## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 551.510.535,537.868

# ВЛИЯНИЕ СЛОИСТОСТИ ЛИТОСФЕРЫ НА ВОЗБУЖДЕНИЕ КРАЙНЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ДИПОЛЕМ

© 2021 г. Е. Д. Терещенко<sup>*a*</sup>, П. Е. Терещенко<sup>*b*, *c*, \*</sup>

<sup>а</sup>Полярный геофизический институт РАН, ул. Халтурина, 15, Мурманск, 183010 Российская Федерация <sup>b</sup>Санкт-Петербургский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, Университетская набережная, 5Б, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация <sup>с</sup>Санкт-Петербургский научный центр РАН, Университетская набережная, 5, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация \*E-mail: tereshchenko@gmail.com Поступила в редакцию 11.06.2020 г. После доработки 26.08.2020 г.

Принята к публикации 01.09.2020 г.

Получено аналитическое решение задачи возбуждения электромагнитных волн горизонтальным диполем, расположенным на границе раздела между вакуумом и проводящей двуслойной средой, опирающееся на малость длины волны в проводящей среде по сравнению с вакуумом. Проведены численные расчеты, позволившие оценить эффективность такого подхода и показать, что приближенные формулы описывают поведение поля с высокой точностью. Получено асимптотическое представление для магнитного поля на границе раздела между плоскослоистой Землей и атмосферой, имеющее вид волны в однородном полупространстве с коэффициентом возбуждения, зависящим от эффективной проводимости нижнего полупространства, что полезно для определения электропроводности литосферы на основе экспериментальных данных регистрации электромагнитного поля активного источника. Отмечена большая чувствительность к проводимости среды вертикальной компоненты магнитного поля по сравнению с горизонтальными.

DOI: 10.31857/S0033849421040148

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Задача возбуждения электромагнитного поля диполем, расположенным на границах двух сред, анализировалась в ряде работ [1-5]. Исследования, начатые Зоммерфельдом, были дополнены Фоком, получившим аналитические решения, удобные для практического использования. В [2] было введено понятие "квазистационарное приближение" (волновое число в вакууме  $k_0 = 0$ ), в рамках которого решение задачи было представлено в виде модифицированных функций Бесселя. При этом обобщение на случай  $k_0 \neq 0$  имело вид разложения по параметру  $q = (k_0^2 - k_1^2) / (k_0^2 + k_1^2),$ где  $k_1$  — волновое число, относящееся к проводящему полупространству. В дальнейшем результаты и выводы, полученные в [2], использовались для обоснования многих работ, связанных с дистанционным электромагнитным зондированием глубинной структуры Земли [6, 7].

В практике генерации электромагнитного поля сверх- и крайне низкочастотного диапазона используют антенны с горизонтальным током [8, 9], возбуждающие поле, которое не обладает азимутальной симметрией. Это приводит к необходимости даже для изотропной среды определять две составляющие электрического векторпотенциала.

Ниже рассмотрим возбуждение низкочастотного электромагнитного поля горизонтальным заземленным диполем с гармонической зависимостью от времени. Считаем, что Земля состоит из плоских слоев разной проводимости, расположенных друг над другом. В отличие от традиционного подхода при построении аналитического решения будем использовать малость параметра  $|k_0/k_j|$ , где  $k_j$  – волновое число в *j*-слое. Такое предположение является вполне естественным в свете реальной проводимости литосферы для ча-стот  $f < 10^5 \Gamma\mu$  [4].

#### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим возбуждение горизонтальным заземленным вибратором поля в плоской трехслойной среде. Одну среду будем считать практически вакуумом, а две другие — проводящими средами с различными значениями проводимости. Вибратор с током, меняющимся по монохроматическому закону  $\exp(-i\omega t)$ , где t – время,  $\omega$  – циклическая частота, расположим на границе между вакуумом и проводящей областью. Для решения такой задачи можно использовать подход, описанный ранее [10], отличием от прежней работы будет отсутствие ионосферы и учет конечности  $k_0$ .

Введем декартову систему координат (x, y, z) с центром в середине диполя, осью Ox, направленной вдоль диполя, осью Oy – в перпендикулярном горизонтальном направлении, осью Oz – перпендикулярной границе раздела. Тогда для электрического вектор-потенциала  $\vec{A}$ , относящегося к области над Землей  $(z \ge 0)$ , можно написать следующее представление:

$$A = A_{x}e_{x} + A_{z}e_{z},$$

$$A_{x} = \frac{J\Delta x}{4\pi}\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{v_{0}} + \alpha_{0}\right)\exp\left(-v_{0}z\right)J_{0}\left(\lambda\rho\right)d\lambda, \quad (1)$$

$$A_{z} = -\frac{J\Delta x}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{0}^{\infty}\eta_{0}\exp\left(-v_{0}z\right)\frac{1}{\lambda}J_{0}\left(\lambda\rho\right)d\lambda,$$

где  $\vec{e_x}, \vec{e_z}$  – орты, направленные вдоль осей Ox и Oy,  $iv_j = \sqrt{k_j^2 - \lambda^2} = i\sqrt{\kappa_j^2 + \lambda^2}$ , Re  $v_j > 0$ , j = 0,1,2 – указывает на среду,  $\kappa_j = -ik_j$ ,  $k_j = \omega/c \times \sqrt{\epsilon_j/\epsilon_0 + i\sigma_j/(\omega\epsilon_0)}$  – волновое число в *j*-й среде,  $\epsilon_0 \simeq 10^{-9}/(36\pi) \Phi/M$ ,  $\epsilon_j$  и  $\sigma_j$  – диэлектрическая проницаемость и проводимость,  $J\Delta x$  – момент тока,  $J_0(\lambda\rho)$  – функция Бесселя первого рода,  $\rho$  – расстояние между элементарным диполем и проекцией точки, в которой вычисляется потенциал, на плоскость (*x*, *y*, 0).

Коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\eta_0$  находятся из граничных условий для потенциала. Для трехслойной среды получаем

$$\alpha_0 = -\frac{\lambda}{\nu_0} \frac{D(-\nu_0)}{D(\nu_0)}$$

где

$$D(\mathbf{v}_{0}) = (\mathbf{v}_{0} + \mathbf{v}_{1})(\mathbf{v}_{1} + \mathbf{v}_{2}) + + (\mathbf{v}_{0} - \mathbf{v}_{1})(\mathbf{v}_{1} - \mathbf{v}_{2})\exp(-2\mathbf{v}_{1}d), D(-\mathbf{v}_{0}) = D(\mathbf{v}_{0})|_{\mathbf{v}_{0} \to -\mathbf{v}_{0}},$$

*d* – толщина первого слоя, примыкающего к вакууму.

Выражение для  $\eta_0$  имеет более сложную структуру и может быть представлено для трехслойной среды в следующем виде:

$$\eta_{0} = D_{\eta} \left( \frac{\lambda}{v_{0}} + \alpha_{0} \right) + + \frac{8\lambda^{2}k_{0}^{2}v_{1}^{2}}{D(v_{0})D_{z}} \left( k_{1}^{2} - k_{2}^{2} \right) \exp\left(-2v_{1}d\right),$$
(2)

где

$$D_{\eta} = \frac{\lambda}{D_{z}} (k_{0}^{2} - k_{1}^{2}) \times \\ \times \left[ (k_{1}^{2} \mathbf{v}_{2} + k_{2}^{2} \mathbf{v}_{1}) - (k_{1}^{2} \mathbf{v}_{2} - k_{2}^{2} \mathbf{v}_{1}) \exp(-2\mathbf{v}_{1}d) \right], \\ D_{z} = (k_{0}^{2} \mathbf{v}_{1} + k_{1}^{2} \mathbf{v}_{0}) (k_{1}^{2} \mathbf{v}_{2} + k_{2}^{2} \mathbf{v}_{1}) + \\ + (k_{0}^{2} \mathbf{v}_{1} - k_{1}^{2} \mathbf{v}_{0}) (k_{1}^{2} \mathbf{v}_{2} - k_{2}^{2} \mathbf{v}_{1}) \exp(-2\mathbf{v}_{1}d).$$

Из формулы (2) следуют предельные соотношения. Для однородной Земли  $d \to \infty$  или  $k_1 = k_2$ 

$$\eta_0 = \frac{2(\kappa_0^2 - \kappa_1^2)\lambda^2}{(\nu_0 + \nu_1)(\kappa_0^2\nu_1 + \kappa_1^2\nu_0)}$$
(3)

и приближение, справедливое для малых значений  $\left|k_0^2/k_j\right| \ll 1$  (j = 1, 2), имеет вид

$$\eta_0 = -\frac{\lambda}{\nu_0} \left( \frac{\lambda}{\nu_0} + \alpha_0 \right). \tag{4}$$

Подстановка (4) в (1) показывает, что такое приближение эквивалентно выполнению в области  $z \ge 0$  условия div  $\vec{A} = 0$ .

Магнитное поле  $\vec{H}(\rho, z)$  связано с векторомпотенциалом формулой  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ . Воспользовавшись соотношением (1), получаем

$$H_{x}(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial y} A_{z}, \quad H_{y}(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial z} A_{x} - \frac{\partial}{\partial x} A_{z}.$$
 (5)

В качестве первого шага воспользуемся полученными результатами для обоснования возможности использования приближения  $|k_0^2/k_1^2| \ll 1$  при вычислении поля на границе двух сред.

### 2. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ЗЕМЛИ

Подстановка в (5) выражения (3) для  $\eta_0$  позволяет представить выражение для  $H_x$ -компоненты магнитного поля на границе раздела в следующем виде:

$$H_{x}(\rho,0) = \frac{J\Delta x}{2\pi} \left(1 - \frac{k_{0}^{2}}{k_{1}^{2}}\right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \times \\ \times \int_{0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\nu_{0}z\right)}{\left(\nu_{1} + \nu_{0}\right)\left(\nu_{0} + k_{0}^{2}/k_{1}^{2}\nu_{1}\right)} J_{0}(\lambda\rho)\lambda d\lambda, \ z \to +0.$$
(6)

Здесь знак плюс "+" указывает, что подходим к границе между вакуумом и проводящей средой сверху. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{y}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho},$$

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА том 66 № 4 2021

выполним дифференцирование по *у* в формуле (6). В результате получим

$$H_{x}(\rho,0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_{1}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\rho^{3}}F_{x},$$
(7)

где обозначено

$$F_x = \rho^2 \kappa_1 \left( 1 - \frac{\kappa_0^2}{\kappa_1^2} \right)_0^{\infty} \frac{\exp(-\nu_0 z)}{(\nu_1 + \nu_0) (\nu_0 + \kappa_0^2 / \kappa_1^2 \nu_1)} \times J_1(\lambda \rho) \lambda^2 d\lambda, \quad z \to +0.$$

Здесь  $J_1(\lambda \rho) - функция Бесселя с индексом, рав$ ным единице. Если ввести безразмерные величи $ны <math>r_1 = \rho \kappa_1$ ,  $r_0 = \rho \kappa_0$ ,  $s = \lambda \rho$  и  $\tau_j = \sqrt{s^2 + r_j^2}$ , j = (0,1), то в этих обозначениях  $F_x$  можно записать следующим образом:

$$F_{x} = r_{1} \left( 1 - \frac{r_{0}^{2}}{r_{1}^{2}} \right) \times$$

$$\times \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(\tau_{1} + \tau_{0}) (\tau_{0} + r_{0}^{2} / r_{1}^{2} \tau_{1})} J_{1}(s) s^{2} ds.$$
(8)

Пренебрегая членами, содержащими  $r_0^2/r_1^2 = k_0^2/k_1^2$ , получим приближенную формулу для  $F_x$ , связанную с  $H_x$  компонентой магнитного поля:

$$\tilde{F}_{x} = F_{x}|_{k_{0}^{2}/k_{1}^{2}|\ll 1} = r_{1}\int_{0}^{\infty} \frac{J_{1}(s)s^{2}}{(\tau_{1}+\tau_{0})\tau_{0}} ds.$$

В отличие от функции  $F_x$  для  $\tilde{F}_x$  несложно найти аналитическое представление, выполнив интегрирование по *s*. Воспользовавшись схемой, предложенной в работе [2], после ряда преобразований можно получить

$$\tilde{F}_{x} = r_{1}I_{1}\left(\frac{r_{1}-r_{0}}{2}\right)K_{1}\left(\frac{r_{1}+r_{0}}{2}\right) + \frac{r_{1}r_{0}}{2} \times \left[I_{0}\left(\frac{r_{1}-r_{0}}{2}\right)K_{1}\left(\frac{r_{1}+r_{0}}{2}\right) + I_{1}\left(\frac{r_{1}-r_{0}}{2}\right)K_{0}\left(\frac{r_{1}+r_{0}}{2}\right)\right],^{(9)}$$

где  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $K_0$ ,  $K_1$  — цилиндрические функции мнимого аргумента. Для квазистационарного приближения  $r_0 = 0$  и, соответственно,

$$\tilde{F}_x\Big|_{r_0=0}=r_1I_1\left(\frac{r_1}{2}\right)K_1\left(\frac{r_1}{2}\right).$$

Если  $|r_1 \pm r_0|/2 \ge 1$ , то имеет место асимптотическое представление:

$$\tilde{F}_x \sim (1 + r_0) \exp(-r_0), \ |r_1 \pm r_0|/2 \ge 1,$$
 (10)

т.е. функция, имеющая структуру волны в верхнем полупространстве, не зависящая от проводимости нижнего полупространства, определяемая расстоянием до точки наблюдения и частотой.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА том 66 № 4 2021



**Рис. 1.** Зависимость от безразмерного расстояния  $|r_0|$  функции  $|F_x|$  (1), аппроксимации  $|\tilde{F}_x|$  (2) и функции  $|(1 + r_0)\exp(-r_0)|$  (3) для горизонтального диполя на границе двух однородных сред.

Оценим возможность замены функции  $F_x$  на ее приближение  $\tilde{F}_x$  в сверхнизкочастотном и крайне низкочастотном (СНЧ-КНЧ) и более низкочастотном диапазоне. С этой целью выполним численные расчеты по формуле (8) и сравним их с результатами, определяемыми выражением (9). Результаты сравнения  $F_x$  и  $\tilde{F}_x$  удобно представить в виде зависимости от параметра  $|r_0|$ . При этом для рассматриваемого диапазона можно представить  $r_1$  в следующем виде:

$$r_1 = r_0^{1/2} \sqrt{\frac{\sigma_1 \rho}{c \varepsilon_0}} = r_0^{1/2} \sqrt{120 \pi \sigma_1 \rho}.$$

На рис. 1, 2 приведены результаты расчета модуля и фазы функций  $F_x$ ,  $\tilde{F}_x$  и  $(1 + r_0) \exp(-r_0)$ . Значение  $\sigma_1 \rho = 6$  См близко к реальной ситуации в эксперименте FENICS-2014 [10] при регистрации поля в обсерватории Ловозеро. Из графиков видно совпадение функций  $F_x$  и  $\tilde{F}_x$  во всем диапазоне изменения  $r_0$ .

Следующий шаг — анализ  $H_y(\rho, z)$ . Запишем эту компоненту магнитного поля в виде

$$H_{y}(\rho,0) = \frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_{1}} \left[ \frac{1}{\rho^{3}} F_{y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\rho^{3}} F_{x} \right]$$

где  $F_x$  определена формулой (8), а

$$F_{y} = \frac{r_{\rm i}}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{\tau_{\rm i} - \tau_{\rm 0}}{\tau_{\rm i} + \tau_{\rm 0}} J_{0}(s) \, s \, ds.$$



**Рис. 2.** Зависимость от безразмерного расстояния  $|r_0|$  функции  $\arg(F_x)$  (*1*), аппроксимации  $\arg(\tilde{F}_x)$  (*2*) и функции  $\arg((1 + r_0) \exp(-r_0))$  (*3*) для горизонтального диполя на границе двух однородных сред.

Выполняя интегрирование по *s*, получим

$$F_{y} = \frac{\left(r_{1}^{2} - r_{0}^{2}\right)r_{1}}{8} \times$$
(11)  
 
$$\times \left[I_{0}\left(\frac{r_{1} - r_{0}}{2}\right)K_{0}\left(\frac{r_{1} + r_{0}}{2}\right) - I_{2}\left(\frac{r_{1} - r_{0}}{2}\right)K_{2}\left(\frac{r_{1} + r_{0}}{2}\right)\right].$$

При совместном выполнении ограничений  $|r_0/r_1| \ll 1$ и  $|(r_1 \pm r_0)/2| > 1$  формула (11) имеет асимптотическое представление, аналогичное  $\tilde{F}_x$ :

$$\tilde{F}_{y} \sim (1+r_0) \exp\left(-r_0\right).$$

Подводя итог, можно сказать, что для однородного полупространства приближенные формулы, полученные в предположении  $|k_0/k_1| < 1$ , достаточно полно описывают поведение поля и дают хорошее количественное согласие с точными формулами. Причиной такого совпадения являются осциллирующие функции Бесселя в подынтегральных выражениях, из-за которых вклад в интеграл областей с большими значениями переменной интегрирования мал. Поэтому в задаче со слоистой Землей возможен переход от точного выражения для  $\eta_0$  к его приближению (3).

## 3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

Рассмотрим возбуждение горизонтальным диполем магнитного поля для модели Земли в виде двух слоев с различной проводимостью. Используя приближение  $|k_0^2/k_j| \ll 1$ , j = 1,2, для низкочастотного диапазона из (5) с учетом (4) получим

$$H_{x}(\rho,0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \times$$
$$\times \int_{0}^{\infty} \frac{[\nu_{1} + \nu_{2} + (\nu_{1} - \nu_{2})\exp(-2\nu_{1}d)]\exp(-2\nu_{0}z)}{\nu_{0}[(\nu_{0} + \nu_{1})(\nu_{1} + \nu_{2}) + (\nu_{0} - \nu_{1})(\nu_{1} - \nu_{2})\exp(-2\nu_{1}d)]} J_{0}(\lambda\rho)\lambda d\lambda, \quad z \to +0.$$

Выполняя дифференцирование по у, находим

$$H_{x}(\rho,0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_{\rm sop}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\rho^{3}}(\tilde{F}_{x})_{\rm sop},\tag{12}$$

где

$$(\tilde{F}_{x})_{\flat\phi} = \rho \kappa_{\flat\phi} \int_{0}^{\infty} \frac{[\tau_{1} + \tau_{2} + (\tau_{1} - \tau_{2}) \exp(-2\tau_{1}d/\rho)]}{\tau_{0} [(\tau_{0} + \tau_{1})(\tau_{1} + \tau_{2}) + (\tau_{0} - \tau_{1})(\tau_{1} - \tau_{2}) \exp(-2\tau_{1}d/\rho)]} J_{1}(s) s^{2} ds.$$

Для аналогии с (7) ввели коэффициент  $\kappa_{\rm эф}$ . Выберем его так, а соответственно, и проводимость, чтобы  $\tilde{F}_{\rm эф}$  как при  $d \to \infty$ ,  $|r_1/2| > 1$ , так и при  $d \to 0$ ,  $|r_2/2| > 1$ , совпадало с асимптотическим значением  $\tilde{F}_x$ , определяемым формулой (10). Если взять значение  $\sigma_{\rm эф}$ , следующее из выражения для импеданса плоской волны для двухслойной среды [4]

$$\sqrt{\sigma_{\Im \Phi}} = \sqrt{\sigma_1} \frac{1 + R \exp(-2\kappa_1 d)}{1 - R \exp(-2\kappa_1 d)}, \quad R = \frac{\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_1}},$$

то с учетом того, что  $\kappa_{\rm sop} = (1-i)/\sqrt{2}\sqrt{\omega\mu_0\sigma_{\rm sop}}$ , несложно показать справедливость высказанного требования.

Рассмотрим поведение функции  $(\tilde{F}_x)_{э\phi}$  в случае конечной, не равной нулю, толщины первого слоя. На рис. 3 представлены результаты расчета модуля и фазы функции  $(\tilde{F}_x)_{э\phi}$  для двухслойной модели Земли с проводимостью  $\sigma_1 = 10^{-4}$  См/м,  $\sigma_2 = 10^{-5}$  См/м и толщиной первого слоя  $d = 12 \times 10^3$  м. Для сравнения на этих графиках

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА том 66 № 4 2021



**Рис. 3.** Сравнение функций  $|(\tilde{F}_x)_{\ni \phi}|$  (1) и  $|(1 + r_0) \exp(-r_0)|$  (2) при двухслойной среде под диполем.

показаны значения функции  $(1 + r_0)\exp(-r_0)$ . Видим, что при  $|r_0| > 8 \times 10^{-2}$ , функция  $(\tilde{F}_x)_{3\phi}$  хорошо аппроксимируется этим выражением. Преобразуем (12) следующим образом

$$H_{x}(\rho,0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi} \frac{\kappa_{1}}{\kappa_{9\phi}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{\rho^{3}} \frac{(\tilde{F}_{x})_{9\phi}}{\tilde{F}_{x}} \frac{\tilde{F}_{x}}{\kappa_{1}} \right)$$

При равенстве функций  $(\tilde{F}_x)_{ab}$  и  $\tilde{F}_x$  получаем

$$H_{x}(\rho,0) = \frac{Z_{g}}{Z_{1}} H_{x}(\rho,0)|_{\sigma_{1}=\sigma_{2}},$$

$$\frac{Z_{g}}{Z_{1}} = \frac{1 - R \exp(-\kappa_{1}d)}{1 + R \exp(-\kappa_{1}d)},$$
(13)

На рис. 4 приведены результаты расчета моду-

ля и фазы функций  $(F_y)_{i\phi}$  и  $(1 + r_0) \exp(-r_0)$  с теми же параметрами, что и для рис. 3. Видим поведение  $(F_y)_{i\phi}$  подобно ранее рассмотренному для  $(F_x)_{i\phi}$ . При этом  $(F_y)_{i\phi}$  идентична  $(1 + r_0) \exp(-r_0)$ 

при  $|r_0| > 8 \times 10^{-2}$ . Поэтому и составляющую  $H_v(\rho, 0)$ 

можно записать аналогично (13), а значит, и для



**Рис. 4.** Сравнение функций  $|(\tilde{F}_x)_{\ni \phi}|$  (*1*) и  $|(1 + r_0) \exp(-r_0)|$  (*2*) при двухслойной среде под диполем.

т.е. произведение отношения импедансов двухслойного и однородного полупространства и поля, возбуждаемого диполем, расположенным на границе между вакуумом и проводящей средой.

Для компоненты  $H_y(\rho, 0)$  вычисления подобны сделанным для  $H_x(\rho, 0)$ . Так как второе слагаемое в (5) сводится к составляющей поля  $H_x(\rho, 0)$ , то рассмотрим  $\partial/\partial z A_x$ . Для двухслойной среды представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} A_x \big|_{z=0} = \frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_{\rm sph}} \frac{1}{\rho^3} (F_y)_{\rm sph},$$

где

$$(F_{y})_{\vartheta\phi} = \frac{r_{\vartheta\phi}}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{(\tau_{1} - \tau_{0})(\tau_{1} + \tau_{2}) + (\tau_{0} + \tau_{1})(\tau_{2} - \tau_{1})\exp(-2\tau_{1}d/\rho)}{(\tau_{0} + \tau_{1})(\tau_{1} + \tau_{2}) + (\tau_{1} - \tau_{0})(\tau_{2} - \tau_{1})\exp(-2\tau_{1}d/\rho)} J_{0}(s) sds,$$
  
$$r_{\vartheta\phi} = \rho \kappa_{\vartheta\phi}.$$

тангенциальной составляющей будет иметь место соотношение

$$\vec{H}_{\tau}(\rho,0) = \frac{Z_g}{Z_1} \vec{H}_{\tau}(\rho,0) \Big|_{\sigma_1 = \sigma_2}.$$
 (14)

Такие же преобразования можно применить и к вертикальной составляющей магнитного поля. В результате можно прийти к следующему выражению:

$$H_{z}(\rho,0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_{\rm sol}^{2}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{(F_{z})_{\rm sop}}{\rho^{3}},$$

$$(F_{z})_{\rm sop} = r_{\rm sop}^{2} \int_{0}^{\infty} \frac{\tau_{1} + \tau_{2} + (\tau_{1} - \tau_{2})\exp(-2\tau_{1}d/\rho)}{(\tau_{0} + \tau_{1})(\tau_{1} + \tau_{2}) + (\tau_{0} - \tau_{1})(\tau_{1} - \tau_{2})\exp(-2\tau_{1}d/\rho)} J_{0}(s) sds.$$
(15)

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА том 66 № 4 2021



**Рис.** 5. Сравнение функций  $|(\tilde{F}_x)_{\ni \Phi}|$  (*1*) и  $|(1 + r_0) \exp(-r_0)|(2)$  при двухслойной среде под диполем.

На рис. 5 приведен результат сравнения  $(F_z)_{3\phi}$ и  $(1 + r_0) \exp(-r_0)$ . Видно, что с ростом  $|r_0|$  происходит совпадение этих функций. Наличие  $\kappa_{3\phi}^2$  в (15), в отличие от горизонтальных составляющих, где в определяющие их выражения входит  $\kappa_{3\phi}$  в первой степени, указывает на большую чувствительность к проводимости среды вертикальной компоненты магнитного поля, что отмечалось и в экспериментальных данных [11].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, решение задачи возбуждения электромагнитных волн горизонтальным диполем, расположенным на границе раздела между вакуумом и проводящей двухслойной средой, позволило оценить эффективность подхода к определению поля, опирающегося на малость длины волны в проводящей среде по сравнению с вакуумом. Сравнение численных расчетов по точным и приближенным формулам показало целесообразность такого подхода как в задаче с однородным полупространством, так и для слоистой среды.

Для расстояний от источника, превышающих величину скин-слоя любого из проводящих слоев, найдено асимптотическое представление для магнитного поля на границе раздела между плоскослоистой Землей и атмосферой, имеющее вид волны в однородном полупространстве с коэффициентом возбуждения, зависящим от эффективной проводимости нижнего полупространства.

Этот результат полезен для интерпретации данных экспериментов с активным источником, где известны параметры источника и геометрия эксперимента, а требуется определить электропроводность Земли. Используя формулу (14), легко перейти от поля диполя к полю реальной антенны. Результат интегрирования по длине антенны будет зависеть лишь от поля диполя, расположенного на границе двух сред.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-05-00823).

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Sommerfeld A*. // Ann. Phys. 1909. V. 333. № 4. P. 665. https://doi.org/10.1002/andp.19093330402
- 2. *Fock V.* // Ann. Phys. 1933. V. 409. № 4. P. 401. https://doi.org/10.1002/andp.19334090405
- 3. *Wait J.R.* Electromagnetic Waves in Stratified Media. N.Y.: Pergamon press, 1962.
- 4. *Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т.* Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. М.: Наука, 1991.
- 5. *Терещенко Е.Д., Терещенко П.Е.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 4. С. 323.
- https://doi.org/10.7868/S0033849418040034 6. *Ваньян Л.Л.* Электромагнитные зондирования. М.:
- ваньян л.л. электромагнитные зондирования. М.: Научный мир, 1997.
- Ковтун А.А. Строение коры и верхней мантии на северо-западе Восточно-Европейской платформы по данным магнитотеллурического зондирования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989.
- 8. *Bannister P.B.* // Radio Sci. 1986. V. 21. № 3. P. 529. https://doi.org/10.1029/RS021i004p00605
- 9. Велихов Е.П., Кононов Ю.М., Шорин В.И. и др. Способ электромагнитного зондирования земной коры с использованием нормированных источников поля // Пат. РФ № 2093863. Опубл. офиц. бюл. "Изобретения. Полезные модели" № 30 от 20.10.1997.
- Терещенко Е.Д., Сидоренко А.Е., Терещенко П.Е. // ЖТФ. 2019. Т. 89. № 7. С. 1098. https://doi.org/10.21883/JTF.2019.07.47805.388-18
- Терещенко Е.Д., Григорьев В.Ф., Терещенко П.Е., Юрик Р.Ю. // Вестн. Кольского науч. центра РАН. Апатиты: Кольский научный центр РАН, 2013. № 3. С. 34.