

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874

ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ТОНКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗИСТИВНОГО ДИПОЛЯ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© 2021 г. В. И. Пономаренко^а, *, И. М. Лагунов^а^аКрымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
просп. Акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295007 Российская Федерация

*E-mail: vponom@gmail.com

Поступила в редакцию 30.03.2020 г.

После доработки 14.11.2020 г.

Принята к публикации 18.11.2020 г.

Решена с учетом скин-эффекта задача о поляризуемости цилиндрического резистивного диполя в квазистатическом поле. Для случая слабого скин-эффекта показано, что поляризуемость диполя существенно отличается от поляризуемости сопоставимого с диполем эллипсоида. Проведены расчеты эффективной диэлектрической проницаемости композитов с цилиндрическими и эллипсоидальными включениями. Приведено сравнение результатов расчетов с литературными экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0033849421050090

ВВЕДЕНИЕ

Композиционные материалы на основе диполей в виде отрезков проводящих волокон перспективны в качестве радиопоглощающих в технике сверхвысоких частот. Такие материалы имеют релаксационный характер дисперсии эффективной диэлектрической проницаемости (ЭДП), которую можно варьировать в широких пределах изменением концентрации диполей, их проводимости и размеров [1–3]. Проектирование таких композитов основывается на расчете частотной зависимости ЭДП. В случае упорядоченного расположения диполей расчет ЭДП может быть проведен с высокой точностью на основе решения задачи дифракции на периодической структуре с резистивными элементами [4–7]. Однако в реальных композитах имеет место хаотическое распределение ориентации диполей. ЭДП таких композитов вычисляется по приближенным формулам смешения Максвелла Гарнетта, Бруггемана, Оделевского или синтеза этих теорий [8–10]. Характеристикой цилиндрического диполя является его поляризуемость, которая вычисляется путем сопоставления линейному диполю равного ему по объему эллипсоида по статической формуле [3, 11]. Предполагается, что при условии малости длины диполя по сравнению с длиной волны такая замена не приводит к существенной погрешности вычисления поляризуемости, что, однако, не является очевидным. Прямой метод расчета поляризуемости линейного резистивного диполя в квазистатическом поле, предложенный в [12], не учитывает

временного запаздывания электромагнитного взаимодействия зарядов на диполе, которое может быть существенным, если длина диполя сравнима с длиной волны. При этом система линейных уравнений, к которой сводится в [12] расчет поляризуемости, имеет медленную сходимость.

Цель данной работы — расчет поляризуемости линейного резистивного диполя в квазистатическом приближении с учетом запаздывания времени взаимодействия зарядов на диполе, улучшение сходимости вычислительного алгоритма и сравнение результатов расчета с моделью эллипсоида, а также оценка применимости этих расчетов к вычислению ЭДП композиционных материалов.

1. РАСЧЕТ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ДИПОЛЯ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

На рис. 1 изображен тонкий цилиндрический диполь радиусом r и длиной $2h$, находящийся во внешнем однородном электрическом поле с амплитудой $\vec{E}_0$, параллельном оси x и зависящем от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, где i — мнимая единица. Проводимость материала диполя σ , его абсолютная магнитная проницаемость μ . Абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей диполь, равна ϵ_1 . Ввиду предполагаемой тонкости диполя, $r/(2h) \ll 1$, поле текущего по диполю тока на его поверхности можно считать равным полю линейного тока на оси [13, 14].

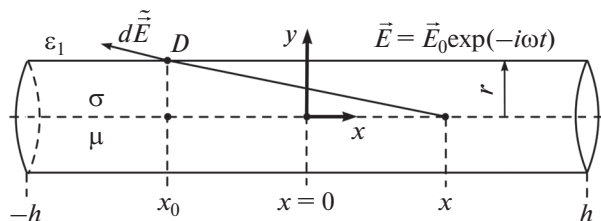


Рис. 1. Резистивный диполь в переменном электрическом поле.

Введем линейную плотность заряда $\rho(x)$ на оси x , тогда для x -компоненты поля $d\tilde{E}_x$, создаваемого малым элементом dx с координатой x в точке D на поверхности диполя, имеющей координату x_0 , получим

$$d\tilde{E}_x = \frac{(x_0 - x)\rho(x)\exp(i\omega\Delta t)}{4\pi\epsilon_1[(x_0 - x)^2 + r^2]^{3/2}} dx, \quad (1)$$

где Δt — время запаздывания “сигнала” от точки x до точки x_0 ,

$$\Delta t = |x_0 - x| \sqrt{\epsilon_1}/c, \quad (2)$$

ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, c — скорость света в вакууме. В (2) учтено, что скорость распространения поля в окружающей диполь среде равна $c/\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$. Плотность заряда связана с величиной $I(x)$ линейного тока соотношением [12]

$$\rho(x) = \frac{1}{i\omega} \frac{dI(x)}{dx}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), применяя формулу интегрирования по частям и полагая ток на краях диполя $I(\pm h)$ равным нулю, получим для x -компоненты собственного поля диполя в точке D :

$$\tilde{E}_x(x_0) = \frac{1}{4\pi i \omega \epsilon_1} \int_{-h}^h I(x) dF(x, x_0). \quad (4)$$

В (4) обозначено

$$F(x, x_0) = \frac{(x - x_0)\exp(i\omega\Delta t)}{[(x_0 - x)^2 + r^2]^{3/2}}. \quad (5)$$

Пренебрегая краевым эффектом, что допустимо ввиду предполагаемой тонкости диполя, имеем

$$\tilde{E}_x(x_0) + E_0 = I(x_0)Z, \quad (6)$$

где Z — комплексное погонное сопротивление диполя, выражаемое по известной формуле через функции Бесселя от аргумента $(i\omega\sigma\mu)^{1/2}$ [13, 15].

С учетом (4) равенство (6) представляет собой интегральное уравнение относительно функции $I(x)$. Поделив отрезок $x \in (-h, h)$ узловыми точками

$$x_n = -h + \left(n - \frac{1}{2}\right)\delta, \quad \delta = 2h/\tilde{N}, \quad n = 1, 2, \dots, \tilde{N}, \quad (7)$$

где $\tilde{N}$ — число элементарных отрезков шириной δ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно токов $\{I_n\}$ в узлах:

$$ZI_n = E_0 + \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \alpha_{nm} I_m, \quad (8)$$

$$\alpha_{nm} = \frac{F\left(x_m + \frac{\delta}{2}, x_n\right) - F\left(x_m - \frac{\delta}{2}, x_n\right)}{4\pi i \omega \epsilon_1}. \quad (9)$$

Матричные элементы вычислены с учетом того, что они выражаются через интегралы от дифференциала функции F . Ввиду четности функции $I(x)$ токи на элементах диполя, расположенных симметрично относительно середины диполя, равны, что позволяет при четном $\tilde{N}$ сократить число уравнений и неизвестных системы (8), (9) до значения $N = \tilde{N}/2$.

Отметим, что по сравнению с [11] в данной работе не только учтено временное запаздывание взаимодействия между элементами диполя, но и получена система уравнений для вычисления токов на элементах, имеющая, как показали численные расчеты, лучшую сходимость.

Поляризуемость диполя определяется из отношения дипольного момента к напряженности внешнего поля:

$$\alpha = \frac{2}{E_0} \int_0^h x\rho(x)dx. \quad (10)$$

Подставляя (3) в (10), учитывая, что $I(h) = 0$, и применяя интегрирование по частям, получим

$$\alpha = \frac{2i}{\omega E_0} \int_0^h I(x)dx, \quad \alpha = \frac{2i\delta}{\omega E_0} \sum_{n=1}^N I_n, \quad (11)$$

где суммирование ведется по номерам элементов диполя, принадлежащих отрезку $(0, h)$ оси x .

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ДИПОЛЕЙ И ЭЛЛИпсоИДОВ

Расчет поляризуемости α немагнитных цилиндрических диполей проводился по формуле (11). В целях сравнения проводился также расчет поляризуемости α_x вытянутого эллипсоида вращения по статической формуле [11]:

$$\alpha_x = v \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1/(\epsilon_2 - \epsilon_1) + n_x}, \quad (12)$$

где n_x — коэффициент деполяризации (КД),
 $v = \frac{4}{3}\pi b^2 a$ — объем эллипсоида, $a, b < a$ — полу-
 оси, причем длинная полуось a направлена вдоль
 оси x , параллельной внешнему полю. Диэлектри-
 ческая проницаемость ε_2 эллипсоида вычисля-
 лась по формуле [16]

$$\varepsilon_2 = i\sigma/\omega. \quad (13)$$

Если отношение b/a малой и большой полуосей
 эллипсоида много меньше единицы, то КД мож-
 но вычислять по приближенной формуле [17]:

$$n_x = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left\{ \ln\left(\frac{2a}{b}\right) - 1 \right\}. \quad (14)$$

Полагая объем v эллипсоида равным объему ди-
 поля, а большую полуось равной полудлине ди-
 поля h , получим

$$a = h, \quad b = \sqrt{\frac{3}{2}}r. \quad (15)$$

Из (14), (15) находим КД эллипсоида, сопостав-
 ляемого диполю.

При численных расчетах поляризуемостей ци-
 линдрического диполя и эллипсоида полагалось
 $r = 4$ мкм, $\sigma = 10000$ См, $\varepsilon_1 = 1.8 \varepsilon_0$. При таких
 значениях r и σ скин-эффект незначителен и
 сравнение квазистатической поляризуемости ди-
 поля со статической поляризуемостью сопостав-
 ляемого ему эллипсоида является корректным.
 Расчеты проводили для двух значений длины ди-
 поля, $l_1 = 2h_1 = 10$ мм (“длинные диполи”) и
 $l_2 = 2h_2 = 1.5$ мм (“короткие диполи”). Число раз-
 биений полудлины диполя на элементы $N = 80$.

На рис. 2а приведены зависимости от частоты
 f вещественной и мнимой компонент поляризу-
 емости $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ диполя длиной $l_1 = 10$ мм и

компонент поляризуемости $\alpha_x = \alpha'_x + i\alpha''_x$ анало-
 гичного эллипсоида. На рис. 2б показаны такие
 же зависимости при $l_2 = 1.5$ мм. Из рисунков вид-
 но, что замена цилиндрического диполя эллипсо-
 идом в целях вычисления поляризуемости может
 приводить к значительной количественной
 ошибке.

При расчете структур с диполями иногда ис-
 пользуется предположение о синусоидальном
 распределении модуля тока вдоль длины диполя
 [18], при этом не учитывается изменение фазы то-
 ка вдоль диполя. На рис. 3 приведены зависимо-
 сти распределения нормированного модуля тока
 на диполе при частоте поля 5 ГГц. По оси абсцисс
 откладывается номер элемента $n = 1 \dots 80$, причем
 $n = 1$ соответствует первому от середины диполя
 элементу. Для сравнения приведен график синусо-

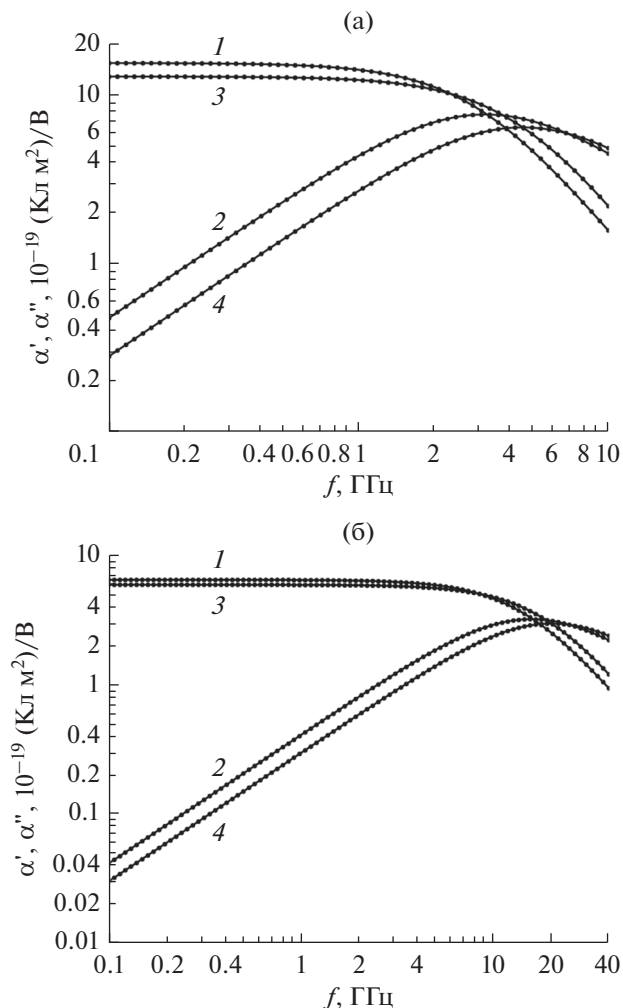


Рис. 2. Зависимость от частоты вещественной (1, 3) и мнимой (2, 4) частей поляризуемости диполей (1, 2) длиной 10 (а) и 1.5 мм (б) и поляризуемости сопоставимых эллипсоидов (3, 4).

идального распределения модуля тока. Из рисунка видно, что распределение модуля тока вдоль диполя существенно отличается от синусоидального, причем для более длинных диполей это отличие значительнее, чем для коротких. На рис. 4 приведено распределение вдоль диполя отставания по фазе тока от внешнего поля, которое является более значительным для короткого диполя.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ЭДП КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ДИПОЛЕЙ

Расчет ЭДП композита на основе цилиндрических диполей проводили по формуле Оделевского [8], используемой для анализа композитов с квазиэллипсоидальными включениями. Для случая, когда главная ось включений направлена

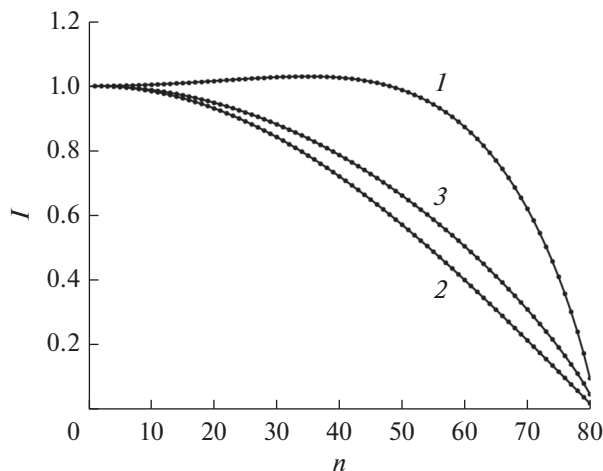


Рис. 3. Зависимость распределения вдоль длины диполя нормированного модуля тока: диполь длиной 10 (1) и 1.5 мм (2) и синусоидальное распределение (3).

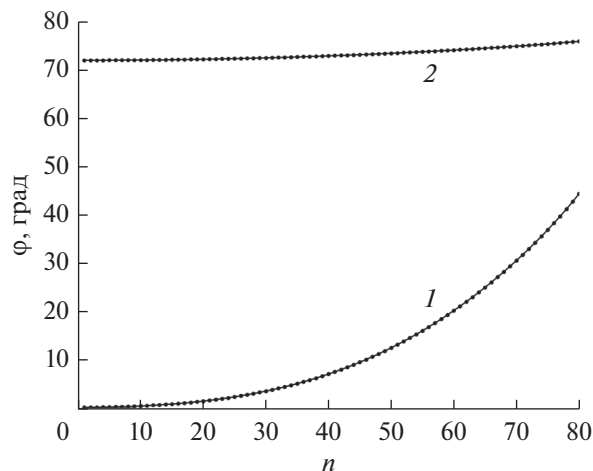


Рис. 4. Зависимость распределения вдоль длины диполя отставания по фазе тока от внешнего поля на частоте: диполь длиной 10 (1) и 1.5 мм (2).

вдоль среднего электрического поля в композите (ось x), формула имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \left(1 + \frac{p}{(1-p)n_x + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} \right), \quad (16)$$

где $\varepsilon_{1,2}$ — диэлектрические проницаемости соответственно матрицы и включений, n_x — коэффициент деполяризации включений по оси x , p — объемная концентрация включений [8].

Из (12), (16) находим

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \left(1 + \frac{p}{v \frac{\varepsilon_1}{\alpha_x} - p n_x} \right). \quad (17)$$

Для различных вариантов ориентации вытянутых эллипсоидов вращения, поляризацией которых в поперечных по отношению к длинной оси направления можно пренебречь, в (17) следует сделать замену

$$\alpha_x \rightarrow K \alpha_x, \quad (18)$$

где K — фактор ориентации, $K = 1$ при ориентации длинных осей эллипсоидов вдоль поля, $K = 1/3$ при хаотической ориентации включений в пространстве и $K = 1/2$ при хаотической ориентации в плоскости, параллельной среднему полю в композите [3].

Расчет ЭДП композита на основе хаотически ориентированных в плоскости цилиндрических диполей проводили путем подстановки в (17) на место α_x поляризуемости α , вычисленной из (11). Полагалось $2h = 10$ мм, $r = 4$ мкм, $\sigma = (10^6/14) = 71429$ См, $\varepsilon_1 = 1.8\varepsilon_0$, $p = 0.05\%$. Такие значения параметров соответствуют композиту на основе

углеродных волокон, экспериментально исследованному в [3]. В целях сравнения был также проведен расчет ЭДП композита на основе эллипсоидов с длиной, объемом и проводимостью такими же, как у диполей. При расчетах ЭДП как композита с диполями, так и композита с эллипсоидами полагалось $v = \pi r^2(2h)$, а величину n_x вычисляли по формулам (14), (15).

На рис. 5а, 5б изображены расчетные и экспериментальные частотные зависимости вещественной ε' и мнимой ε'' компонент относительной эффективной диэлектрической проницаемости композитов с диполями и эллипсоидами. Из рисунков видно, что в целом значения ЭДП, вычисленные для композита с диполями, лучше соответствуют эксперименту. Существенно, что частота, на которой мнимая часть ЭДП максимальна, а также расчетные значения компонент ЭДП на этой частоте для композита с диполями более близки к экспериментальным значениям, чем расчетные значения ЭДП для композита с эллипсоидами.

Аналогичные расчеты, проведенные для композита с короткими диполями длиной $l_2 = 1.5$ мм, $r = 4$ мкм, $\sigma = 10000$ См, $\varepsilon_1 = 1.8\varepsilon_0$, $p = 0.0001$, показали близость значений компонент комплексной ЭДП при цилиндрических и эллипсоидальных включениях, однако обе эти компоненты оказались более чем в два раза отличающимися в меньшую сторону от экспериментальных значений, приведенных в [3].

Отметим, что применение к расчету ЭДП теории эффективной среды Бруггемана [10] привело как для композита с диполями, так и для композита с эллипсоидами к значениям ЭДП, намного завышенным по сравнению с приведенными в [3] экспериментальными данными для диполей дли-

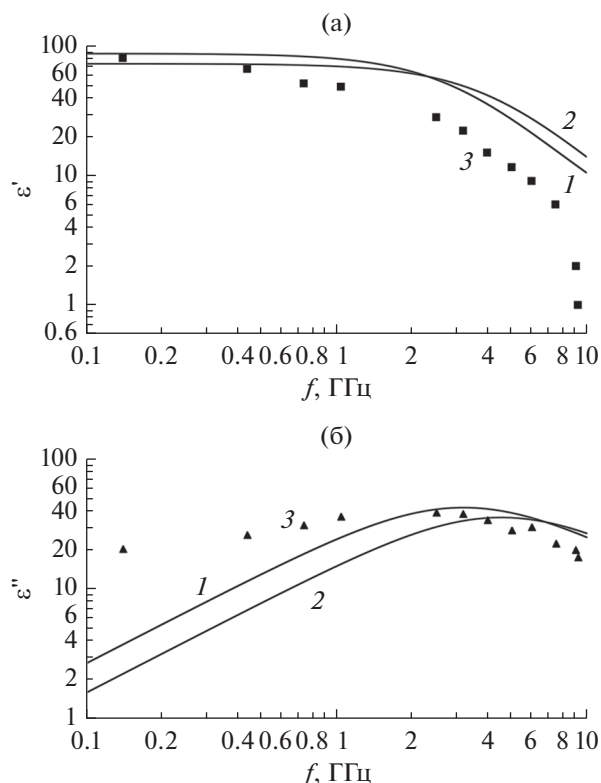


Рис. 5. Зависимость от частоты расчетных значений вещественной (а) и мнимой (б) компонент ЭДП композитов на основе диполей длиной 10 мм (1), сопоставимых эллипсоидов (2) и литературные экспериментальные данные (3).

ной 10 мм и мало отличающимися от расчетов по Оделевскому для диполей длиной 1.5 мм.

Полученное относительное соответствие эксперименту расчетов ЭДП по дипольной модели композита в случае длинных диполей и неудовлетворительное соответствие в случае коротких диполей можно объяснить следующим. Приближение усредненного поля, в котором находится каждый диполь, основано на предположении относительной изолированности диполей друг от друга и на отсутствии “цепочек” диполей, находящихся в контакте друг с другом. Однако по мере увеличения числа включений в единицу объема в композите возникают кластеры, которые становятся аналогом более длинных диполей. Расчеты показывают, что даже небольшое увеличение длины диполей при неизменной объемной концентрации приводит к росту ЭДП, особенно мнимой компоненты. Очевидно, что при образовании в композите кластеров становится неадекватной сама модель композита как совокупности коротких диполей. Введение полуэмпирических поправок к формулам смешения не универсально в том отношении, что не для всех дипольных композитов позволяет получить сопоставимые с эксперимен-

том результаты расчетов ЭДП [9, 19, 20]. Если все же идти по пути введения эмпирических параметров, то, по мнению авторов, таким подгоночным параметром могла бы стать эффективная длина диполей. Другой подход, более перспективный в плане достижения приемлемой точности моделирования — приведенный в [4–7] дифракционный расчет ЭДП ансамбля ориентированных и расположенных в композите по методу случайных чисел диполей. Такой композит можно рассматривать как квазипериодическую структуру с достаточно большим числом диполей разной ориентации и положения на периоде. В настоящее время непринципиальным, но существенным техническим препятствием для реализации дифракционного подхода является большое компьютерное время, требуемое для расчета ЭДП на одной частоте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о поляризуемости тонкого цилиндрического резистивного диполя в квазистатическом электрическом поле при произвольной глубине проникновения поля в диполь и с учетом запаздывания времени зарядов на диполе. Для случая слабого скин-эффекта проведено сравнение поляризуемости диполя со статической поляризуемостью эллипсоида такой же длины, объема и проводимости. Показано, что поляризуемость эллипсоида значительно отличается от поляризуемости цилиндрического диполя. Показано, что распределение тока на диполе существенно отличается от синусоидального. Проведен расчет эффективной диэлектрической проницаемости композитов с диполями, хаотически ориентированными в плоскости, параллельной среднему электрическому полю в композите. Приведено сравнение результатов расчетов с литературными экспериментальными данными. Получено приближенное соответствие расчетных значений ЭДП экспериментальным данным для более длинных диполей и неудовлетворительное соответствие в случае коротких диполей. Проанализированы возможные причины такого несоответствия. Обсуждена возможность применения дифракционного подхода к расчету ЭДП композитов с хаотическим расположением и ориентацией диполей.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность К.Н. Розанову за любезно предоставленные экспериментальные данные, использованные в данной работе для сравнения с ними численных расчетов ЭДП композита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lagarkov A.N., Sarychev A.K. // Phys. Rev. 1996. V. B53. P. 6318.

2. *Беляев А.А., Кондрашов С.В., Лепешкин В.В., Романов А.М.* // *Авиационные материалы и технологии*. 2012. № 5. С. 348.
3. *Розанов К.Н.* Частотно-зависимые магнитные и диэлектрические свойства композитных материалов для широкополосных СВЧ применений. Дис.... докт. физ.-мат. наук. М.: ИТПЭ РАН, 2018. 326 с.
4. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* Композиционные материалы: разработка и применение. Новосибирск: АНС "СибАК", 2017. С. 112.
5. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 7. С. 657.
6. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 5. С. 440.
7. *Лагунов И.М., Пономаренко В.И.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 3. С. 245.
8. *Оделевский В.И.* // ЖТФ. 1951. Т. 21. № 6. С. 667.
9. *Старостенко С.Н., Розанов К.Н., Ширяев О.А. и др.* // ФТТ. 2017. Т. 59. № 11. С. 2183.
10. *Lagarkov A.N., Sarychev A.K., Smychkovich Y.R., Vinogradov A.P.* // *T. Elect. Waves and Appl.* 1992. V. 6. № 9. P. 1159.
11. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
12. *Пономаренко В.И.* // Уч. зап. Симферопольского гос. ун-та. 1998. № 7. С. 142.
13. *Бержанский В.Н., Пономаренко В.И., Попов В.В., Торкунов А.В.* // *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31. № 22. С. 24.
14. *Пономаренко В.И., Попов В.В., Бержанский В.Н., Виногородский Д.Ф.* // *Письма в ЖТФ*. 2006. Т. 32. № 20. С. 7.
15. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле. М.: Высш. школа, 1978.
16. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989.
17. *Балагуров Б.Я.* Электрофизические свойства композитов. М.: ЛЕНАНД, 2015.
18. *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986.
19. *Ghosh K., Fuchs R.* // *Phys. Rev. B*. 1988. V. 38. № 8. P. 5222.
20. *Hong W., Xiao P., Luo H., Li Z.* // *Sci. Rep.* 2015. V. 5. P. 14927.