$ ,  $j = \overline{1, J}$ , применительно к  $j$ -му НКА должна удовлетворять критерию минимума апостериорного риска при простой функции потерь, что эквивалентно критерию максимума АВ ДП  $\Theta_j(t)$  [14, 15]:

$$\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0) = \vartheta_i : \max_{\vartheta_i \leq \vartheta_i \leq \vartheta_M} \{P_{ips}(t_{k+1} - 0)\}, \quad (41)$$

где  $P_{ips}(t_{k+1} - 0)$  – АВ состояния ДП  $\Theta_j(t)$  в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ .

### 3. АПОСТЕРИОРНЫЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ И АПОСТЕРИОРНЫЕ СМЕШАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$

При решении задач синтеза методами МТО основной характеристикой для получения оптимальных оценок  $\hat{\Theta}_{jk}$  и  $\hat{\mathbf{X}}_k$  применительно к  $j$ -му НКА является АПВ оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ :

$$p_{ps}(t_k, \Theta_k, \mathbf{X}_k) \triangleq p(t_k, \Theta_k, \mathbf{X}_k | \Xi^{t_k}),$$

где  $\Xi^{t_k} = \{\Xi(\tau) : \tau \in [t_0, t_k]\}$  – реализация ВН  $\Xi(t)$  на отрезке  $[t_0, t_k]$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) [13–15]. Далее для простоты индекс  $j$  в выкладках применительно к ДП  $\Theta_j(t_k)$  опущен.

В случаях оптимального оценивания ДНП характеристикой, эквивалентной АПВ, на каждом  $k$ -м тактовом полуинтервале  $[t_k, t_{k+1}]$  является совокупность апостериорных смешанных распределений (АСР)  $w_{ips}(t, \mathbf{X}_k)$  [15, 16]:

$$w_{ips}(t, \mathbf{X}_k) \triangleq w(t, \Theta_k = \vartheta_i, \mathbf{X}_k | \Xi^{t_k}),$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $i = \overline{1, M}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

В точках возможной смены состояния ДП  $\Theta_j(t)$ , т.е. в моменты времени  $t_{k+1} + 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , соотношения для АСР имеют вид [15]

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) w_{mps}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_{k+1}), \quad (42)$$

где  $i = \overline{1, M}$ ;  $\pi_{mi}(t_{k+1})$  – одношаговые вероятности перехода (34).

Формула связи между АПВ  $p_{ps}(t_k, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  и соответствующими АСР  $w_{ips}(t_k, \mathbf{X}_k)$  определяется следующим соотношением [15, 21]:

$$p_{ps}(t_k, \Theta_k, \mathbf{X}_k) = \sum_{i=1}^M w_{ips}(t_k, \mathbf{X}_k) \delta(\Theta_k - \vartheta_i), \quad (43)$$

где  $\delta(\Theta_k - \vartheta_i)$  – дельта-функция Дирака.

При формировании алгоритмов потактовой обработки в два этапа требуется получить аналитические соотношения, связывающие АПВ (или соответствующие АСР) оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  в соседние дискретные моменты времени  $t_k + 0$  и  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). При этом АПВ (или АСР), полученная на первом этапе обработки, рассматривается как начальная для вычисления АПВ (или АСР) на втором этапе. Повторяя такую процедуру вычислений последовательно для каждого такта, получим искомую эволюцию АПВ (или АСР) ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  во времени.

3.1. Алгоритмы на первом этапе обработки

Первый этап обработки характерен тем, что на каждом  $k$ -м тактовом полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$  согласно (33) и (37) выполняется соотношение  $\Theta_k = \vartheta_i = \text{const}$  и производится аппроксимация вектора  $\mathbf{X}(t)$  квазислучайным процессом

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k) \quad (44)$$

при  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$

Применительно к  $k$ -му такту АПВ ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  на первом этапе обработки имеет вид

$$p_{psl}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) \triangleq p_1(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k | \Xi^{t_{k+1}-0}), \quad (45)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; индекс "1" означает первый этап обработки.

В соответствии с (44) и (45) на  $k$ -м такте уравнение Стратоновича для АПВ  $p_{psl}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  при симметризованной форме записи стохастических интегралов имеет вид [13–15]

$$\frac{\partial p_{psl}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)}{\partial t} = [F(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) - M_{ps}\{F(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)\}]p_{psl}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k), \quad (46)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

В уравнении Стратоновича (46) производная по времени от логарифма функционала правдоподобия (ЛФП)  $F(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  и ее апостериорное среднее согласно (26), (30), (32), (37)–(39) применительно к совокупности  $J$  принимаемых ВОС-сигналов  $\mathbf{S}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  (26) от всех одновременно видимых НКА определяются соотношениями [13–15, 21]

$$\begin{aligned} F(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) &= F[t, \Theta_k, \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)] = \\ &= \mathbf{S}^T(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) \mathbf{B}_{\Xi\Xi}^{-1} \left[ \Xi(t) - \frac{1}{2} \mathbf{S}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) \right], \\ &M_{ps}\{F(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)\} = \\ &= \iint_{\Theta_k \mathbf{X}_k} \{F(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)\} p_{psl}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) d\Theta_k d\mathbf{X}_k, \end{aligned} \quad (47)$$

где  $\Theta_k = [\Theta_{1k}, \Theta_{2k}, \dots, \Theta_{jk}, \dots, \Theta_{Jk}]^T$  – вектор ДП применительно ко всей совокупности  $J$  одновременно видимых НКА.

Уравнение Стратоновича (46) для АПВ  $p_{psl}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  на  $k$ -м такте имеет аналитическое решение [15]:

$$\begin{aligned} p_{psl}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) &= \\ &= C_1 p_{ps}(t_k, \Theta_k, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^t F(\tau, \Theta_k, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[ \iint_{\Theta_k \mathbf{X}_k} p_{ps}(t_k, \Theta_k, \mathbf{X}_k) \times \right. \\ &\left. \times \exp \left\{ \int_{t_k}^t F(\tau, \Theta_k, \mathbf{X}_k) d\tau \right\} d\Theta_k d\mathbf{X}_k \right]^{-1} \end{aligned}$$

– нормировочный коэффициент;  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Видно, что согласно (48) искомая АПВ оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  применительно к  $j$ -му НКА в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте  $[t_k, t_{k+1})$ , т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , равна

$$\begin{aligned} p_{psl}(t_{k+1} - 0, \Theta_k, \mathbf{X}_k) &= \\ &= C_1 p_{ps}(t_k, \Theta_k, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} F(\tau, \Theta_k, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (49)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

На основании уравнения Стратоновича для АПВ  $p_{psl}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  (46) в соответствии с формулой связи между АПВ и АСР (43) находим, что уравнение Стратоновича для соответствующего АСР  $w_{ipsl}(t, \mathbf{X}_k)$  на первом этапе потактовой обработки имеет вид

$$\frac{\partial w_{ipsl}(t, \mathbf{X}_k)}{\partial t} = [F_i(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Theta X}(t)] w_{ipsl}(t, \mathbf{X}_k), \quad (50)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

В уравнении Стратоновича для АСР  $w_{ipsl}(t, \mathbf{X}_k)$  (50) производная по времени от частичного ( $i$ -го) ЛФП (т.е. ЛФП, соответствующего значению компонент вектора ДП  $\Theta_k = \{\vartheta_i\}$ )  $F_i(t, \mathbf{X}_k)$  и ее апостериорное среднее в соответствии с (37), (43) и (47) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов  $\mathbf{S}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  (9) и (26) от всех одновременно видимых  $J$  НКА равны [13–15, 21]:

$$\begin{aligned} F_i(t, \mathbf{X}_k) &\triangleq F[t, \Theta_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)] = \\ &= \mathbf{S}^T(t, \Theta_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{X}_k) \times \end{aligned} \quad (51)$$

$$\times \mathbf{B}_{\Xi\Xi}^{-1} \left[ \Xi(t) - \frac{1}{2} \mathbf{S}(t, \Theta_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{X}_k) \right],$$

$$\begin{aligned} F_{\Theta X}(t) &\triangleq M_{ps\mathbf{X}_k, \Theta_k} \{F_i(t, \mathbf{X}_k)\} = \\ &= \int \sum_{\mathbf{X}_k}^M F_i(t, \mathbf{X}_k) w_{ipsl}(t, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \end{aligned} \quad (52)$$

где  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{1, J}$ .

Уравнение (50) справедливо там, где  $d\Theta(t)/dt = 0$  (33), т.е. для  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$

Соотношение для  $i$ -го АСР  $w_{i\,ps}(t, \mathbf{X}_k)$  в точках разрыва между соседними тактами, т.е. в моменты времени  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) возможной смены состояний ДП  $\Theta_j(t)$  определяется (42).

Отметим, что в (42) не учитываются (как малые) разрывы 1-го рода выборки  $\mathbf{X}_k$ , обусловленные аппроксимацией НП  $\mathbf{X}(t)$  на каждом такте квазислучайным процессом (37).

Решение уравнения Стратоновича для  $i$ -го АСР (50) на первом этапе обработки имеет вид

$$w_{i\,ps1}(t, \mathbf{X}_k) = C_2 w_{i\,ps}(t_k, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^t F_i(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \quad (53)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ ;

$$C_2 = \left[ \int_{\mathbf{X}_k} \sum_{i=1}^M w_{i\,ps}(t_k, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^t F_i(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\} d\mathbf{X}_k \right]^{-1}$$

– нормировочный коэффициент.

Начальным значением для (53) является АСР  $w_{i\,ps}(t_k, \mathbf{X}_k)$ , полученное в конце второго этапа обработки на предыдущем такте (т.е. на  $(k - 1)$ -м такте).

Таким образом, согласно (53) АСР выборки ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , равно

$$w_{i\,ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) = C_2 w_{i\,ps}(t_k, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} F_i(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \quad (54)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

### 3.2. Алгоритмы на втором этапе обработки

На втором этапе потактовой обработки вычисления производятся в дискретном времени в точках перехода от одного такта к другому, т.е. в моменты времени  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), когда происходит возможная смена состояния ДП  $\Theta_j(t_{k+1})$ . Задача вычислений при этом состоит в том, чтобы на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , получить соотношения, характеризующие совместную АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  и соответствующее АСР  $w_{i\,ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  выборки ВС  $[\mathbf{X}_k^T(t), \Theta_{jk}]^T$ .

Для вывода искоемых соотношений на втором этапе обработки введем в рассмотрение вспомогательную совместную АПВ

$$p_2 \triangleq p(t_{k+1}, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}, \Theta_k, \mathbf{X}_k | \Xi^{t_{k+1}+0})$$

применительно к значениям компонент ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  в два соседних момента времени,  $t_k$  и  $t_{k+1}$  [21].

Согласно теореме умножения вспомогательная АПВ  $p_2$  с учетом (45) может быть представлена в виде

$$p_2 = p(t_{k+1}, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_k | \Xi^{t_{k+1}+0}, \Theta_k, \mathbf{X}_k) \times p(t_{k+1} - 0, \Theta_k, \mathbf{X}_k | \Xi^{t_{k+1}+0}) = v_{\Theta} v_{\mathbf{X}} p_{p1}(t_{k+1} - 0, \Theta_k, \mathbf{X}_k), \quad (55)$$

где

$$v_{\Theta} = v(\Theta_{k+1} | \Theta_k) \triangleq p(t_{k+1} + 0, \Theta_{k+1} | t_{k+1} - 0, \Theta_k), \quad (56)$$

$$v_{\mathbf{X}} = v(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{X}_k) \triangleq p(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$$

– плотности вероятностей переходов (ПВП) соответствующих случайных процессов  $\Theta_j(t)$  и  $\mathbf{X}(t)$ . При получении (55) учтено, что процессы  $\Theta_j(t)$  и  $\mathbf{X}(t)$  априори независимы.

Проинтегрировав обе части равенства (55) по всем областям существования параметров  $\Theta_k$  и  $\mathbf{X}_k$ , получим

$$p_{ps}(t_{k+1}, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\Theta_k} \int_{\mathbf{X}_k} v_{\Theta} v_{\mathbf{X}} p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \Theta_k, \mathbf{X}_k) d\Theta_k d\mathbf{X}_k, \quad (57)$$

где  $p_{ps}(t_{k+1}, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}) \triangleq p(t_{k+1}, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | \Xi^{t_{k+1}+0})$ .

Соотношение (57) представляет собой рекуррентное уравнение Стратоновича для совместной АПВ  $p_{ps}(t_{k+1}, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})$ . Оно позволяет при заданном начальном распределении последовательно для  $k = 0, 1, 2, \dots$  вычислять совместную АПВ  $p_{ps}(t_{k+1}, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})$  на втором этапе обработки  $k$ -го такта, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ .

Входящие в (57) ПВП  $v_{\Theta}$  и  $v_{\mathbf{X}}$  определяются моделями компонент ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  (34) и (36), а совместная АПВ  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  вычисляется согласно (49) в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$  при обработке принимаемых ВОС-сигналов на первом этапе.

Для ДП  $\Theta_j(t)$  связь между ПВП  $v(\Theta_{k+1} | \Theta_k)$  и соответствующими вероятностями перехода (34) устанавливается соотношением [15, 21]:

$$v(\Theta_{k+1}|\Theta_k) = \begin{cases} v_1(\Theta_{k+1}|\Theta_k = \vartheta_1) = \sum_{j=1}^M \pi_{1j}(t_{k+1})\delta(\Theta_{k+1} - \vartheta_j) & \text{при } \Theta_k = \vartheta_1, \\ v_2(\Theta_{k+1}|\Theta_k = \vartheta_2) = \sum_{j=1}^M \pi_{2j}(t_{k+1})\delta(\Theta_{k+1} - \vartheta_j) & \text{при } \Theta_k = \vartheta_2, \\ \vdots \\ v_i(\Theta_{k+1}|\Theta_k = \vartheta_i) = \sum_{j=1}^M \pi_{ij}(t_{k+1})\delta(\Theta_{k+1} - \vartheta_j) & \text{при } \Theta_k = \vartheta_i, \\ \vdots \\ v_M(\Theta_{k+1}|\Theta_k = \vartheta_M) = \sum_{j=1}^M \pi_{Mj}(t_{k+1})\delta(\Theta_{k+1} - \vartheta_j) & \text{при } \Theta_k = \vartheta_M, \end{cases} \quad (58)$$

где  $i = \overline{1, M}$ .

Получим основное соотношение для вычисления АСР выборки ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  в конце второго этапа обработки сигналов на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ .

Выражение (57), характеризующее совместную АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})$ , с учетом формулы связи между АПВ и АСР (43) для момента времени  $t_{k+1} + 0$  принимает вид

$$p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} \times \left[ \int_{\Theta_k} v_{\Theta} \sum_{m=1}^M w_{mps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) \delta(\Theta_k - \vartheta_m) d\Theta_k \right] d\mathbf{X}_k. \quad (59)$$

Согласно (58) формула связи между ПВП  $v_{\Theta} = v(\Theta_{k+1}|\Theta_k)$  и вероятностями перехода (34) при  $\Theta_k = \vartheta_m$  характеризуется следующим выражением:

$$v_{\Theta m} = v(\Theta_{k+1}|\Theta_k = \vartheta_m) = \sum_{j=1}^M \pi_{mj}(t_{k+1})\delta(\Theta_{k+1} - \vartheta_j). \quad (60)$$

Внеся в (59) ПВП  $v_{\Theta}$  под знак суммы и учитывая (60), находим

$$p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} \left\{ \int_{\Theta_k} \sum_{m=1}^M \left[ \sum_{i=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1})\delta(\Theta_{k+1} - \vartheta_i) \right] \times w_{mps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) \delta(\Theta_k - \vartheta_m) d\Theta_k \right\} d\mathbf{X}_k. \quad (61)$$

Согласно (42) в точках возможной смены состояния ДП  $\Theta_j(t)$ , т.е. в моменты времени  $t_{k+1} + 0, k = 0, 1, 2, \dots$ , для АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k)$  выполняется соотношение

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) w_{mps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k). \quad (62)$$

С учетом (62) после преобразований формула (61), определяющая совместную АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  в конце второго этапа обработки  $k$ -го такта, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , окончательно принимает вид

$$p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} \sum_{i=1}^M w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) \delta(\Theta_{k+1} - \vartheta_i) d\mathbf{X}_k. \quad (63)$$

Далее, выразив левую часть (63) по формуле связи между АПВ и АСР (43) и проинтегрировав обе части этого равенства по всей области существования ДП  $\Theta_{k+1}$ , находим

$$\sum_{i=1}^M w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \sum_{i=1}^M \left[ \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k \right].$$

Полученное равенство выполняется для любого члена суммы.

Тогда имеем, что окончательное соотношение, определяющее АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  выборки ВС  $[\mathbf{X}_{k+1}^T, \Theta_{j(k+1)}]^T$  применительно к  $j$ -му НКА в конце второго этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , определяется следующим соотношением:

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (64)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, i = \overline{1, M}$ .

Входящее в (64) АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k)$  характеризуется согласно (62).

Формула (64) позволяет при известном начальном распределении последовательно при  $k = 0, 1, 2, \dots$  вычислить АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  выборки ВС  $[\mathbf{X}_{k+1}^T, \Theta_{j(k+1)}]^T$  в конце второго этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в дискретный момент времени  $t_{k+1} + 0$ , и, следовательно, на этой основе получить оптимальные оценки  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$  (40) и  $\hat{\Theta}_{j(k+1)}$  (41).

#### 4. ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ПО ДИСКРЕТНОМУ ПРОЦЕССУ

Как отмечено во введении, с учетом специфики навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов), заключающейся в том, что время корреляции компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  много больше длительности тактового интервала ДП  $\Theta_j(t)$ , при решении задачи синтеза применительно к оцениваемому дискретно-непрерывному ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_{jk}]^T$ , характеризуемому (16) и (28)–(30), используем метод обратных связей по ДП  $\Theta_j(t)$  [14–17].

Тогда совместная АПВ  $p_{ps}(t, \Theta, \mathbf{X}) \triangleq p(t, \Theta, \mathbf{X} | \Xi')$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_{jk}]^T$  согласно методу обратных связей по ДП  $\Theta_j(t)$  по теореме умножения представляется в следующем виде [15, 21]:

$$p_{ps}(t, \Theta, \mathbf{X}) = p_{ps}(t, \mathbf{X}) p_{ps}(t, \Theta | \mathbf{X}), \quad (65)$$

где  $p_{ps}(t, \mathbf{X}) \triangleq p(t, \mathbf{X} | \Xi')$  – АПВ вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ ;  $p_{ps}(t, \Theta | \mathbf{X}) \triangleq p(t, \Theta | \mathbf{X}, \Xi')$  – условная по  $\mathbf{X}$  АПВ ДП  $\Theta_j(t)$ .

Выразим условную АПВ  $p_{ps}(t, \Theta | \mathbf{X})$  ДП  $\Theta_j(t)$  через условные апостериорные вероятности (АВ)  $P_{ips}(t | \mathbf{X})$ :

$$p_{ps}(t, \Theta | \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t | \mathbf{X}) \delta(\Theta - \vartheta_i), \quad (66)$$

где  $P_{ips}(t | \mathbf{X}) \triangleq P(t, \Theta = \vartheta_i | \mathbf{X}, \Xi')$  – условная по  $\mathbf{X}$  АВ состояния ДП при  $\Theta = \vartheta_i$ .

С учетом (66) совместная АПВ  $p_{ps}(t, \Theta, \mathbf{X})$  (65) оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_{jk}]^T$  определяется следующим соотношением:

$$p_{ps}(t, \Theta, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t | \mathbf{X}) p_{ps}(t, \mathbf{X}) \delta(\Theta - \vartheta_i). \quad (67)$$

На основании (67) с учетом формулы связи (43) между совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta, \mathbf{X})$  и АСР  $w_{ips}(t, \mathbf{X})$  при  $\Theta(t) = \vartheta_i$  для всех  $t \in [t_k, t_{k+1})$  разложе-

ние АСР применительно к методу обратных связей по ДП  $\Theta_j(t)$  имеет вид [15, 21]

$$w_{ips}(t, \mathbf{X}) = p_{ps}(t, \mathbf{X}) P_{ips}(t | \mathbf{X}), \quad (68)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, i = \overline{1, M}$ .

Для формирования оптимальных оценок  $\hat{\Theta}_{jk}$  и  $\hat{\mathbf{X}}_k$  необходимо знать АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X})$  и условные АВ  $P_{ips}(t | \mathbf{X})$ , где  $i = \overline{1, M}$ , на каждом такте на первом и втором этапах обработки принимаемых ВОС-сигналов.

##### 4.1. Алгоритмы на первом этапе обработки

Получим алгоритм для вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$  на первом этапе обработки.

На основании уравнения Стратоновича для АСР  $w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k)$  (50) на первом этапе потактовой обработки найдем соответствующее уравнение Стратоновича для АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k)$ .

Подставив формулу (68), характеризующую разложение АСР  $w_{ips}(t, \mathbf{X})$  применительно к методу обратных связей по ДП  $\Theta_j(t)$ , в выражение (50), находим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t | \mathbf{X}_k)] = \\ & = [F_i(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Theta X}(t)] p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t | \mathbf{X}_k), \end{aligned} \quad (69)$$

где функции  $F_i(t, \mathbf{X}_k)$  и  $F_{\Theta X}(t)$  определяются согласно (51) и (52) соответственно.

Просуммировав обе части равенства (69) по всем значениям  $i$  с учетом условия нормировки  $\sum_{i=1}^M P_{ips}(t | \mathbf{X}_k) = 1$ , имеем, что уравнение Стратоновича для АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k)$  выборки оцениваемого вектора НП  $\mathbf{X}_k$  на первом этапе обработки для  $k$ -го такта имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) = [F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Theta X}(t)] p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k), \quad (70)$$

где функции  $F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k)$  и  $F_{\Theta X}(t)$  с учетом (51), (52) и (68) вычисляются по формулам:

$$F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k) \triangleq \sum_{i=1}^M F_i(t, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t | \mathbf{X}_k), \quad (71)$$

$$\begin{aligned} F_{\Theta X}(t) & \triangleq \int_{\mathbf{X}_k} \sum_{i=1}^M F_i(t, \mathbf{X}_k) w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k = \\ & = \int_{\mathbf{X}_k} \sum_{i=1}^M F_i(t, \mathbf{X}_k) p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t | \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k = \\ & = \int_{\mathbf{X}_k} F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k) p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k = M_{\mathbf{X}_k} \{F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k)\}. \end{aligned} \quad (72)$$

Как известно, при синтезе оптимальных алгоритмов приема и обработки сигналов на основе метода обратных связей по ДП используется один из двух способов вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$  [15, 21].

Первый способ вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$  (более сложный и более точный) основан на использовании разложения АСР  $w_{ips}(t, \mathbf{X})$  в виде (68) в уравнении Стратоновича (50). Второй способ вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$  (более простой и несколько менее точный) опирается на использование разложения (68) уже в решении уравнения Стратоновича (54) в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$  [15, 21].

Особенностью (недостатком) первого способа вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$  является то, что в алгоритме на каждом такте необходимо выполнять текущее усреднение по ДП  $\Theta_j$ , т.е. вычислять функцию  $F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k)$ , которая определяется соотношением (71).

При втором способе вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$  на каждом такте достаточно знать не ее текущее значение, а только значение в конце первого этапа обработки, т.е. АПВ  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$ . Вследствие этого на интервале  $[t_k, t_{k+1})$  не требуется текущего вычисления функции  $F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k)$  (69). Отмеченное достоинство второго способа особенно значимо в случае применения навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов), для которых характерно малое отношение сигнал/шум на входе приемника и при обработке необходимо накопление определенного числа элементарных посылок.

По этой причине в работе использован второй способ вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$ .

Подставив выражение (68) в формулу (54), представляющую собой решение уравнения Стратоновича для  $i$ -го АСР  $w_{ips1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , находим

$$p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}_k) = C_2 p_{ps}(t_k, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t_k | \mathbf{X}_k) \times \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} F_i(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \quad (73)$$

где производная по времени от парциального ( $i$ -го) ЛФП  $F_i(t, \mathbf{X}_k)$  определяется согласно (51);  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $i = \overline{1, M}$ .

Просуммировав обе части равенства (73) по всем значениям  $i$ , с учетом условия нормировки, получим, что при втором способе вычисления

АПВ  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  выборки оцениваемого вектора НП  $\mathbf{X}_k$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , имеет вид

$$p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) = C_2 p_{ps}(t_k, \mathbf{X}_k) \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_k | \mathbf{X}_k) \times \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} F_i(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (74)$$

где нормировочный коэффициент  $C_2$  согласно (53) и (68) определяется выражением

$$C_2 = \left[ \int_{\mathbf{X}_k} p_{ps}(t_k, \mathbf{X}_k) \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_k | \mathbf{X}_k) \times \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} F_i(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\} d\mathbf{X}_k \right]^{-1};$$

производная по времени от парциального ЛФП  $F_i(t, \mathbf{X}_k)$  характеризуется (51).

Начальным значением для (74) является АПВ  $p_{ps}(t_k, \mathbf{X}_k)$ , полученная в конце второго этапа обработки на предыдущем такте, т.е. в момент  $t_k + 0$ .

Как видно из (74), достоинство второго способа вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$  (по сравнению с первым способом [21]) состоит в том, что АПВ  $p_{ps}(t_k, \mathbf{X}_k)$  и условные АВ  $P_{ips}(t_k | \mathbf{X}_k)$  ДП  $\Theta_j(t)$  в данном случае необходимо знать лишь в дискретные моменты времени  $t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и нет необходимости выполнять текущее усреднение по ДП  $\Theta$ , т.е. вычислять функцию  $F_{\Theta}(\tau, \mathbf{X}_k)$  (71) при  $\tau \in [t_k, t_{k+1})$ . Как отмечено выше, этот факт является весьма значимым при применении навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов).

Получим основные расчетные соотношения для условных АВ  $P_{ips}(t | \mathbf{X})$  (66) ДП  $\Theta_j(t)$  на первом этапе обработки сигналов.

Подставив в уравнение Стратоновича для  $i$ -го АСР  $w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k)$  на первом этапе обработки (50) его разложение применительно к методу обратных связей по ДП (68), запишем

$$\frac{\partial P_{ips}(t | \mathbf{X}_k)}{\partial t} p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) + P_{ips}(t | \mathbf{X}_k) \frac{\partial p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k)}{\partial t} = [F_i(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Theta X}(t)] p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t | \mathbf{X}_k), \quad (75)$$

где функции  $F_i(t, \mathbf{X}_k)$  и  $F_{\Theta X}(t)$  определяются выражениями (51) и (52),  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

С учетом (70) соотношение (75) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ips}(t|\mathbf{X}_k)}{\partial t} p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) + P_{ips}(t|\mathbf{X}_k)[F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k) - \\ - F_{\Theta X}(t)] p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) = \\ = [F_i(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Theta X}(t)] p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t|\mathbf{X}_k). \end{aligned} \quad (76)$$

Выполнив в (76) преобразования, находим, что уравнение для условной АВ  $P_{ips}(t|\mathbf{X}_k)$  ДП  $\Theta_j(t)$  на первом этапе обработки характеризуется следующим соотношением:

$$\frac{\partial P_{ips}(t|\mathbf{X}_k)}{\partial t} = [F_i(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k)] P_{ips}(t|\mathbf{X}_k), \quad (77)$$

где функции  $F_i(t, \mathbf{X}_k)$  и  $F_{\Theta}(t, \mathbf{X}_k)$  определяются согласно (51) и (71) соответственно,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $i = \overline{1, M}$ .

Начальное условие для уравнения (77) формируется на втором этапе обработки ( $k - 1$ )-го такта, т.е. в момент времени  $t_k + 0$ , и в соответствии с (35) имеет вид [15, 23]

$$\begin{aligned} P_{ips}(t_k + 0|\mathbf{X}_k) = \\ = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0|\mathbf{X}_k), \quad i = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (78)$$

Решение уравнения (77) для условной АВ  $P_{ips}(t|\mathbf{X}_k)$  ДП  $\Theta_j(t)$  на первом этапе обработки  $k$ -го такта с учетом (37) характеризуется формулой [15, 23]

$$P_{ips}(t|\mathbf{X}_k) = \frac{P_{ips}(t_k + 0|\mathbf{X}_k) \exp \left[ \int_{t_k}^t F_i(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right]}{\sum_{l=1}^M P_{lps}(t_k + 0|\mathbf{X}_k) \exp \left[ \int_{t_k}^t F_l(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right]}, \quad (79)$$

где функция  $F_i(t, \mathbf{X}_k)$  определяется согласно (51),  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ . Начальное условие  $P_{ips}(t_k + 0|\mathbf{X}_k)$  для (79) определяется (78).

При формировании оптимальной оценки ДП  $\Theta_j(t)$  на  $k$ -м такте все условные АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0|\mathbf{X}_k)$ , где  $i = \overline{1, M}$ , вычисляются в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Поскольку в течение всего полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$  ДП  $\Theta_j(t)$  не меняет своего значения, то к окончанию полуинтервала точность оценивания условных АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0|\mathbf{X}_k)$  ДП  $\Theta_j(t)$  максимальна.

Таким образом, на основе (79) в соответствии с (41) на  $k$ -м такте в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

формируются оптимальные оценки ДП  $\hat{\Theta}_j(t_k)$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

#### 4.2. Алгоритмы на втором этапе обработки

Получим на втором этапе обработки сигналов в дискретном времени в точках перехода от одного такта к другому, т.е. в моменты  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), когда происходит возможная смена состояния ДП  $\Theta_j(t_{k+1})$ , формулы для АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  выборки вектора НП  $\mathbf{X}_{k+1}$  (а также для соответствующих АСР) и для условных АВ  $P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_{k+1})$  ДП  $\Theta_j(t_{k+1})$ .

Подставив в выражение для АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  (64) ее разложение применительно к методу обратных связей (68), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} p_{ps}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}) P_{ips}(t_{k+1}|\mathbf{X}_{k+1}) = \\ = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k. \end{aligned} \quad (80)$$

Отметим, что при получении (80) погрешностью (разрывами 1-го рода) за счет аппроксимации вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  квазислучайным процессом (37) пренебрегаем, и по этой причине АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X})$  полагаем непрерывной по времени, т.е.  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}) = p_{ps}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X})$  [15, 21].

Просуммировав обе части равенства (80) по всем значениям  $i$ , с учетом условия нормировки окончательно получим, что АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  выборки оцениваемого вектора НП  $\mathbf{X}_{k+1}$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в моменты  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \\ = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k. \end{aligned} \quad (81)$$

Начальное условие  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  для (81) вычисляется в соответствии с выражением (74), полученным в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ .

Таким образом, на основе (81) в соответствии с (40) на каждом такте на втором этапе обработки, т.е. в моменты времени  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), формируется оптимальная оценка выборки вектора НП  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ .

Далее получим условные АВ  $P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_{k+1})$ , где  $i = \overline{1, M}$ , на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ . Условные АВ ДП  $\Theta_j(t)$   $P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_{k+1})$  служат начальными

условиями при вычислении на основе (79) условных АВ  $P_{ips}(t|\mathbf{X}_{k+1})$ , где  $t \in [t_{k+1}, t_{k+2})$ , уже для следующего  $(k + 1)$ -го такта.

Согласно (80) условные АВ  $P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_{k+1})$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , определяются выражением

$$P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_{k+1}) = \frac{1}{p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})} \times \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (82)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, i = \overline{1, M}$ .

Входящие в (82) условные АВ  $P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_k)$  ДП  $\Theta_j(t)$  на втором этапе обработки в соответствии с (78) имеют вид

$$P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_k) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0|\mathbf{X}_k), \quad (83) \quad i = \overline{1, M}.$$

Полученные согласно (82) и (83) условные АВ  $P_{ips}(t_{k+1} + 0|\mathbf{X}_{k+1})$  ДП  $\Theta_j(t)$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , представляют собой начальные условия для вычисления на основе (79) условных АВ  $P_{ips}(t|\mathbf{X}_{k+1})$ , где  $t \in [t_{k+1}, t_{k+2})$ , уже для  $(k + 1)$ -го такта.

Таким образом, задача синтеза оптимальных алгоритмов приема и обработки дискретно-непрерывного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t_k)]^T$  применительно к  $j$ -му НКА методами МТО решена.

Далее рассмотрим формирование квазиоптимальных оценок дискретно-непрерывного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t_k)]^T$ .

### 5. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВОС-СИГНАЛОВ В ПЕРСПЕКТИВНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

Чтобы упростить синтезированные оптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов, используем метод гауссовской аппроксимации и получим квазиоптимальные оценки выборки дискретно-непрерывного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t_k)]^T$  [13–15, 17].

В соответствии с методом гауссовской аппроксимации при формировании квазиоптимальных оценок выборки дискретно-непрерывного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t_k)]^T$  применительно к  $j$ -му НКА полагаем, что приняты следующие допущения [15]:

– АПВ  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  выборки оцениваемого вектора НП  $\mathbf{X}_k$  является гауссовской;

– для условных АВ ДП  $\Theta_j(t_k)$  при достаточно высокой апостериорной точности оценивания выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$  выполняются приближенные равенства:

$$P_{ips}(t_k) \approx P_{ips}(t_k|\mathbf{X}_k) \approx P_{ips}\left(t_k \middle| \mathbf{X}_k^*\right), \quad (84)$$

где  $i = \overline{1, M}$ ,  $\mathbf{X}_k^*$  – квазиоптимальная оценка вектора НП  $\mathbf{X}_k$ .

#### 5.1. Алгоритмы на первом этапе обработки

Как было отмечено выше, с учетом специфики навигационных ШПС (в частности, ВОС-сигналов) при разработке алгоритмов используем АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$ , полученную на основе второго способа ее вычисления (74).

Тогда согласно методу гауссовской аппроксимации полагаем, что АПВ  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  (74) выборки оцениваемого вектора НП  $\mathbf{X}_k$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , является гауссовской и имеет следующий вид:

$$p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) = \mathcal{N}\left\{\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^*, \mathbf{K}_k\right\} = \left[(2\pi)^n \det \mathbf{K}_k\right]^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^*\right]^T \mathbf{K}_k^{-1} \left[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^*\right]\right\}, \quad (85)$$

где  $\mathcal{N}$  – символ гауссовского закона распределения; звездочка \* означает, что АПВ  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  аппроксимирована гауссовской кривой (85);

$$\mathbf{X}_k^* \triangleq \mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0) = M_{ps1}^*[\mathbf{X}_k] \triangleq \int_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k \quad (86)$$

– квазиоптимальная оценка выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ ;

$$\mathbf{K}_k \triangleq \mathbf{K}(t_k | t_{k+1} - 0) = M_{ps1}^* \left\{ \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^* \right] \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^* \right]^T \right\} = \int_{\mathbf{X}_k} \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^* \right] \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^* \right]^T \times p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k \quad (87)$$

– матрица апостериорных одномерных центральных моментов второго порядка (матрица ковариаций) квазиоптимальных ошибок оценивания выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ . Видно, что матрица ковариаций квазиоптимальных ошибок  $\mathbf{K}_k$  в соответствии с (30) имеет размер  $(n \times n)$ , где  $n$  – число компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ .

Отметим, что принятое обозначение типа  $\mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$  соответствует тому, что оценка формируется на момент времени  $t_k$  по наблюдению  $\mathbf{E}(t)$  до момента времени  $t = t_{k+1} - 0$ .

Далее согласно методу гауссовской аппроксимации в соответствии с критерием максимума АПВ, следуя, по существу, работам [15, 24], получим соотношения, определяющие первый и второй моменты АПВ  $p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  (85), характеризуемой (74), в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ .

Квазиоптимальная оценка (по критерию максимума АПВ) выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0) = \mathbf{X}^*(t_k) + \mathbf{K}(t_k | t_{k+1} - 0) \times \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}^*(t_k)) \Phi'_i(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}^*(t_k)), \quad (88)$$

где

$$\Phi'_i(t, \mathbf{X}^*(t_k)) \triangleq \left[ \frac{\partial \Phi_i(t, \mathbf{X}^*(t_k))}{\partial \mathbf{X}^*(t_k)} \right]^T = \int_{t_k}^t \left[ \frac{\partial F_i(\tau, \mathbf{X}^*(t_k))}{\partial \mathbf{X}^*(t_k)} \right]^T d\tau \quad (89)$$

– первая производная по вектору  $\mathbf{X}^*(t_k)$  парциального ( $i$ -го) ЛФП  $\Phi_i(t, \mathbf{X}^*(t_k))$ , представляющая собой вектор-столбец размером  $(n \times 1)$ ;

$$\Phi_i(t, \mathbf{X}_k) = \int_{t_k}^t F_i(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \quad (90)$$

– парциальный ЛФП (т.е. ЛФП, соответствующий значению ДП  $\theta_k = \vartheta_i$ );  $F_i(t, \mathbf{X}_k)$  – производная по времени парциального ЛФП применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов  $\mathbf{S}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  от всех одновременно видимых НКА, определяемая согласно (51);  $k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, M$ .

Матрица ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}(t_k | t_{k+1} - 0)$  выборки вектора

НП  $\mathbf{X}_k$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , характеризуется следующим выражением:

$$\mathbf{K}(t_k | t_{k+1} - 0) = \left[ \mathbf{K}^{-1}(t_k) - \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}_k^*) \times \left\{ \Phi_i''(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k^*) - \left[ \Phi_i'(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k^*) - \sum_{g=1}^M P_{gps}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}_k^*) \Phi_g'(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k^*) \right] \times \left[ \Phi_i'(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k^*) \right]^T \right\} \right]^{-1}, \quad (91)$$

где

$$\Phi_i''(t, \mathbf{X}^*(t_k)) \triangleq \frac{\partial^2 \Phi_i(t, \mathbf{X}^*(t_k))}{(\partial \mathbf{X}^*(t_k))^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^*(t_k)} \right]^T \frac{\partial \Phi_i(t, \mathbf{X}^*(t_k))}{\partial \mathbf{X}^*(t_k)} = \int_{t_k}^t \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^*(t_k)} \right]^T \left[ \frac{\partial F_i(\tau, \mathbf{X}^*(t_k))}{\partial \mathbf{X}^*(t_k)} \right]^T d\tau \quad (92)$$

– вторая производная по вектору  $\mathbf{X}^*(t_k)$  парциального ( $i$ -го) ЛФП  $\Phi_i(t, \mathbf{X}^*(t_k))$ , представляющая собой матрицу размером  $(n \times n)$ .

Отметим, что в формулах (88)–(92) и далее производная от скалярной функции по вектору-столбцу, как обычно, представляет собой вектор-

строку, а выражение  $\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^*(t_k)} \right]^T$  является дифференциальным оператором, воздействующим на функцию, расположенную от него справа.

Преимуществом полученных квазиоптимальных алгоритмов (86)–(92) (т.е. алгоритмов в случае второго способа вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$ ) при сравнении, например, с [21] является то, что все операции в НАП над выходными сигналами корреляционных приемников

$$\Phi_i(t, \mathbf{X}^*(t_k)) = \int_{t_k}^t F_i(\tau, \mathbf{X}^*(t_k)) d\tau$$

и дискриминаторов

$$\frac{\partial \Phi_i(t, \mathbf{X}^*(t_k))}{\partial \mathbf{X}^*(t_k)}$$

производятся после завершения накопления на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ . Это позволяет учесть специфику обработки ШПС (в частности ВОС-сигналов). Кроме того, квазиоптимальные алгоритмы (86)–(92) требуют гауссовской аппроксимации АПВ  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  вы-

борки вектора НП  $\mathbf{X}_k$  только в точках  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , т.е. после выполнения накопления применительно к достаточно большому числу элементов ШПС.

Видно, что для формирования квазиоптимальной оценки выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$  согласно (88) и (91) необходимо знать применительно к каждому  $j$ -му НКА условные АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}^*(t_k))$ , где  $i = \overline{1, M}$ . По этой причине представленный алгоритм фильтрации (88) и (91) называют алгоритмом с обратными связями по ДП  $\Theta_j(t_k)$ .

Далее займемся условными АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}_k^*)$ , где  $i = \overline{1, M}$ , входящими в (88) и (91). Условные АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}_k^*)$  ДП  $\Theta_j(t)$  вычисляются согласно (79), и на этой основе формируется квазиоптимальная оценка ДП  $\Theta_{j(k+1)}^*$ .

Для формирования квазиоптимальной оценки ДП  $\Theta_{j(k+1)}^*$  применительно к полуинтервалу  $[t_k, t_{k+1})$  используем приближение первого порядка (84).

Решение о квазиоптимальной оценке ДП  $\Theta_{j(k+1)}^*$  на  $k$ -м такте, где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , принимается на основе (41) с учетом (84) в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ , согласно следующему правилу:

$$\Theta_{j(k+1)}^* = \vartheta_i: \max_{\vartheta_1 \leq \vartheta_i \leq \vartheta_M} \{P_{ips}(t_{k+1} - 0)\}, \quad (93)$$

где  $P_{ips}(t_{k+1} - 0)$  – АВ состояния ДП  $\Theta_j(t)$  применительно к  $j$ -му НКА в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ .

### 5.2. Алгоритмы на втором этапе обработки

На втором этапе обработка информации, полученной на первом этапе  $k$ -го такта, производится в дискретном времени в точке перехода от одного такта к следующему, т.е. в момент времени  $t = t_{k+1} + 0$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . При этом учитываются два фактора.

Один фактор, характеризуемый формулами (64) для АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  или (81) для АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$ , учитывает априорное изменение вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$  на  $k$ -м такте согласно (37) и (38) как квазислучайного процесса. Другой фактор в соответствии с формулами (82) и (83) для условных АВ  $P_{ips}(t_{k+1} + 0 | \mathbf{X}_{k+1})$  учитывает возможную смену состояния ДП  $\Theta_j(t)$  в момент времени  $t = t_{k+1} + 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Приведем соотношения для квазиоптимальной оценки выборки вектора НП  $\mathbf{X}_{k+1}^*$  и для мат-

рицы ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}(t_{k+1} + 0)$  выборки вектора НП  $\mathbf{X}_{k+1}$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , при условии, что  $p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  аппроксимирована гауссовской кривой. В этом случае с учетом (56) имеем, что АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  (81) также носит гауссовский характер.

Тогда с учетом того, что вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  на каждом полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$  аппроксимирован векторным квазислучайным процессом (36)–(38), соотношение для квазиоптимальной оценки  $\mathbf{X}^*(t_{k+1} + 0)$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , на основании (81) имеет вид [15, 21, 24]:

$$\mathbf{X}^*(t_{k+1} + 0) = \Phi_{XX}(t_{k+1}, t_k) \mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0), \quad (94)$$

где переходная матрица состояния  $\Phi_{XX}(t_{k+1}, t_k)$  имеет размер  $(n \times n)$  и определяется согласно (36); квазиоптимальная оценка  $\mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$  вычисляется в конце первого этапа обработки согласно (88).

Выражение, определяющее матрицу ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}(t_{k+1} + 0)$  выборки вектора НП  $\mathbf{X}_{k+1}$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), в соответствии с (81) при учете (36)–(38) записывается в следующем виде [15, 21, 24]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t_{k+1} + 0) &= \\ &= \Phi_{XX}(t_{k+1}, t_k) \mathbf{K}(t_k | t_{k+1} - 0) \Phi_{XX}^T(t_{k+1}, t_k), \end{aligned} \quad (95)$$

где матрица  $\mathbf{K}(t_k | t_{k+1} - 0)$  вычисляется в конце первого этапа обработки согласно (91).

Кроме того, на втором этапе обработки на  $k$ -м такте с учетом квазиоптимальной оценки  $\mathbf{X}_{k+1}^*$  (94) производится формирование начальных значений условных АВ ДП  $\Theta_j(t)$  для первого этапа обработки применительно к следующему  $((k + 1)$ -му) такту, т.е. согласно (82) и (94) вычисляются значения  $P_{ips}(t_{k+1} + 0 | \mathbf{X}_{k+1}^*)$ .

## 6. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА КВАЗИОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВОС-СИГНАЛОВ

Построение структурной схемы квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов, характеризуемых применительно к  $j$ -му НКА ( $j = \overline{1, J}$ ) дискретно-непрерывным ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  (28) и (33), выполняется на основе соотношений (51), (78), (79), (90) и (93) для фор-

мирования квазиоптимальных оценок ДП  $\Theta_j^*(t)$  ( $j = \overline{1, J}$ ), а также (51), (88)–(91) и (94) для формирования квазиоптимальной оценки выборки вектора НП  $\mathbf{X}_{k+1}^*$ .

Отметим, что в соответствии с разработанными алгоритмами, как обычно, может быть предложен целый ряд вариантов структурных схем систем приема и обработки с учетом особенностей вида полезных сигналов  $\mathbf{S}(t)$  (26), условий функционирования системы, предъявляемых требований, элементной базы, особенностей конструкторских решений и т.д. Тем не менее в составе структурной схемы основные модули (узлы) по своему существу и функциональному назначению являются одними и теми же для различных вариантов ее построения.

Структурная схема квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов, выполненная в соответствии с указанными алгоритмами, представлена на рис. 2.

В составе синтезированной системы можно выделить три основные составные части:

1) устройство обработки НП применительно к принимаемому полезному ВОС-сигналу  $s_j(t)$  от  $j$ -го НКА (УОНП $_j$ );

2) модуль формирования квазиоптимальной оценки ДП  $\Theta_j(t)$  применительно к  $j$ -му НКА (МФОДП $_j$ );

3) модуль формирования квазиоптимальной оценки НП (МФОНП).

На схеме отдельно выделен модуль формирования опорного ВОС-сигнала применительно к  $j$ -му НКА (МФОС $_j$ ). Векторные связи на рис. 2 показаны двойными линиями.

Заметим, что на структурной схеме рис. 2 во избежание излишней громоздкости у составных частей УОНП $_j$  и МФОДП $_j$  показаны связи, относящиеся только к какому-либо одному  $j$ -му НКА, а не ко всей совокупности  $J$  одновременно видимых НКА.

Видно, что составные части синтезированной системы охвачены соответствующими перекрестными связями, которые характеризуют факт использования при совместной обработке ДП  $\Theta_j$  и вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  метода с обратными связями по ДП  $\Theta_j$  для разложения совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j, \mathbf{X})$ .

На вход синтезированной системы поступают радиосигналы от всех одновременно видимых НКА, определяемые ВН  $\Xi(t)$  в соответствии с (9)–(12) и (26); выходные сигналы системы представляют собой квазиоптимальные оценки  $\mathbf{X}^*(t_{k+1} + 0)$  и  $\Theta_j^*(t_{k+1} - 0)$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

Устройство МФОДП $_j$  (применительно к  $j$ -му НКА, где  $j = \overline{1, J}$ ) является  $M$  канальным, что соответствует каждому возможному значению ДП  $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}_j$ , где  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{1, J}$ .

Основой каждого канала по существу является корреляционный приемник КП $_i$  ( $i = \overline{1, M}$ ), на выходе которого формируется сигнал парциального ( $i$ -го) ЛФП  $\Phi_i(t, \mathbf{X}_k)$ , характеризуемого согласно (51) и (90). Синхронизация работы интеграторов каждого КП $_i$  производится тактовыми импульсами (ТИ) в моменты времени  $t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). В состав КП $_i$  входит модуль формирования на основе наблюдений  $\Xi(t)$  и опорного ВОС-сигнала  $S_i(t, \mathbf{X}_k^*)$  производной по времени парциального ЛФП  $F_i(t, \mathbf{X}_k)$  согласно алгоритму (51), а также интегратор.

Выходные сигналы КП $_i$   $\Phi_i(t, \mathbf{X}_k)$  (где  $i = \overline{1, M}$ ) поступают на модуль вычисления АВ (МВАВ), функционирующий согласно алгоритмам (79) и (84) при начальных условиях (НУ) (78). МВАВ имеет  $M$  входов и две группы выходов. Каждая группа содержит  $M$  выходов. Выходные сигналы одной группы условных АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}_k^*)$ , где  $i = \overline{1, M}$ , поступают на умножители УОНП $_j$ , где реализуется алгоритм на основе метода с обратными связями по ДП  $\Theta_j(t_k)$ . Выходные сигналы другой группы условных АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0)$ , где  $i = \overline{1, M}$ , подаются на модуль принятия решения МПР, функционирующий согласно алгоритму (93). На выходе МПР в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , на каждом такте  $[t_k, t_{k+1})$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) формируется квазиоптимальная оценка ДП  $\Theta_j^*(t_{k+1} - 0)$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

Синтезированное УОНП $_j$  (применительно к  $j$ -му НКА, где  $j = \overline{1, J}$ ) в своей основе содержит  $M$  каналов. Каждый из каналов по существу является оптимальным многомерным дискриминатором МД $_i$  (где  $i = \overline{1, M}$ ). Мерность каждого дискриминатора МД $_i$  определяется размером вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  и равна  $(n \times 1)$ .

Каждый дискриминатор МД $_i$  содержит блоки формирования парциального ( $i$ -го) ЛФП  $\Phi_i(t, \mathbf{X}_k^*)$ , определяемого в соответствии с (51) и (90), и МВ согласно (89) первой производной по вектору  $\mathbf{X}_k^*$  парциального ( $i$ -го) ЛФП  $\Phi_i'(t, \mathbf{X}_k^*)$ . Далее согласно (88) каждый сигнал  $\Phi_i'(t, \mathbf{X}_k^*)$  подается на соответствующий умножитель. На другие

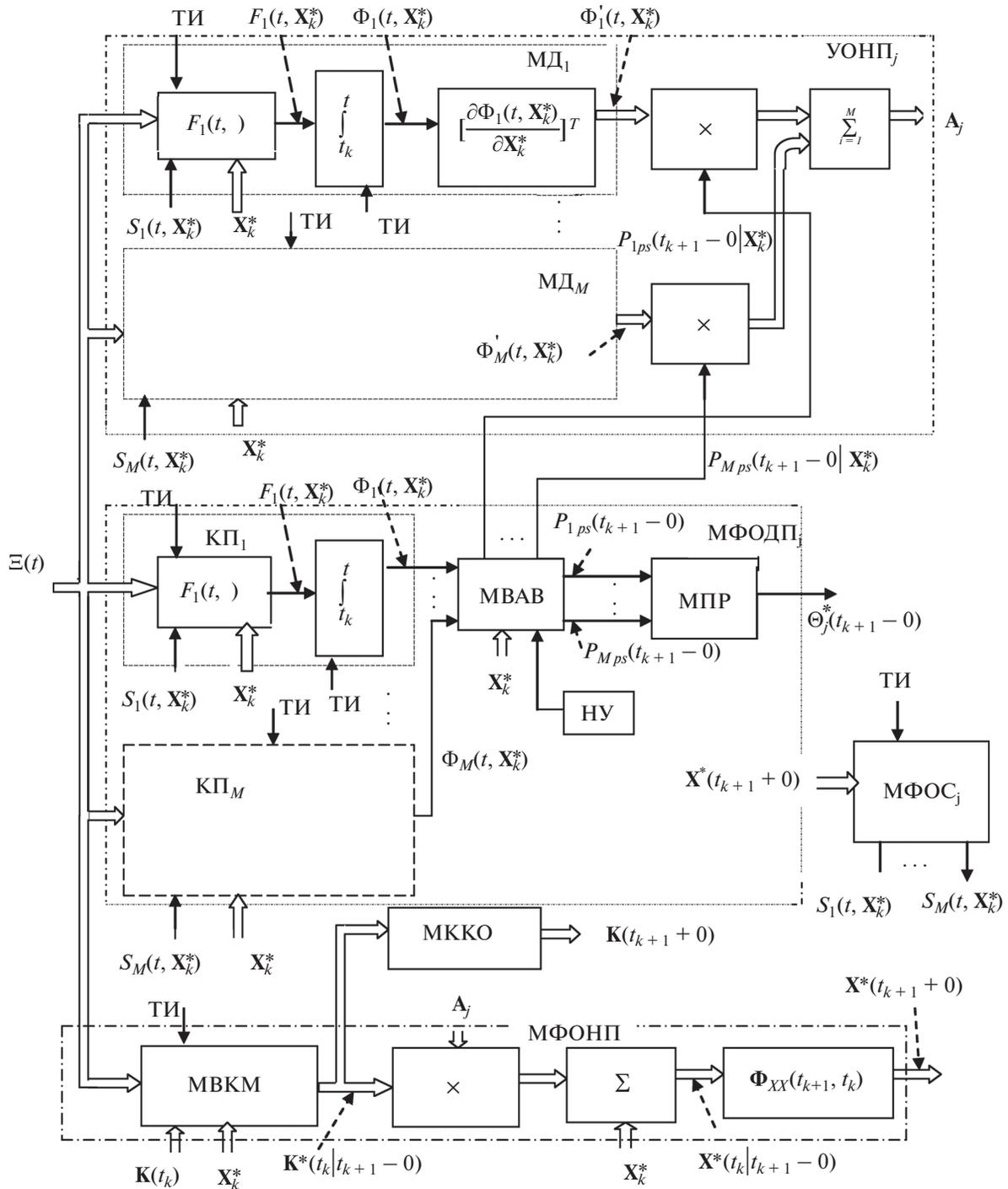


Рис. 2. Структурная схема квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов.

входы умножителей поступают вычисленные в  $\text{МФОДП}_j$  условные АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}_k^*)$ , которые реализуют в алгоритме обработки обратные связи по ДП  $\Theta_j$ . Выходные сигналы умножителей, являющиеся парциальными сигналами ошибки,

подаются на сумматор, на выходе которого в соответствии с (88) регистрируется векторный сигнал  $A_j$  (рис. 2):

$$A_j = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} - 0 | \mathbf{X}^*(t_k)) \Phi'_i(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}^*(t_k)).$$

Векторный сигнал  $A_j$  подается на МФОНП для формирования квазиоптимальной оценки  $X^*(t_k | t_{k+1} - 0)$ .

В состав МФОНП входят модуль вычисления матрицы ковариаций (МВМК) квазиоптимальных ошибок оценивания  $K(t_k | t_{k+1} - 0)$ , реализующий алгоритмы (91) и (92), и модуль ковариаций квазиоптимальных ошибок (МККО), характеризующийся соотношением (95). Сигнал на выходе МККО определяет матрицу ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания  $K(t_{k+1} + 0)$  выборки вектора НП  $X_{k+1}$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Как известно, матрица  $K(t_{k+1} + 0)$  в общем случае зависит от векторного наблюдения  $\Xi(t)$  (26) и от квазиоптимальной оценки  $X_k^*$ , что и отражено на рис. 2.

Кроме того, сигнал с выхода МВМК  $K(t_k | t_{k+1} - 0)$  подается на вход умножителя, на другой вход которого от УОНП<sub>j</sub> поступает сигнал  $A_j$ .

На выходе умножителя регистрируется сигнал коррекции, необходимый для реализации алгоритма (88) при формировании квазиоптимальной оценки  $X^*(t_k | t_{k+1} - 0)$ . Следуя (88) и суммируя квазиоптимальную оценку предыдущего такта  $X^*(t_k)$  с сигналом коррекции, формируем оценку  $X^*(t_k | t_{k+1} - 0)$ .

В соответствии с (94), учитывая переходную матрицу состояния  $\Phi_{XX}(t_{k+1}, t_k)$ , на выходе МФОНП получим квазиоптимальную оценку  $X^*(t_{k+1} + 0)$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрены навигационные ШПС и, в частности, быстро развивающиеся ВОС-сигналы, которые предназначены для применения в современных и перспективных ГНСС, таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай).

Основной научный результат работы состоит в том, что методами МТО путем решения задачи синтеза получены аналитические выражения для квазиоптимальной оценки выборки вектора НП  $X^*(t_{k+1} + 0)$  и матрицы ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания  $K(t_{k+1} + 0)$  выборки вектора НП  $X_{k+1}$ , а также для квазиоптимальных оценок ДП  $\Theta_{j(k+1)}^*$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

На этой основе разработана соответствующая структурная схема квазиоптимальной системы

приема и обработки ВОС-сигналов перспективных ГНСС.

При решении задачи синтеза особенностями, учитывающими специфику навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов), являлись следующие два фактора.

1. В алгоритмах при разложении совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j, X)$  дискретно-непрерывного ВС  $[X^T(t), \Theta_j]^T$  был применен метод с обратными связями по ДП  $\Theta_j$ .

2. Для вычисления АПВ  $p_{ps1}(t, X)$  было использовано не уравнение Стратоновича для совместной АПВ  $p_{ps1}(t, \Theta_{jk}, X_k)$  (или для соответствующего АСР  $w_{ip_{ps1}}(t, X_k)$ ), а его решение. Это особенно значимо в случае применения навигационных ШПС (в частности, ВОС-сигналов), для которых характерно малое отношение сигнал/шум на входе приемника НАП, и при обработке необходимо накопление определенного числа элементарных посылок ПСП дальномерного кода  $g(t)$ .

Полученные аналитические соотношения, разработанные алгоритмы и представленная структурная схема системы приема и обработки ВОС-сигналов при дальнейшей практической реализации применительно к различным ГНСС подвергаются конкретизации и дальнейшему упрощению в зависимости от категорий пользователей, типов приемников НАП и круга решаемых задач.

Результаты работы также применимы в случаях ШПС современных ГНСС, у которых ВОС-сигналы пока не используются.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Betz J.W. // Proc. National Technical Meeting of the Institute of Navigation (ION – NTM'99), Jan. 1999. P. 639.
2. Betz J.W. // Navigation. J. ION. 2001. V. 48. № 4. P. 227.
3. Hein G.W., Godet J., Issler J.-L. et al. // Proc. Institute of Navigation Global Positioning System Meeting (ION GPS 2002). Portland. 24–27 Sep. 2002. Fairfax: ION, 2002. P. 266.
4. Ярлыков М.С. Меандровые шумоподобные сигналы (ВОС-сигналы) и их разновидности в спутниковых радионавигационных системах. М.: Радиотехника, 2017.
5. Betz J.W. // Proc. ION GPS 2000. Institute of Navigation, September 2000. P. 2140.
6. Lachapelle G., Petovello M. // Inside GNSS, May/June 2006. V. 1. № 4. P. 22.
7. Betz J.W., Blanco M.A., Cahn Ch.R. et al. // Proc. 19th Intern. Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2006). September 2006. P. 2080.

8. *Wallner S., Hein G.W., Avila-Rodriguez J.-A.* // Proc. European Space Agency, Navitec 2006, Noordwijk, the Netherlands, Dec. 2006. CD ROM.
9. *Julien O., Macabiau Ch., Issler J.-L., Ries L.* // Inside GNSS. Spring 2007. V. 2. № 3. P. 50.
10. *Gao G.X.* // CD ROM Stanford University PNT Symp. 2010.11.09.
11. *Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др.* Сетевые спутниковые радионавигационные системы. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1993.
12. *Соловьев Ю.А.* Системы спутниковой навигации. М.: Эко-Трендз, 2000.
13. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
14. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
15. *Ярлыков М.С., Миронов М.А.* Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
16. *Чердынцев В.А.* Статистическая теория совмещенных радиотехнических систем. Минск: Высшая школа, 1980.
17. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1991.
18. Global Positioning Systems Directorate. Systems Engineering and Integration. Interface Specification IS – GPS – 200. – Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces, IS – GPS –200G, 05 September 2012.
19. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
20. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
21. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 8. С. 933.
22. *Ярлыков М.С., Шишкин В.Ю.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 2. С. 260.
23. *Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2003. Т. 48. № 11. С. 1356.
24. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // Радиотехника. 2004. № 7. С. 18.