РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 5, с. 431–435

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874.6

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ С КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ ГИБРИДНЫМ МЕТОДОМ. ОСЕВОЕ ПАДЕНИЕ

**© 2021 г. В. А. Калошин[a], *, Д. Т. Луу[b], ****

[a] *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

[b] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Институтский пер., 9, Долгопрудный Московской обл., 141700 Российская Федерация*

**E-mail: vak@cplire.ru*

***E-mail: luuductho@phystech.edu*

Поступила в редакцию 24.12.2019 г.
После доработки 15.01.2020 г.
Принята к публикации 17.01.2020 г.

Рассмотрена задача рассеяния плоской электромагнитной волны, падающей вдоль оси на круглый идеально-проводящий цилиндр, ограниченный по торцам полусферами. Для решения задачи использован гибридный метод, сочетающий метод собственных функций, последовательных дифракций и принцип эквивалентности. Проведено сравнение результатов расчета диаграммы рассеяния двумя вариантами гибридного метода, методом моментов и методом Гюйгенса–Френеля–Кирхгофа.

**DOI:** 10.31857/S0033849421050065

## ВВЕДЕНИЕ

При решении задач рассеяния акустических и электромагнитных волн на телах вращения с кусочно-аналитической формой поверхности применяются как численные методы: моментов, конечных элементов, конечных разностей во временной области, Т-матриц, так и асимптотические: метод Гюйгенса–Френеля–Кирхгофа (ГФК), геометрическая теория дифракции, метод параболического уравнения [1–5].

В случае когда хотя бы один из характерных электрических размеров задачи мал, асимптотические методы приводят к серьезным погрешностям. Если хотя бы один из этих размеров велик, использование численных методов требует больших размеров оперативной памяти компьютера. В работах [6, 7] предложен гибридный метод решения подобных задач и в качестве примера решена двумерная задача рассеяния на цилиндре с кусочно-аналитической образующей.

Гибридный метод основан на сочетании метода собственных функций, последовательных дифракций и принципа эквивалентности (строгой формулировки метода ГФК).

В данной работе гибридный метод, предложенный в работах [6, 7], использован для решения трехмерной задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на теле вращения в виде кругового цилиндра, ограниченного по торцам полусферами.

## 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГИБРИДНЫМ МЕТОДОМ

Пусть на идеально-проводящей цилиндр вдоль его оси падает плоская электромагнитная волна, вектор электрического поля которой для определенности параллелен оси $x$, где $a$ – радиус полусфер, $h$ – длина цилиндра (рис. 1). Решение задачи рассеяния плоской волны сводится к задаче нахождения тока на поверхности тела $S$. Разобьем поверхность $S$ на три участка: $S_1$ и $S_3$ (поверхности полусфер) и $S_2$ (поверхность цилиндра), и рассмотрим последовательное рассеяние плоской волны на этих поверхностях.

Решение задачи рассеяния на поверхности $S_1$ будем искать в виде ряда по собственным функциям (ряда Ми) [1, 2]. Компоненты полного поля в сферических координатах ($r_1$, $\theta_1$, $\varphi_1$) при этом имеют вид:

$$E_{r_1} = \frac{1}{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} m(m+1)U_m^{\text{э}}, \quad H_{\varphi_1} = i\omega\varepsilon_a \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial U_m^{\text{э}}}{\partial\theta_1} +$$

$$+\frac{1}{r_1\sin(\theta_1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial^2(r_1U_m^{\text{м}})}{\partial\varphi_1\partial r_1}, \quad H_{r_1} = \frac{1}{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} m(m+1)U_m^{\text{м}},$$

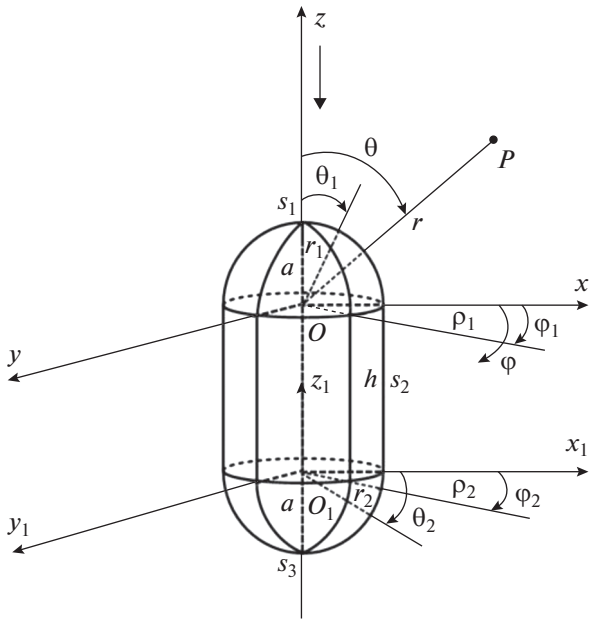


**Рис. 1.** Геометрия задачи.

$$H_{\theta_1} = \frac{-i\omega\varepsilon_a}{\sin(\theta_1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial U_m^{\text{э}}}{\partial\varphi_1} + \frac{1}{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial^2(r_1U_m^{\text{м}})}{\partial\theta_1\partial r_1},$$

$$E_{\varphi_1} = \frac{1}{r_1\sin(\theta_1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial^2(r_1U_m^{\text{э}})}{\partial\varphi_1\partial r_1} - i\omega\mu_a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial U_m^{\text{м}}}{d\theta_1},$$

$$E_{\theta_1} = \frac{1}{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial^2(r_1U_m^{\text{э}})}{\partial\theta_1\partial r_1} + \frac{i\omega\mu_a}{\sin\theta_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial U_m^{\text{м}}}{\partial\varphi_1},$$

$$U_m^{\text{э}} = \frac{2m+1}{m(m+1)}\frac{(-i)^{m-1}}{k}\times \tag{1}$$

$$\times\left[\psi_m(kr_1) - \xi_m^{(1)}(kr_1)\frac{\dfrac{\partial(a\psi_m(ka))}{\partial a}}{\dfrac{\partial(a\xi_m^{(1)}(ka))}{\partial a}}\right]P_m^1(\cos(\theta_1))\cos(\varphi_1),$$

$$U_m^{\text{м}} = -\frac{2m+1}{m(m+1)}\frac{(-i)^{m-1}\omega\varepsilon_a}{k^2}\times$$

$$\times\left[\psi_m(kr_1) - \xi_m^{(1)}(kr_1)\frac{\psi_m(ka)}{\xi_m^{(1)}(ka)}\right]P_m^1(\cos(\theta_1))\sin(\varphi_1),$$

где $\psi_m$ – сферические функции Бесселя, $\xi_m^1$ – сферические функции Ханкеля, $P_m^1$ – функция Лежандра.

Токи на полусфере $S_1$ определяются по формулам: $j_{\theta_1} = H_{\varphi_1}$, $j_{\varphi_1} = -H_{\theta_1}$, $r_1 = a$, а выражения для компонент магнитного поля приведены в (1).

В цилиндрической системе координат ($\rho_1$, $\varphi_1$, $z$) эквивалентные токи на плоскости $xy$ имеют вид:

$$J_{\varphi_1}^{\text{э}} = -H_{\rho_1},\quad J_{\rho_1}^{\text{м}} = -E_{\varphi_1},\quad J_{\rho_1}^{\text{э}} = H_{\varphi_1},\quad J_{\varphi_1}^{\text{м}} = E_{\rho_1}. \tag{2}$$

Далее определим векторные потенциалы в области между плоскостями $xy$ и $x_1y_1$ по формулам:

$$\begin{aligned} A_r &= \oint_S\left[J_r\cos(\varphi_2-\varphi_1) + J_\varphi\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]GdS,\\ A_\varphi &= \oint_S\left[J_\varphi\cos(\varphi_2-\varphi_1) - J_r\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]GdS. \end{aligned} \tag{3}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} A_{\varphi_2}^{\text{э}} &= \int_a^\infty\int_0^{2\pi}\rho_1\left[J_{\varphi_1}^{\text{э}}\cos(\varphi_2-\varphi_1) - J_{\rho_1}^{\text{э}}\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]\times\\ &\quad\times G_1d\varphi_1d\rho_1,\\ A_{\varphi_2}^{\text{м}} &= \int_a^\infty\int_0^{2\pi}\rho_1\left[J_{\varphi_1}^{\text{м}}\cos(\varphi_2-\varphi_1) - J_{\rho_1}^{\text{м}}\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]\times\\ &\quad\times G_1d\varphi_1d\rho_1,\\ A_{\rho_2}^{\text{э}} &= \int_a^\infty\int_0^{2\pi}\rho_1\left[J_{\rho_1}^{\text{э}}\cos(\varphi_2-\varphi_1) + J_{\varphi_1}^{\text{э}}\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]\times\\ &\quad\times G_1d\varphi_1d\rho_1,\\ A_{\rho_2}^{\text{м}} &= \int_a^\infty\int_0^{2\pi}\rho_1\left[J_{\rho_1}^{\text{м}}\cos(\varphi_2-\varphi_1) + J_{\varphi_1}^{\text{м}}\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]\times\\ &\quad\times G_1d\varphi_1d\rho_1, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$G_1 = \frac{-1}{8\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[im(\varphi_2-\varphi_1)]\times$$

$$\times\int_{\eta=-\infty}^{\infty}\left[J_m(\eta\rho_<) - \frac{\Omega J_m(\eta a)}{\Omega H_m^{(1)}(\eta a)}H_m^{(1)}(\eta\rho_<)\right]H_m^{(1)}(\eta\rho_>)\times$$

$$\times\frac{\exp\left[i\sqrt{k^2-\eta^2}|z|\right]}{\sqrt{k^2-\eta^2}}\eta\,d\eta$$

– функция Грина на цилиндре [2], $\Omega = 1$ – для нахождения компонент поля $E_{\varphi_2}$ и $H_{\rho_2}$, $\Omega = \partial/\partial a$ – для нахождения компоненты поля $H_{\varphi_2}$, $E_{\rho_2}$ и $H_z$, $\rho_< = \rho_1$, $\rho_> = \rho_2$ при $\rho_2 > \rho_1$ и $\rho_< = \rho_2$, $\rho_> = \rho_1$ при $\rho_2 < \rho_1$.

Компоненты полного поля в области между плоскостями $xy$ и $x_1y_1$ вычисляются по формулам

$$E_{\varphi_2} = \frac{1}{-i\omega\varepsilon_a}\left[k^2A_{\varphi_2}^{\text{э}} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\rho_2A_{\rho_2}^{\text{э}}\right) + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_{\varphi_2}^{\text{э}}\right]\right] - \frac{\partial}{\partial z}A_{\rho_2}^{\text{м}},$$

$$H_{\rho_2} = \frac{1}{-i\omega\mu_a}\left[k^2A_{\rho_2}^{\text{м}} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\rho_2A_{\rho_2}^{\text{м}}\right) + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_{\varphi_2}^{\text{м}}\right]\right] - \frac{\partial}{\partial z}A_{\varphi_2}^{\text{э}},$$

$$H_z = \frac{1}{-i\omega\mu_a}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\rho_2A_{\rho_2}^{\text{м}}) + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_{\varphi_2}^{\text{м}}\right] +$$

$$+\frac{1}{\rho_2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\rho_2A_{\varphi_2}^{\text{э}}\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_{\rho_2}^{\text{э}}\right],$$

$$E_{\rho_2} = \frac{1}{-i\omega\varepsilon_a}\left[k^2 A^{э}_{\rho_2} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\rho_2 A^{э}_{\rho_2}\right) + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A^{э}_{\varphi_2}\right]\right] + \frac{\partial}{\partial z}A^{м}_{\varphi_2},$$
$$H_{\varphi_2} = \frac{1}{-i\omega\mu_a}\left[k^2 A^{м}_{\varphi_2} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\rho_2 A^{м}_{\rho_2}\right) + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A^{м}_{\varphi_2}\right]\right] + \frac{\partial}{\partial z}A^{э}_{\rho_2}. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (5) значение $\rho_2 = a$, находим компоненты магнитного поля и тока $j_{\varphi_2} = H_z$, $j_z = -H_{\varphi_2}$ на поверхности $S_2$. Далее находим токи на полусфере $S_3$ с использованием токового варианта гибридного метода:

$$j_{\theta_3} = \frac{1}{r_3}\left[\frac{\partial}{\partial r_3}(r_3 A^{э}_{\theta_3}) - \frac{\partial}{\partial\theta_3}A^{э}_{r_3}\right] + \exp(ikh)j_{\theta_1},$$
$$\text{при } r_3 = a, \quad (6)$$
$$j_{\varphi_3} = \frac{-1}{r_3}\left[\frac{1}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\varphi_3}(A^{э}_{r_3}) - \frac{\partial}{\partial r_3}(r_3 A^{э}_{\varphi_3})\right] + \exp(ikh)j_{\varphi_1},$$

где

$$A^{э}_{r_3} = \sin\theta_3\int_0^h\int_0^{2\pi} a\, j_{\varphi_2}\sin(\varphi_3-\varphi_2)G_2 dz d\varphi_2 +$$
$$+\cos\theta_3\int_0^h\int_0^{2\pi} a\, j_z G_2 dz d\varphi_2,$$
$$A^{э}_{\theta_3} = \cos\theta_3\int_0^h\int_0^{2\pi} a\, j_{\varphi_2}\sin(\varphi_3-\varphi_2)G_2 dz d\varphi_2 -$$
$$-\sin\theta_3\int_0^h\int_0^{2\pi} a\, j_z G_2 dz d\varphi_2,$$
$$A^{э}_{\varphi_3} = \int_0^h\int_0^{2\pi} a\, j_{\varphi_2}\cos(\varphi_3-\varphi_2)G_2 dz d\varphi_2,$$
$$G_2 = \frac{-k}{4\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\varepsilon_m\frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\times$$
$$\times\left[\psi_n(kr_3) - \frac{\partial(a\psi_n(ka))/\partial a}{\partial(a\xi^{(1)}_n(ka))/\partial a}\xi^{(1)}_n(kr_3)\right]\xi^{(1)}_n(k\sqrt{a^2+z^2}),$$
$$\cos m(\varphi_3-\varphi_2)P^m_n(\cos\theta_3)P^m_n\left(\cos\left(\operatorname{arctg}(a/z)\right)\right)$$

– функция Грина на сфере [2].

---

Найдем токи на полусфере $S_3$ с использованием апертурного варианта гибридного метода. Подставляя в формулу (5) значения $z = -h$, находим компоненты поля в плоскости $x_1y_1$ по формулам:

$$J^{э}_{\varphi_2} = -H_{\rho_2},\quad J^{м}_{\rho_2} = -E_{\varphi_2},\quad J^{э}_{\rho_2} = H_{\varphi_2},\quad J^{м}_{\varphi_2} = E_{\rho_2}. \quad (7)$$

Векторные потенциалы в сферических координатах имеют вид:

$$A^{э}_{\varphi_3} = \int_a^{\infty}\int_0^{2\pi}\rho_2\left[J^{э}_{\varphi_2}\cos(\varphi_3-\varphi_2) - J^{э}_{\rho_2}\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right]G_2 d\varphi_2 d\rho_2,$$
$$A^{м}_{\varphi_3} = \int_a^{\infty}\int_0^{2\pi}\rho_2\left[J^{м}_{\varphi_2}\cos(\varphi_3-\varphi_2) - J^{м}_{\rho_2}\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right]G_2 d\varphi_2 d\rho_2,$$
$$A^{э}_{r_3} = \sin\theta_3\int_a^{\infty}\int_0^{2\pi}\rho_2\left[J^{э}_{\rho_2}\cos(\varphi_3-\varphi_2) + J^{э}_{\varphi_2}\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right]G_2 d\varphi_2 d\rho_2,$$
$$A^{м}_{r_3} = \sin\theta_3\int_a^{\infty}\int_0^{2\pi}\rho_2\left[J^{м}_{\rho_2}\cos(\varphi_3-\varphi_2) + J^{м}_{\varphi_2}\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right]G_2 d\varphi_2 d\rho_2, \quad (8)$$
$$A^{э}_{\theta_3} = \cos\theta_3\int_a^{\infty}\int_0^{2\pi}\rho_2\left[J^{э}_{\rho_2}\cos(\varphi_3-\varphi_2) + J^{э}_{\varphi_2}\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right]G_2 d\varphi_2 d\rho_2,$$
$$A^{м}_{\theta_3} = \cos\theta_3\int_a^{\infty}\int_0^{2\pi}\rho_2\left[J^{м}_{\rho_2}\cos(\varphi_3-\varphi_2) + J^{м}_{\varphi_2}\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right]G_2 d\varphi_2 d\rho_2.$$

В результате для тока на поверхности $S_3$ ($r_3 = a$) получаем:

$$j^{э}_{\theta_3} = \frac{-1}{i\omega\mu_a}\left[k^2 A^{м}_{\varphi_3} + \frac{1}{r_3\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\varphi_3}\left(\frac{1}{r_3^2}\frac{\partial(r_3^2 A^{м}_{r_3})}{\partial r_3} + \frac{1}{r_3\sin\theta_3}\frac{\partial(\sin\theta_3 A^{м}_{\theta_3})}{\partial\theta_3} + \frac{1}{r_3\sin\theta_3}\frac{\partial A^{м}_{\varphi_3}}{\partial\varphi_3}\right)\right] + \frac{1}{r_3}\left[\frac{\partial}{\partial r_3}\left(r_3 A^{э}_{\theta_3}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_3}A^{э}_{r_3}\right],$$
$$j^{э}_{\varphi_3} = \frac{1}{i\omega\mu_a}\left[k^2 A^{м}_{\theta_3} + \frac{1}{r_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\frac{1}{r_3^2}\frac{\partial(r_3^2 A^{м}_{r_3})}{\partial r_3} + \frac{1}{r_3\sin\theta_3}\frac{\partial(\sin\theta_3 A^{м}_{\theta_3})}{\partial\theta_3} + \frac{1}{r_3\sin\theta_3}\frac{\partial A^{м}_{\varphi_3}}{\partial\varphi_3}\right)\right] + \quad (9)$$
$$+\frac{1}{r_3}\left[\frac{1}{\sin\theta_3}\left(r_3 A^{э}_{\theta_3}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_3}A^{э}_{r_3}\right].$$

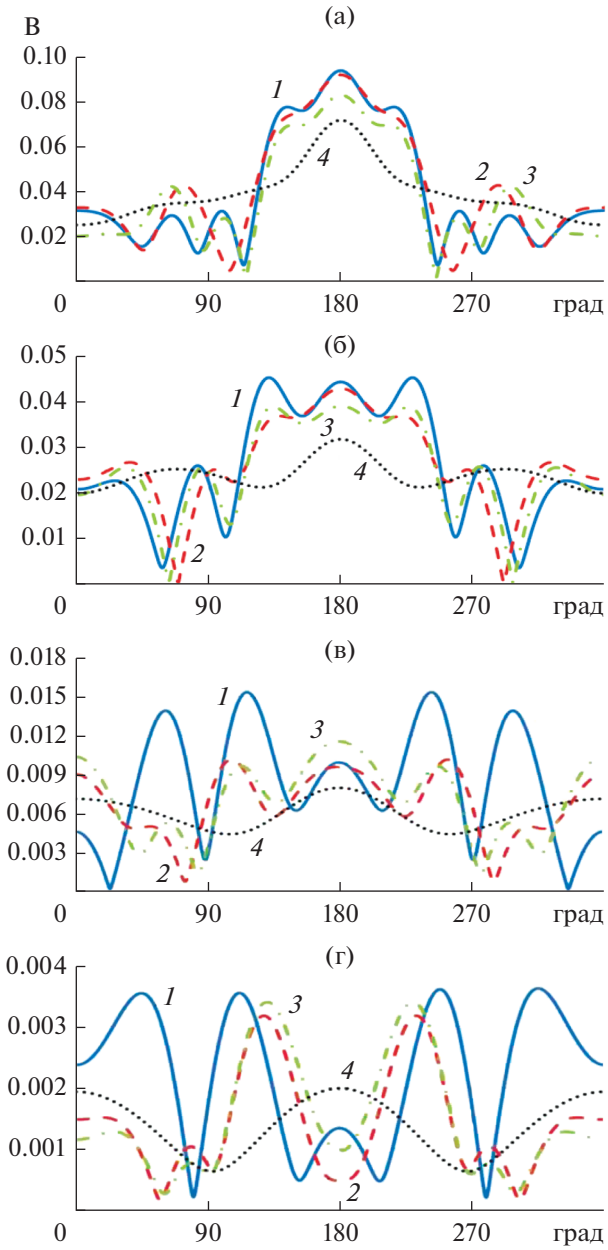


**Рис. 2.** Диаграммы рассеяния в $E$-плоскости ($\varphi = 0$) при $ka = 3$ (а), 2 (б), 1 (в), 0.5 (г).

Таким образом, мы нашли токи на всей поверхности тела с использованием двух вариантов гибридного метода. Далее находим диаграмму рассеяния по известной формуле [1]:

$$E = \frac{-1}{i\omega\varepsilon_a}(k^2 A^{\text{э}} + \operatorname{grad}\operatorname{div} A^{\text{э}}). \qquad (10)$$

При интегрировании по $S_1$ и $S_3$ будем использовать сферические координаты ($r_1$, $\theta_1$, $\varphi_1$) и ($r_3$, $\theta_3$, $\varphi_3$) с центрами в точке $O$ и $O_1$ соответственно, а при интегрировании по $S_2$ – цилиндрическую систему координат.

В результате для диаграммы рассеяния при учете токов на $S_1$ получаем:

$$E_\varphi^1 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_\varphi^{\text{э}}, \quad E_\theta^1 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_\theta^{\text{э}}, \qquad (11)$$

$$\text{где } A_\theta^{\text{э}} = a^2 \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin(\theta_1)\frac{\partial}{\partial\theta}\times$$

$$\times\left[j_{\theta_1}\frac{\partial\cos\beta}{\partial\theta_1} + j_{\varphi_1}\frac{1}{\sin(\theta_1)}\frac{\partial\cos\beta}{\partial\varphi_1}\right]G_0\, d\varphi_1 d\theta_1,$$

$$A_\varphi^{\text{э}} = \frac{a^2}{\sin(\theta)}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin(\theta_1)\frac{\partial}{\partial\varphi}\times$$

$$\times\left[j_{\theta_1}\frac{\partial\cos\beta}{\partial\theta_1} + j_{\varphi_1}\frac{1}{\sin(\theta_1)}\frac{\partial\cos\beta}{\partial\varphi_1}\right]G_0\, d\varphi_1 d\theta_1,$$

$$G_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(ikr)}{r}\times$$

$$\times\exp\left[-ika\left(\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right)\right]$$

– функция Грина свободного пространства в сферических координатах, $\cos\beta = \cos(\theta)\cos(\theta_1) + \sin(\theta)\sin(\theta_1)\cos(\varphi-\varphi_1)$.

Вклад токов на поверхности $S_2$ в диаграмму рассеяния:

$$E_\varphi^2 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_\varphi^{\text{э}}, \quad E_\theta^2 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_\theta^{\text{э}}, \qquad (12)$$

где $A_\theta^{\text{э}} = -a\sin\theta\int_0^{-h}\int_0^{2\pi} j_z G_0 d\varphi_2 dz$, $A_\varphi^{\text{э}} = a\times$ $\times\int_0^{-h}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi-\varphi_2) j_{\varphi_2} G_0 d\varphi_2 dz$.

Вклад токов на поверхности $S_3$ в диаграмму рассеяния:

$$E_\varphi^3 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_\varphi^{\text{э}}, \quad E_\theta^3 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_\theta^{\text{э}}, \qquad (13)$$

$$\text{где } A_\theta^{\text{э}} = a^2 \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\theta_3)\frac{\partial}{\partial\theta}\times$$

$$\times\left[j_{\theta_3}\frac{\partial\cos\beta}{\partial\theta_3} + j_{\varphi_3}\frac{1}{\sin(\theta_3)}\frac{\partial\cos\beta}{\partial\varphi_3}\right]G_0\, d\varphi_3 d\theta_3,$$

$$A_\varphi^{\text{э}} = \frac{a^2}{\sin(\theta)}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\theta_3)\frac{\partial}{\partial\varphi}\times$$

$$\times\left[j_{\theta_3}\frac{\partial\cos\beta}{\partial\theta_3} + j_{\varphi_3}\frac{1}{\sin(\theta_3)}\frac{\partial\cos\beta}{\partial\varphi_3}\right]G_0\, d\varphi_3 d\theta_3,$$

$$\cos\beta = \cos(\theta)\cos(\theta_3) + \sin(\theta)\sin(\theta_3)\cos(\varphi-\varphi_3).$$

В результате, суммируя вклады всех токов для диаграммы рассеяния, получаем

$$\begin{aligned} E_\varphi &= E_\varphi^1 + E_\varphi^2 + \exp[ikh\cos(\theta)]\,E_\varphi^3, \\ E_\theta &= E_\theta^1 + E_\theta^2 + \exp[ikh\cos(\theta)]\,E_\theta^3. \end{aligned} \qquad (14)$$

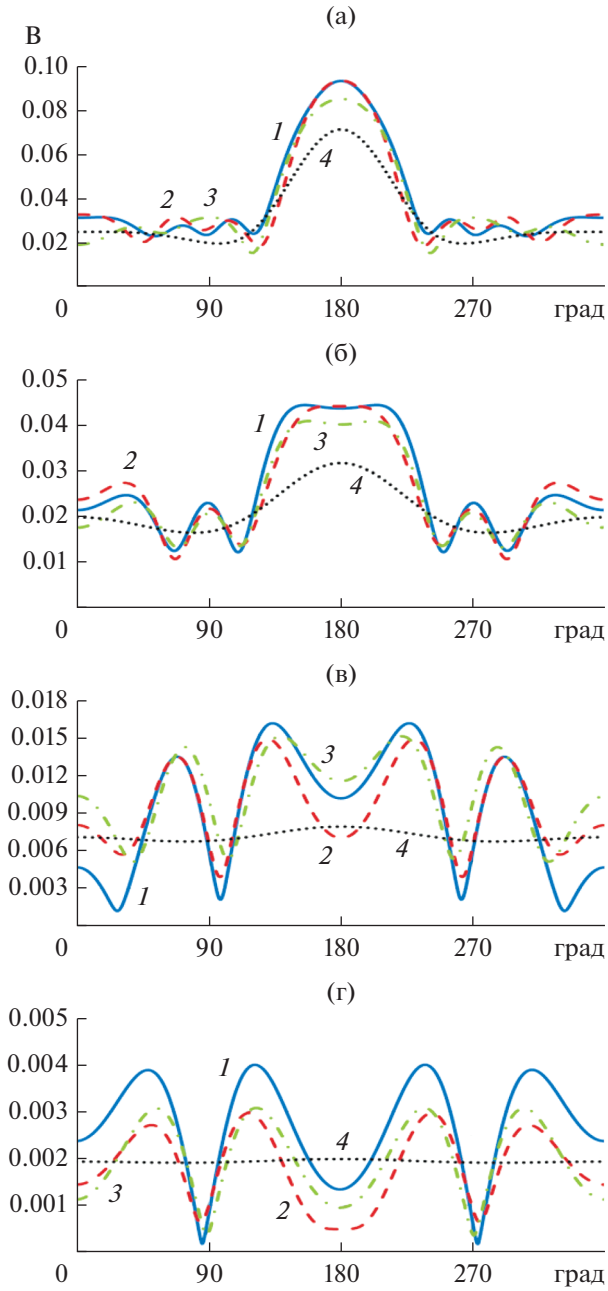


**Рис. 3.** Диаграммы рассеяния в *H*-плоскости (φ = 90°) при *ka* = 3 (а), 2 (б), 1 (в), 0.5 (г).

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2, 3 приведены результаты расчета диаграммы рассеяния плоской волны на цилиндре с электрической длиной $kh = 5$ для различных *ka* в *E*- и *H*-плоскостях соответственно. Кривая *1* показывает результаты расчета методом моментов, *2* – гибридным методом (апертурный вариант), *3* – гибридным методом (токовый вариант), *4* – методом ГФК.

Как видно из рис. 2 и 3, диаграммы рассеяния в *E*-плоскости, рассчитанные методом моментов и гибридным методом, достаточно хорошо совпадают при $ka > 2$. При этом лучшее совпадение обеспечивает апертурный вариант гибридного метода. Метод ГФК дает только качественное описание диаграммы рассеяния. При $ka = 1$ и менее совпадение наблюдается только в области рассеяния вперед. В *H*-плоскости совпадение результатов, полученное двумя вариантами гибридного метода и методом моментов, наблюдается для всех исследованных значений *ka*. При этом разница между этими результатами, как и в *E*-плоскости, уменьшается с ростом *ka*. Метод ГФК не дает даже качественного описания диаграммы рассеяния в *H*-плоскости. Наиболее точные результаты расчета при использовании гибридного метода наблюдаются в обеих плоскостях при рассеянии вперед, наименее точные – при рассеянии назад.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании сравнения результатов расчета диаграммы рассеяния двумя вариантами гибридного метода и методом моментов можно сделать следующие выводы.

1. Применение обоих вариантов гибридного метода, в отличие от метода Гюйгенса–Френеля–Кирхгофа, позволяет обеспечить хорошее совпадение с результатами расчета диаграммы рассеяния методом моментов при соотношении радиуса тела вращения к длине волны более 0.3, а в *H*-плоскости и для меньших значений.

2. Наиболее точные результаты расчета при использовании гибридного метода наблюдаются при рассеянии вперед, наименее точные – при рассеянии назад, что можно объяснить, во-первых, приближенным характером моделей при вычислении токов на различных частях тела, а во-вторых, учетом последовательных дифракций только в одном направлении.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1967.
2. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978.
3. *Боровиков В.А., Кинбер Б.Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
4. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
5. *Kleshchev A.A.* // J. Acoustics. 2016. V. 6. № 4. P. 45.
6. *Kaloshin V.A., Luu D.T.* // Int. Sci. Conf. “Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves RSEMW-2019”, Divnomorskoe, 24–28 Jun, 2019. N.Y.: IEEE, P. 232. https:// ieeexplore.ieee.org/document/8792743.
7. *Калошин В.А., Луу Д.Т.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 5. С. 457.