РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 11, с. 1071–1077

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67.01

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЙКОНАЛА НА ПОВЕРХНОСТИ ГРАДИЕНТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЛИНЗЫ

 А. С. Венецкий*

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

**E-mail: AVenetsky@yandex.ru*

Поступила в редакцию 28.07.2020 г.
После доработки 28.07.2020 г.
Принята к публикации 17.09.2020 г.

Получена формула для эйконала на выходной поверхности осесимметричной диэлектрической линзы с радиальным градиентом показателя преломления в цилиндрической системе координат при смещении источника из фокуса, расположенного на оси линзы. Формула представляет собой сумму членов первого и второго порядка малости разложения эйконала по степеням величин радиального и продольного смещений источника из фокуса. Коэффициенты при членах разложения имеют особенность на оси, поэтому найдены их параксиальные разложения, в которых эта особенность устранена. Проведено исследование погрешности полученных формул при вычислении эйконала в апертуре апланатических линз.

DOI: 10.31857/S0033849421110097

ВВЕДЕНИЕ

Осесимметричные линзы из плавно неоднородного (градиентного) диэлектрика с зависимостью коэффициента преломления от радиальной координаты используются как в оптическом, так и в радиодиапазоне электромагнитных волн и обладают дополнительной степенью свободы по сравнению с линзами из однородного диэлектрика. Исследование аберрационных свойств таких линз усложняется из-за криволинейных траекторий лучей. Классическая (оптическая) теория аберраций таких линз описывает области фокусировки лучей в виде разложения по степеням угла зрения и апертуры линзы [1]. В работах [2–4] развита новая теория аберраций для однородных диэлектрических линз с использованием разложения эйконала по одному параметру – величине смещения источника. В работах [5, 6] эта теория обобщается для линз с цилиндрической симметрией и градиентом диэлектрической проницаемости вдоль декартовой координаты. В данной работе эта теория развивается для градиентных линз с осевой симметрией.

Рассмотрим осесимметричную диэлектрическую линзу с коэффициентом преломления n, зависящим от расстояния от оси линзы. Продольное и поперечное сечение линзы показано на рис. 1а, 1б.

При расположении источника в фокусе O на оси системы (оси z) на выходной поверхности линзы формируется плоский фронт. Предположим, что через любую точку B на выходной поверхности линзы проходит только один луч, выходящий из источника под углом α к оси системы, т.е. обеспечивается взаимно-однозначное соответствие между углом α и расстоянием от оси системы до точки B, которое описывается функцией отображения:

$$r = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = r(\alpha), \quad \alpha = \alpha(r). \tag{1}$$

Луч, выходящий из источника, лежит в плоскости, проходящей через ось линзы в плоскости xOz (см. рис. 1а), и его уравнение имеет вид

$$z = z_1 + \int\limits_{x_1}^{x} \frac{a_1 dx}{\sqrt{n^2(x) - a_1^2}}, \tag{2}$$

где a_1 – параметр луча.

Пусть точка O_1 с координатами $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ – положение смещенного источника (см. рис. 1б). Предположим, что при смещении источника в точку O_1 взаимно-однозначное соответствие множества точек выходной апертуры множеству выходящих из O_1 лучей сохраняется. При этом всегда существует луч, соединяющий точку O_1 и точку B.

Выберем систему координат $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ с центром в фокусе O так, чтобы точка B имела координаты $(x_2, 0, z_2)$. Тогда другие точки будут иметь координаты $P(x_1, 0, z_1)$, $\hat{P}(x_1 + \Delta x, \Delta y, z_1 + \Delta z)$, $O_1(-\delta_X, -\delta_Y, -\delta_Z)$, $O(0, 0, 0)$. При этом $z_2 = F(x_2)$, $z_1 = f(x_1)$, где $z = F(x)$ и $z = f(x)$ – уравнения образующих поверхности линзы соответственно, $\delta_X = \delta_R\cos\varphi$, $\delta_Y = -\delta_R\sin\varphi$.

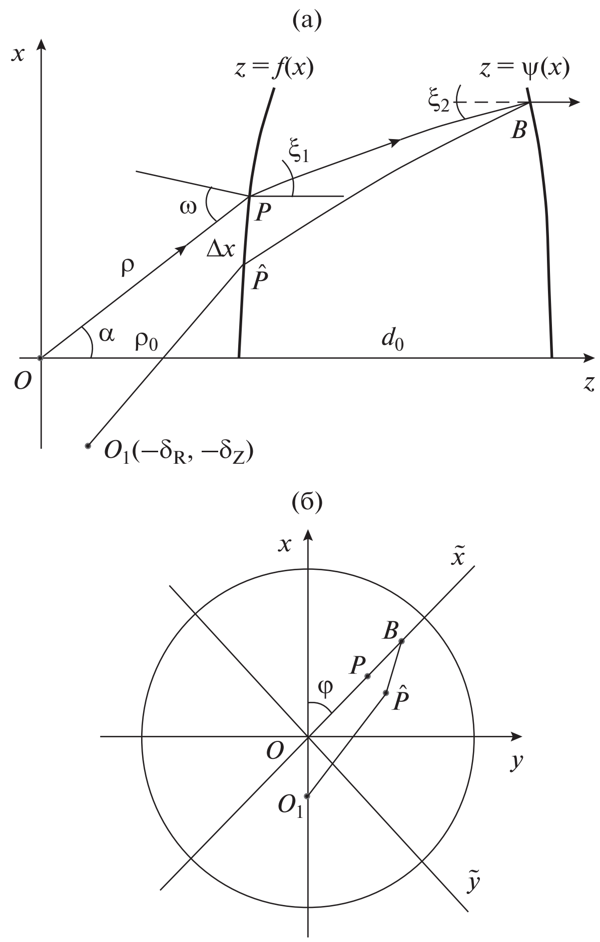

Рис. 1. Геометрия лучей в линзе: а – продольное сечение, б – поперечное сечение.

Уравнение луча, соединяющего точки B и $\hat P$ имеет вид [7]

$$z_2 = \hat z + \int_{\hat r}^{r_2} \frac{\hat a_1 dr}{\sqrt{D(r)}}, \tag{3}$$

$$\Delta\varphi = \int_{\hat r}^{r_2} \frac{a_2 dr}{r^2\sqrt{D(r)}}, \tag{4}$$

где $D(r) = n^2(r) - \hat a_1^2 - a_2^2 \big/ r^2$, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \hat\varphi$, $\hat z = z_1 + \Delta z$, $\hat a_1 = a_1 + k_1\Delta x$, $a_2 = k_2\Delta y$, $\hat r = x_1 + \Delta r$, $\Delta r = \Delta x + \Delta y^2 \big/ 2x_1$,

$$\Delta z = f'(x_1)\Delta x + \frac{f'(x_1)}{2x_1}\Delta y^2 + \frac{f''(x_1)}{2}\Delta x^2,$$

$r_2 = x_2$, $(\hat a_1, a_2)$ – лучевые параметры возмущенного луча, $(a_1, 0)$ – лучевые параметры невозмущенного луча, k_1, k_2 – неизвестные пока коэффициенты.

Эйконал луча, соединяющего точки O_1 и B, имеет вид

$$\hat L = \left|O_1\hat P\right| + \int_{\hat r}^{r_2} \sqrt{D(r)}dr + a_2\Delta\varphi + \hat a_1(z_2 - \hat z). \tag{5}$$

Отметим, что в выбранной системе координат невозмущенный луч (т.е. луч при $\Delta x = \Delta y = 0$) лежит в плоскости xOz, и из уравнения (3) следует:

$$z_2 = z_1 + \int_{x_1}^{x_2} \frac{a_1 dx}{\sqrt{n^2(x) - a_1^2}}, \tag{6}$$

где точка P имеет координаты $(x_1, 0, z_1)$, а точка B – $(x_2, 0, z_2)$.

Для нахождения неизвестного параметра k_1 разложим выражение (3) в ряд по Δx в точке x_1 при условии, что $\Delta y = 0$, и ограничимся членами первого порядка малости:

$$z_2 = z_1 + f'(x_1)\Delta x + \int_{x_1}^{x_2} \frac{a_1}{\sqrt{D(x)}}dx + \\ + \left(k_1\int_{x_1}^{x_2} \frac{n^2(x)}{D(x)^{3/2}}dx - \frac{a_1}{\sqrt{D(x_1)}}\right)\Delta x + \ldots$$

Приравнивая сумму членов при Δx к 0 и учитывая соотношение (6), получим уравнение

$$f'(x_1) + k_1\int_{x_1}^{x_2} \frac{n^2(x)}{D^{3/2}}dx - \operatorname{ctg}\xi_1 = 0,$$

из которого находим

$$k_1 = \frac{\operatorname{ctg}\xi_1 - f'(x_1)}{\int_{x_1}^{x_2} n^2 \big/ D^{3/2} dx}, \tag{7}$$

где $\operatorname{ctg}\xi_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt{D(x_1)}}$, $D(x) = n^2(x) - a_1^2$.

С одной стороны, из выражения (4) можно получить

$$\left.\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\Delta y}\right|_{\Delta x, \Delta y = 0} = k_2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2\sqrt{D}}. \tag{8}$$

С другой –

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta y}{x_1 + \Delta x}\right) = \frac{\Delta y}{x_1} - \frac{\Delta x\Delta y}{x_1^2} + \ldots.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\Delta y}\right|_{\Delta x, \Delta y = 0} = \frac{1}{x_1}. \tag{9}$$

Сравнивая (8) и (9), находим

$$\frac{1}{k_2} = x_1\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2\sqrt{D}}. \tag{10}$$

Представим эйконал (5) в виде ряда по степеням Δx и Δy. Для этого запишем его в виде

$$\hat{L} = \left|O_1\hat{P}\right| + J_1 + J_2 + J_3,$$

где $J_1 = \int_{\hat{r}}^{r_2} \sqrt{D(r)}dr$, $J_2 = a_2\Delta\varphi$, $J_3 = \hat{a}_1(z_2 - \hat{z})$, и продифференцируем:

$$\frac{\partial J_1}{\partial \Delta x} = -k_1\int_{\hat{r}}^{r_2} \frac{\hat{a}_1}{\sqrt{D}}dr - \sqrt{D(\hat{r})},$$

$$\left.\frac{\partial J_1}{\partial \Delta x}\right|_0 = -k_1(z_2 - z_1) - \sqrt{D(x_1)}.$$

Используя соотношение $\mathrm{ctg}\xi_1 = a_1\big/\sqrt{D(x_1)}$, а также выражение (7) для k_1, можно получить

$$\left.\frac{\partial^2 J_1}{\partial \Delta x^2}\right|_0 = -k_1\left(k_1\int_{x_1}^{x_2} \frac{n^2(x)}{D^{3/2}}dx - \frac{a_1}{\sqrt{D(x_1)}}\right) - \frac{n_1n_1' - a_1k_1}{\sqrt{D(x_1)}} =$$

$$= k_1 f'(x_1) - \frac{n_1n_1' - a_1k_1}{\sqrt{D(x_1)}}.$$

Нетрудно получить

$$\hat{a}_1(z_2 - \hat{z}) = (a_1 + k_1\Delta x)(z_2 - z_1 - \Delta z) = a_1(z_2 - z_1) +$$
$$+ [k_1(z_2 - z_1) - a_1 f'(x_1)]\Delta x -$$
$$- [k_1 f'(x_1) + a_1 f''(x_1)/2]\Delta x^2 - a_1\frac{f'(x_1)}{2x_1}\Delta y^2.$$

Продифференцируем J_1, J_2, J_3 по Δy:

$$\frac{\partial J_1}{\partial \Delta y} = -k_2\int_{\hat{r}}^{r_2} \frac{a_2}{r^2\sqrt{D}}dr - \sqrt{D(\hat{r})}\frac{\Delta y}{x_1}, \quad \left.\frac{\partial J_1}{\partial \Delta y}\right|_0 = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 J_1}{\partial \Delta y^2}\right|_0 = -k_2^2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2\sqrt{D(x)}} - \frac{\sqrt{D(x_1)}}{x_1} = -\frac{k_2}{x_1} - \frac{\sqrt{D(x_1)}}{x_1}$$

(была использована формула (10) для k_2),

$$\left.\frac{\partial^2 J_2}{\partial \Delta y^2}\right|_0 = \frac{2k_2}{x_1}, \quad \left.\frac{\partial^2 J_3}{\partial \Delta y^2}\right|_0 = -\frac{f'(x_1)}{x_1}a_1.$$

Используя соотношение, выражающее закон преломления невозмущенного луча в точке P:

$$\sqrt{D(x_1)} + a_1 f'(x_1) = n_1\sin\xi_1 + n_1\cos\xi_1\mathrm{tg}(\omega - \alpha) =$$
$$= n_1\sin(\xi_1 + \omega - \alpha)\big/\cos(\omega - \alpha) = \sin\omega\big/\cos(\omega - \alpha),$$

можно найти

$$\left.\frac{\partial^2(J_1 + J_2 + J_3)}{\partial \Delta y^2}\right|_0 = \frac{k_2}{x_1} - \frac{\sqrt{D(x_1)}}{x_1} - \frac{f'(x_1)}{x_1}a_1 =$$
$$= \frac{k_2}{x_1} - n_1(\sin\xi_1 + \cos\xi_1\mathrm{tg}(\omega - \alpha)) =$$
$$= \frac{k_2}{x_1} - \frac{\sin\omega}{\rho\sin\alpha\cos(\omega - \alpha)}.$$

Тогда можно записать

$$J_1 + J_2 + J_3 = J_0 + (-\sqrt{D(x_1)} - a_1 f'(x_1))\Delta x +$$
$$+ \left(\frac{a_1k_1 - n_1n_1'}{2\sqrt{D(x_1)}} - \frac{1}{2}k_1 f'(x_1) - \frac{1}{2}a_1 f''(x_1)\right)\Delta x^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2(J_1 + J_2 + J_3)}{\partial \Delta y^2}\right|_0 \Delta y, \quad Q_{Y1} = \delta_Y/\rho,$$
$$Q_{Y2} = \frac{\sin\omega}{2\rho\sin\alpha\cos(\omega - \alpha)},$$
$$J_0 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{D(x)}\,dx + a_1(z_2 - z_1).$$

Раскроем также $\left|O_1\hat{P}\right|$ в выражении (5):

$$\left|O_1\hat{P}\right| =$$
$$= \sqrt{(x_1 + \Delta x + \delta_X)^2 + (\Delta y + \delta_Y)^2 + (z_1 + \Delta z + \delta_Z)^2} =$$
$$= \rho + \delta_X\sin\alpha + \delta_Z\cos\alpha + A_2 + Q_{X1}\Delta x + Q_{Y1}\Delta y +$$
$$+ Q_{X2}\Delta x^2 + Q_{Y2}\Delta y^2, \quad Q_{X1} = \frac{\sin\omega}{\cos(\omega - \alpha)} +$$
$$+ \frac{\delta_X}{\rho}\frac{\cos\omega\cos\alpha}{\cos(\omega - \alpha)} - \frac{\delta_Z}{\rho}\frac{\cos\omega\sin\alpha}{\cos(\omega - \alpha)},$$
$$Q_{X2} = \frac{\cos^2\alpha}{2\rho\cos^2(\omega - \alpha)} + \frac{\cos\alpha}{2}f''(x_1),$$
$$Q_{Y1} = \delta_Y/\rho, \quad Q_{Y2} = \frac{\sin\omega}{2\rho\sin\alpha\cos(\omega - \alpha)},$$
$$A_2 = \frac{\cos^2\alpha}{2\rho}\delta_X^2 + \frac{\sin^2\alpha}{2\rho}\delta_Z^2 - \frac{\sin 2\alpha}{2\rho}\delta_X\delta_Z.$$

Окончательно получаем выражение для эйконала (5):

$$\hat{L} = \rho + A_2 + J_0 + \tilde{Q}_{X1}\Delta x + Q_{Y1}\Delta y + \tilde{Q}_{X2}\Delta x^2 + \tilde{Q}_{Y2}\Delta y^2,$$
$$\tilde{Q}_{Y2} = \frac{k_2}{2x_1}, \quad \tilde{Q}_{X2} = Q_{X2} + \frac{a_1k_1 - n_1n_1'}{2\sqrt{D(x_1)}} - \frac{1}{2}k_1 f'(x_1) - \frac{1}{2}a_1 f''(x_1), \tag{11}$$
$$\tilde{Q}_{X1} = \frac{\delta_X}{\rho}\frac{\cos\omega\cos\alpha}{\cos(\omega - \alpha)} - \frac{\delta_Z}{\rho}\frac{\cos\omega\sin\alpha}{\cos(\omega - \alpha)}.$$

Из принципа Ферма следует, что эйконал на истинной траектории достигает минимума и, следовательно, удовлетворяются уравнения:

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial\Delta x}=0,\quad \frac{\partial\hat{L}}{\partial\Delta x}=0,$$

из которых можно найти неизвестные Δx и Δy:

$$\Delta x=-\frac{\tilde{Q}_{X1}}{4\tilde{Q}_{X2}},\quad \Delta y=-\frac{Q_{Y1}}{4\tilde{Q}_{Y2}}.$$

После подстановки полученных Δx, Δy в выражение для эйконала (11), получаем

$$\hat{L}=\rho+A_2+J_0-\frac{\tilde{Q}_{X1}^2}{4\tilde{Q}_{X2}}-\frac{1}{2}\frac{x_1}{k_2}Q_{Y1}^2.$$

В исходной системе координат, в которой точка B имеет координаты ($R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$, z_2), формула для эйконала будет иметь вид:

$$\hat{L}(R,\varphi)=\rho+A_2+J_0-\frac{\cos^2\omega(\delta_R\cos\varphi\cos\alpha-\delta_Z\sin\alpha)^2}{4\tilde{Q}_{X2}\cos^2(\omega-\alpha)\rho^2}-\frac{x_1}{2k_2}\frac{\delta_R^2\sin^2\varphi}{\rho^2}. \quad (12)$$

Полученная формула имеет особенность при $R=0$ и в силу этого теряет точность в малой окрестности оси. В окрестности 0 закон изменения коэффициента преломления можно считать квадратичным:

$$n^2(x)=n_0^2-c_2x^2.$$

Тогда интеграл, входящий в (7), можно представить в виде

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{n^2(x)dx}{\left(n^2(x)-a_1^2\right)^{3/2}}=\frac{n_0^2}{c_2^{3/2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{t^3}-\frac{1}{\sqrt{c_2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2dx}{t^3}, \quad (13)$$

где

$$t=\sqrt{p^2-x^2},\quad p^2=\left(n_0^2-a_1^2\right)/c_2,$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{t^3}=\frac{1}{p^2}\left(\frac{x_2}{\sqrt{p^2-x_2^2}}-\frac{x_1}{\sqrt{p^2-x_1^2}}\right),$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2dx}{t^3}=\frac{x_2}{\sqrt{p^2-x_2^2}}-\frac{x_1}{\sqrt{p^2-x_1^2}}-\arcsin\frac{x_2}{p}+\arcsin\frac{x_1}{p}.$$

В заданном законе отображения (1) $r=x_2$, а угол α можно выразить через x_1, используя соотношения

$$f(x)=f_0+f_2x^2+f_4x^4+\ldots,$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{x_1}{f(x_1)}\right)=\frac{x_1}{f_0}-\left(\frac{f_2}{f_0^2}+\frac{1}{3f_0^3}\right)x_1^3.$$

Закон отображения $x_2=r(\alpha)$ можно привести к виду

$$x_2^2=\beta_2x_1^2-\beta_4x_1^4,$$

где $\beta_2=f_e^2/f_0^2$, а f_e – коэффициент разложения $r(\alpha)=f_e\alpha+p\alpha^3+\ldots$.

Используя соотношения $\omega=\operatorname{arctg}[f'(x_1)]+\alpha$ и $\sin\omega=n(x_1)\sin(\omega-\alpha+\xi_1)$, лучевой параметр можно представить в виде

$$a_1^2=n^2(x_1)\cos^2\xi_1=n_0^2-(c_2+g_2)x_1^2+A_4x_1^4.$$

Теперь интеграл (13) можно записать в виде

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{n^2(x)dx}{D(x)^{3/2}}=\frac{I_0}{x_1^2}+I_2,\quad I_0=\frac{n_0^2}{(c_2+g_2)}\left(\frac{1}{g_1}-\frac{1}{h_1}\right),$$

$$I_2=\frac{n_0^2}{(c_2+g_2)}\left[\frac{A_4}{c_2+g_2}\left(\frac{1}{g_1}-\frac{1}{h_1}\right)+SQ_{21}\right]+\frac{1}{g_1}-\frac{1}{h_1}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{c_2}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_2+g_2}}-\arcsin\frac{\sqrt{\beta_2c_2}}{\sqrt{c_2+g_2}}\right),$$

$$SQ_{21}=\frac{A_4}{2g_1^3}-\frac{A_4-\beta_4(c_2+g_2)/\beta_2}{2\beta_2h_1^3},$$

$$k_1=\mathrm{K}x_1\left(1-\mathrm{M}_2x_1^2\right), \quad (14)$$

$$\mathrm{K}=\frac{h_1(c_2+g_2)}{n_0(g_1-h_1)},\quad \mathrm{M}_2=\Xi_1^2/2+2f_2\Xi_1+$$

$$+\mathrm{K}\left[\left(\Xi_3-\Xi_1^3/6\right)I_0+\Xi_1I_2\right],\quad \Xi_1=-g_1/n_0,$$

$$\Xi_3=-\frac{f_2}{f_0^2}-\frac{1}{3f_0^3}+\frac{c_2\omega_1}{2n_0^3}+\frac{\omega_1^3}{6n_0}\left(\frac{1}{n_0^2}-1\right)+\omega_3\left(\frac{1}{n_0}-1\right),$$

$$\omega_1=2f_2+1/f_0,\quad \omega_3=4f_4-\frac{8}{3}f_2^3-\frac{f_2}{f_0^2}-\frac{1}{3f_0^3},$$

$$A_4=c_2\Xi_1^2+n_0^2\left(\Xi_1^4-2\Xi_1\Xi_3\right),$$

$$g_1=2f_2(n_0-1)-1/f_0,\quad h_1=2\psi_2(n_0-1),\quad g_2=g_1^2,$$

f_2, f_4, ψ_2 – коэффициенты разложений поверхностей линзы (см. рис. 1а)

$$f(x)=f_0+f_2x^2+f_4x^4+\ldots,$$

$$\psi(x)=f_0+d_0+\psi_2x^2+\psi_4x^4+\ldots$$

С учетом найденного k_1 (14) выражение для $\tilde{Q}_{X2}$ можно привести к виду

$$\tilde{Q}_{X2}=\frac{g_2+c_2}{2(h_1-g_1)}+\left(\frac{1}{2g_1}W_2+F_2\right)x_1^2,$$

$$\frac{1}{4\tilde{Q}_{X2}}=\frac{h_1-g_1}{2(c_2+g_2)}-\frac{(h_1-g_1)^2}{(c_2+g_2)^2}\left(\frac{1}{2g_1}W_2+F_2\right)x_1^2,$$

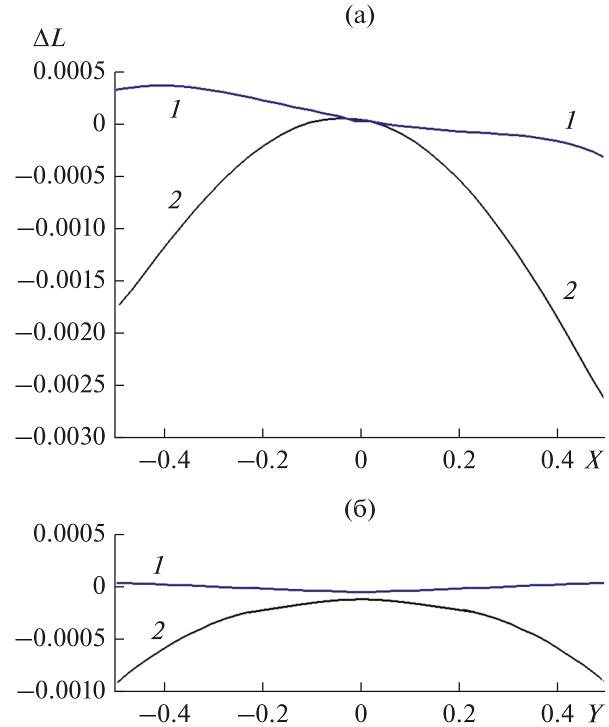

Рис. 2. Ошибка вычисления эйконала на выходной поверхности линзы с параметрами: $f_0 = 0.7$, $d_0 = 0.8$, $f_e = 1.1$, $n_0 = 1.6$, $c_2 = 1.5$, а – меридиональная плоскость, б – сагиттальная плоскость; кривая *1* соответствует формуле (12), кривая *2* – формуле (16).

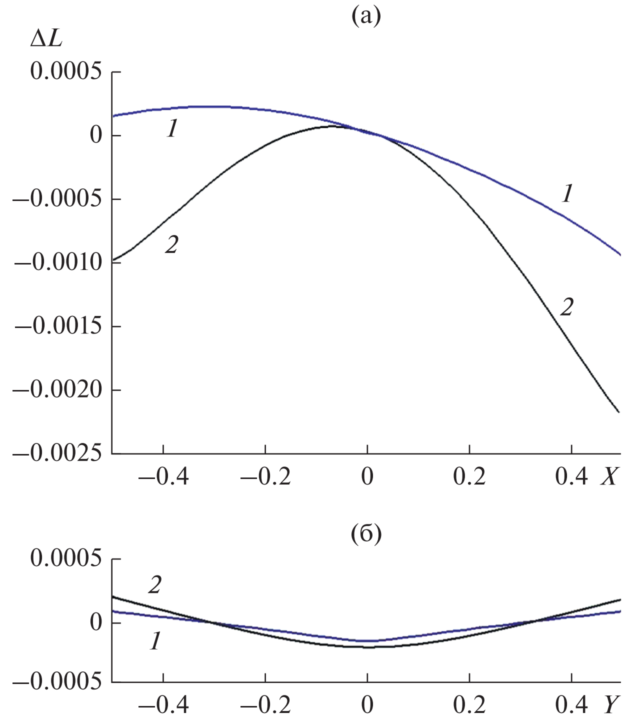

Рис. 3. Ошибка вычисления эйконала на выходной поверхности линзы с параметрами: $f_0 = 0.7$, $d_0 = 0.8$, $f_e = 1.1$, $n_0 = 1.6$, $c_2 = 0.5$; а – меридиональная плоскость, б – сагиттальная плоскость; кривая *1* соответствует формуле (12), кривая *2* – формуле (16).

$$W_2 = \mathrm{K} n_0 \left(\frac{c_2 + g_2}{2n_0^2} + \mathrm{M}_2 \right) + \\ + W_0 \mathrm{K} \left[n_0 \left(\Xi_3 - \Xi_1^3/6 \right) - \frac{c_2 \Xi_1}{2n_0} \right], \quad W_0 = n_0 \mathrm{K} + c_2,$$

$$F_2 = \frac{2f_2^2}{f_0} - \frac{f_2}{f_0^2} - \frac{3}{4f_0^3} + \frac{f_2}{n_0}(c_2 + g_2)\left(\frac{1}{2} - \frac{h_1}{g_1 - h_1} \right) + \\ + 6(1 - n_0) f_4.$$

Теперь раскроем особенность в члене с k_2. Из формулы (10) следует:

$$\frac{x_1}{k_2} = x_1^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2 \sqrt{D}} = \frac{x_1^2}{\sqrt{c_2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2 \sqrt{p^2 - x^2}} = \\ = \frac{x_1^2}{p^2 \sqrt{c_2}} \left(\frac{\sqrt{p^2 - x_1^2}}{x_1} - \frac{\sqrt{p^2 - x_2^2}}{x_2} \right).$$

Используя зависимости x_2 и p от x_1 и оставляя члены не выше второго порядка по x_1, можно получить

$$\frac{x_1}{2k_2} = \frac{h_1 - g_1}{2(c_2 + g_2)} + H_2 x_1^2,$$

$$H_2 = \frac{1}{2(c_2 + g_2)} \left(\frac{A_4 (h_1 - g_1)}{c_2 + g_2} - \frac{\beta_4 (h_2 + c_2) - A_4}{2h_1 \beta_2} + \frac{A_4}{2g_1} \right).$$

Формулу для эйконала луча в точке B теперь можно записать в виде

$$\hat{L}(R, \varphi) = \rho + A_2 + J_0 - \frac{\cos^2 \omega}{\cos^2(\omega - \alpha)\rho^2} \left(Q_0 + G_2 x_1^2 \right) \times \\ \times (\delta_R \cos\varphi \cos\alpha - \delta_Z \sin\alpha)^2 - \\ - \frac{1}{\rho^2} \left(Q_0 + H_2 x_1^2 \right) \delta_R^2 \sin^2 \varphi, \tag{15}$$

где

$$Q_0 = \frac{h_1 - g_1}{2(c_2 + g_2)}, \quad G_2 = -4Q_0^2 \left(\frac{1}{2g_1} W_2 + F_2 \right).$$

Если положить $x_1 = 0$, то выведенная формула (15) будет иметь вид

$$\hat{L}(R, \varphi) = \rho + A_2 + J_0 - \frac{Q_0 \cos^2 \omega}{\cos^2(\omega - \alpha)\rho^2} \times \\ \times (\delta_R \cos\varphi \cos\alpha - \delta_Z \sin\alpha)^2 - \frac{Q_0}{\rho^2} \delta_R^2 \sin^2 \varphi. \tag{16}$$

На рис. 2–5 приведены результаты исследования точности полученных формул – графики разностей точного геометрооптического значения эйконала и найденного по приближенным формулам (12) и (16) эйконала при смещении источни-

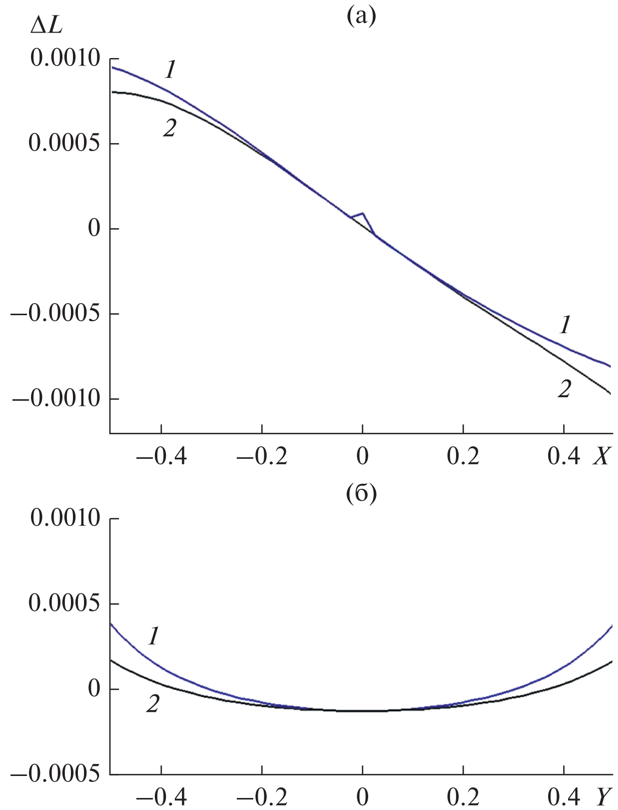

Рис. 4. Ошибка вычисления эйконала на выходной поверхности линзы с параметрами: $f_0 = 1$, $d_0 = 0.5$, $f_e = 1.3$, $n_0 = 1.6$, $c_2 = 1.5$; а – меридиональная плоскость, б – сагиттальная плоскость; кривая *1* соответствует формуле (12), кривая *2* – формуле (16).

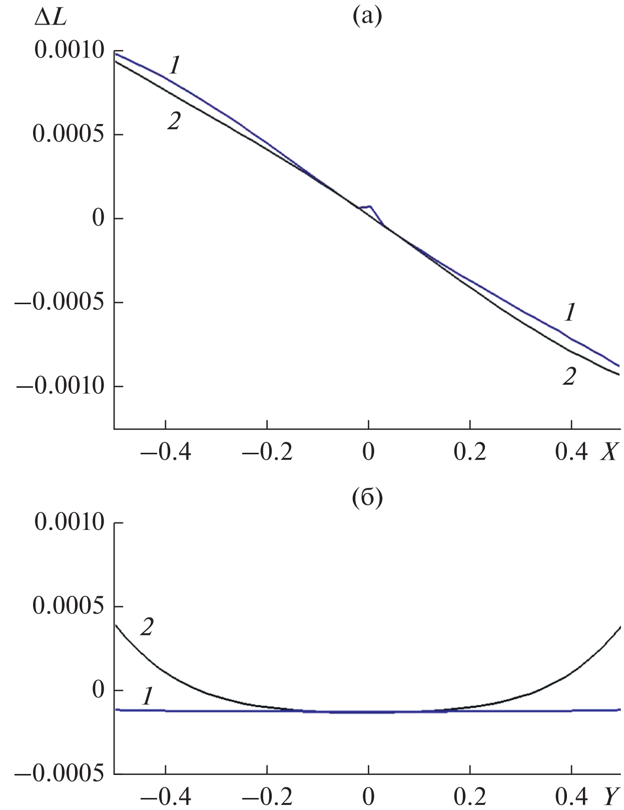

Рис. 5. Ошибка вычисления эйконала на выходной поверхности линзы с параметрами: $f_0 = 1$, $d_0 = 0.5$, $f_e = 1.3$, $n_0 = 1.6$, $c_2 = 1.5$, $c_4 = -1.5$; а – меридиональная плоскость, б – сагиттальная плоскость; кривая *1* соответствует формуле (12), кривая *2* – формуле (16).

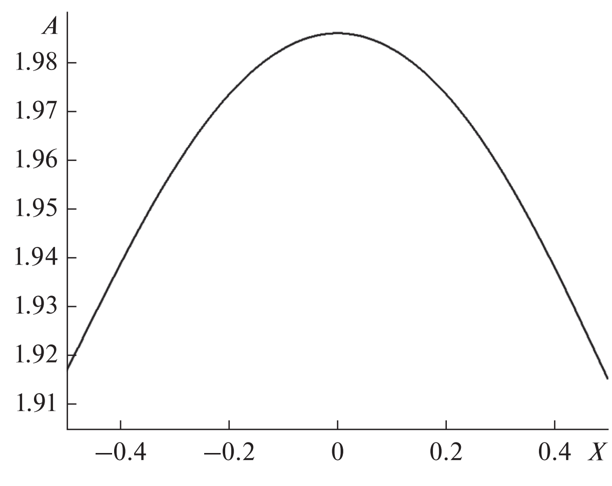

Рис. 6. Аберрация эйконала в меридиональной плоскости на выходной поверхности линзы с параметрами: $f_0 = 0.7$, $d_0 = 0.8$, $f_e = 1.1$, $n_0 = 1.6$, $c_2 = 1.5$.

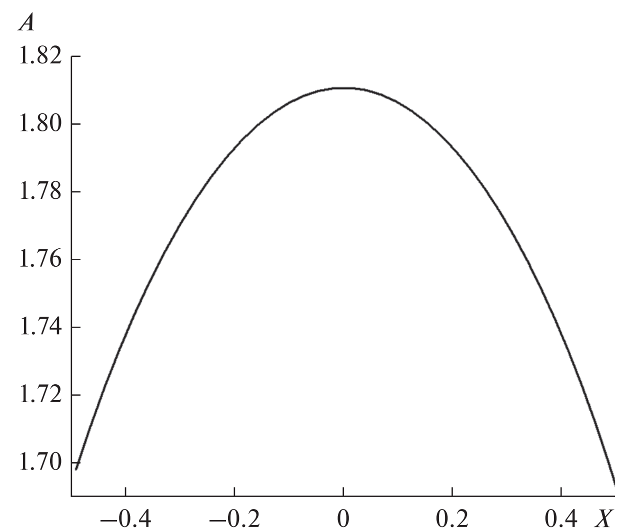

Рис. 7. Аберрация эйконала в меридиональной плоскости на выходной поверхности линзы с параметрами: $f_0 = 1$, $d_0 = 0.5$, $f_e = 1.3$, $n_0 = 1.6$, $c_2 = 1.5$.

ка из фокуса для двух апланатических линз с координатами смещенного источника (–0.2, 0.01). На рис. 6, 7 приведены графики аберрации эйконала, посчитанные строгим геометро-оптическим методом, т.е. графики эйконала после вычета линейной составляющей для обоих линз. Все величины на графиках нормированы на диаметр апертуры линз.

Из сравнения рис. 6, 7 с рис. 2–5 видно, что величина аберрации в меридиональной плоскости для линзы с $f_0 = 0.7$ примерно в 30 раз больше ошибки формулы (16), и в 140 раз больше ошибки формулы (12); для линзы с $f_0 = 1$ величина аберрации в меридиональной плоскости примерно в 50 раз больше ошибки по формулам (12) и (16) даже без учета линейной составляющей, которая не влияет на величину аберраций. Это позволяет использовать приближенные формулы для исследования аберраций в градиентных линзах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marchand E.W.* Gradient Index Optics. N.Y.: Academic Press, Inc., 1978.
2. *Венецкий А.С., Калошин В.А.* // ДАН. 2015. Т. 463. № 5. С. 533.
3. *Венецкий А.С., Калошин В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 6. С. 533.
4. *Венецкий А.С., Калошин В.А.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 2. С. 144.
5. *Венецкий А.С.* // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 8. http://jre.cplire.ru/jre/aug18/7/text.pdf.
6. *Венецкий А.С., Калошин В.А.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 9. С. 872.
7. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.