РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 6, с. 571–576

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 517.958

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

© 2021 г. А. Б. Самохин*

МИРЭА – Российский технологический университет,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

**E-mail: absamokhin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 17.10.2020 г.
После доработки 27.10.2020 г.
Принята к публикации 05.11.2020 г.

Доказано, что при определенных условиях в ограниченной диэлектрической среде без потерь существуют ненулевые решения однородной задачи. Если среда анизотропная, то в области неоднородности может находиться электромагнитная энергия и при этом нет излучения в окружающее пространство.

DOI: 10.31857/S0033849421060218

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы единственности решения задач взаимодействия электромагнитного поля с неоднородной диэлектрической средой, находящейся в трехмерной ограниченной области Q, окруженной свободным пространством, имеют принципиальное значение в электродинамике. Если среда в Q имеет потери, то решение задачи единственно, т.е. при отсутствии внешнего источника поля решение во всем пространстве, в том числе в области Q, может быть только нулевым. При отсутствии потерь в среде, особенно при наличии анизотропии, возникают значительные трудности при доказательстве единственности. В работах [1–3] было доказано, что для сред без потерь и с гладкими параметрами среды во всем пространстве решение задач единственно, если выполняется условие

$$\sum_{n,m=1}^{3} \varepsilon_{nm}(x)\alpha_n\alpha_m \neq 0,\ \ x \in Q,\ \ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad (1)$$

где ε_{nm} – компоненты тензора ора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ в декартовой системе координат. Для изотропной среды условие (1) принимает вид $\varepsilon(x) \neq 0,\ \ x \in Q$.

Цель данной работы – представить доказательство, что в среде без потерь, в которой нарушается условие (1), существуют ненулевые решения в Q для однородной задачи. Если среда анизотропная, то в области Q может находиться электромагнитная энергия и при этом нет излучения в окружающее пространство.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующий класс задач. В трехмерной ограниченной области Q среда характеризуется эрмитовой кусочно-дифференцируемой тензор функцией диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$, а вне области диэлектрическая проницаемость изотропна и равна ε_0 и везде $\mu = \mu_0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_0 = 0$, $\operatorname{Im}\mu_0 = 0$, $\operatorname{Re}\varepsilon_0 > 0$, $\operatorname{Re}\mu_0 > 0$. (Тензор $\hat{\alpha}$ является эрмитовым, если $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}^*$, где $\hat{\alpha}^*$ - сопряженный тензор, т.е. транспонированный тензор с комплексно сопряженными элементами). Нашей целью является изучение решений однородных уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E},\ \ \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H}, \quad (2)$$

удовлетворяющих условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 ru\right) = 0,\ \ r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (3)$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, u – любая из декартовых компонент полей $\vec{E}$ или $\vec{H}$. Кроме того, на поверхностях разрыва параметров среды тангенциальные компоненты полей должны быть непрерывны.

Поставленная задача может быть сведена к однородному объемному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля [1]

$$\begin{gathered}\vec{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\vec{E}(x) - p.v.\times \\ \times\int_{\Omega}\left((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y), \operatorname{grad}\right)\operatorname{grad}G(R)dy - \\ - k_0^2\int_{\Omega}(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y)G(R)dy = 0, \\ x \in \Omega,\ \ \hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_0,\end{gathered} \quad (4)$$

где G – функция Грина для уравнения Гельмгольца

$$G(R) = \exp(ik_0R)/(4\pi R), \tag{5}$$

$R = |x - y|$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $\Omega \supseteq Q$. Из (4) ясно, что электромагнитное поле в Q не зависит от значения полей в области $\Omega\backslash\bar{Q}$.

2. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ СТРУКТУР

С помощью леммы Реллиха, используя условие на бесконечности (3), в [4] доказывается, что в области $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{Q}$ электромагнитное поле, удовлетворяющее (2), (3), равно нулю. Тогда из теоремы Пойнтинга, учитывая эрмитовость тензор-функции $\hat{\varepsilon}(x)$, следует интегральное равенство

$$\int_Q \vec{E}^* \hat{\varepsilon} \vec{E} dQ = \mu_0 \int_Q \left|\vec{H}\right|^2 dQ. \tag{6}$$

Для изучения решений однородных уравнений будем применять принцип продолжения решения по непрерывности, который справедлив для эллиптических дифференциальных уравнений [5]. Несложно видеть, что уравнения Максвелла не являются эллиптическими. Однако если тензор-функция $\hat{\varepsilon}(x)$ трижды дифференцируема в какой-либо области, то в этой области уравнения Максвелла (2) могут быть сведены в декартовой системе координат к следующей системе дифференциальных уравнений [2, 6]:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{lm}\frac{\partial^2 E_k}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_l} E_m\right) + \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_k}\frac{\partial E_m}{\partial x_l} + \\
+ i\omega\mu_0\varepsilon_{lm}L_{kmn}\frac{\partial}{\partial x_l}(H_n) = 0, \quad k = 1,2,3, \\
\frac{\partial^2 H_k}{\partial x_l \partial x_l} - i\omega L_{k\ln}\frac{\partial}{\partial x_l}(\varepsilon_{np}E_p) = 0, \quad k = 1,2,3.
\end{gathered} \tag{7}$$

В (7) используется правило суммирования по повторяющимся индексам, а L_{kmn} – символ Леви–Чивита. Система уравнений (7) будет эллиптической, если выполняется условие (1) [2, 6].

Для исследования решений интегрального уравнения (4) будем использовать гильбертово пространство интегрируемых с квадратом вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ со скалярным произведением, определяемым формулой

$$\left(\vec{U}, \vec{V}\right) = \int_\Omega \vec{U}(x)\vec{V}^*(x)dx. \tag{8}$$

Дадим несколько определений, которые используются в дальнейшем изложении.

Определение 1. *Пусть A – линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Тогда оператор A^*, который также определен в H, называется сопряженным к A, если равенство $(Af, g) = (f, A^*g)$ выполняется для всех $f, g \in H$.*

Решения однородного уравнения $Au = 0$ будем называть нулями оператора A. Обозначим размерность подпространства нулей через $n(A)$. Тогда $n(A^*)$ – размерность подпространства нулей сопряженного оператора A^*. Разность $\mathrm{Ind}A = n(A) - n(A^*)$ называется индексом A.

Определение 2. *Линейный ограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется нетеровым оператором, если значения $n(A)$ и $n(A^*)$ конечны.*

Имеет место следующее утверждение [1–3].

Теорема 1. *Пусть тензор-функция $\hat{\varepsilon}(x)$ является всюду в $\mathbf{R}^3$ непрерывной по Гёльдеру функцией координат, а вне ограниченной области Ω диэлектрическая проницаемость постоянна и равна ε_0. Тогда, для того чтобы оператор уравнения (4) был нетеровым в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$, необходимо и достаточно выполнения в Ω условия (1).*

Отметим, что условие эллиптичности дифференциальных уравнений (7) и условие нетеровости интегрального оператора уравнения (4) совпадают, однако для дифференциальных уравнений требуется большая гладкость параметров среды.

Обозначим через A оператор уравнения (4), где $\Omega = Q$. Тогда

$$\begin{gathered}
(A\vec{W})(x) = \left(\hat{I} + \frac{1}{3}\hat{\eta}(x)\right)\vec{W}(x) - \\
- \int_Q \hat{G}_0(x, y)\left(\hat{\eta}(y)\vec{W}(y)\right)dy - \\
- p.v.\int_Q \hat{G}_1(x, y)\left(\hat{\eta}(y)\vec{W}(y)\right)dy, \quad x \in Q,
\end{gathered} \tag{9}$$

где $\hat{\eta}(x) = \left(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}\right)$ – тензор-функция, а $\hat{G}_0(x, y)$ и $\hat{G}_1(x, y)$ – матричные функции, очевидным образом определяемые из (4), (5).

Рассмотрим оператор в пространстве $\vec{L}_2(Q)$ вида

$$(\hat{A}\vec{W})(x) = \int_Q \hat{G}(x, y)\vec{W}(y)dy, \tag{10}$$

где $\hat{G}(x, y)$ – тензор-функция. Из (8) следует, что сопряженный оператор определяется формулой

$$(\hat{A}^*\vec{W})(x) = \int_Q \hat{G}^*(y, x)\vec{W}(y)dy,$$

где $\hat{G}^*$ – сопряженный к $\hat{G}$ тензор. Тогда оператор, сопряженный к оператору (9) в пространстве $\vec{L}_2(Q)$, будет иметь следующий вид:

$$(A^*\vec{W})(x) = \left(\hat{I} + \frac{1}{3}\hat{\eta}^*(x)\right)\vec{W}(x) - \\ - \hat{\eta}^*(x)\int_Q \hat{G}_0^*(y,x)\vec{W}(y)\,dy - \qquad (11)\\ - \hat{\eta}^*(x)\,p.v.\int_Q \hat{G}_1^*(y,x)\vec{W}(y)\,dy, \quad x \in Q.$$

Из (4), (5) следует, что $\hat{G}_n(x,y) = \hat{G}_n(y,x)$, $\hat{G}_n = \hat{G}_n^t$, $n = 0, 1$. Учитывая эти свойства тензоров, возьмем комплексное сопряжение от выражения (11):

$$(A^*\vec{W})^*(x) = \left(\hat{I} + \frac{1}{3}\hat{\eta}^t(x)\right)\vec{W}^*(x) - \\ - \hat{\eta}^t(x)\int_Q \hat{G}_0(x,y)\vec{W}^*(y)\,dy - \qquad (12)\\ - \hat{\eta}^t(x)\,p.v.\int_Q \hat{G}_1(x,y)\vec{W}^*(y)\,dy, \quad x \in Q.$$

В (12) символы t и * обозначают соответственно транспонированный тензор и комплексно сопряженный вектор.

Имеет место следующее вспомогательное утверждение [7].

Лемма 1. *Пусть тензор-функция* $\hat{\eta}(x) = \left(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}\right)$ *может не иметь обратную функцию в Q только на множестве точек меры ноль, например на границе Q. Тогда размерности подпространств нулей оператора* $A(\hat{\varepsilon}^t)$ *и оператора* $A^*(\hat{\varepsilon})$*, действующих в* $\vec{L}_2(Q)$*, связаны равенством* $n\left(A^*(\hat{\varepsilon})\right) = n\left(A(\hat{\varepsilon}^t)\right)$*, где A и A* определяются выражениями (9) и (11).*

Доказательство.

Пусть $\vec{W} \in \vec{L}_2(Q)$ – нуль оператора (11), т.е. $A^*\vec{W} = 0$. Обозначим

$$\vec{V}(x) = -\frac{1}{3}\vec{W}^*(x) + \int_Q \hat{G}_0(x,y)\vec{W}^*(y)\,dy + \\ + \ p.v.\int_Q \hat{G}_1(x,y)\vec{W}^*(y)\,dy.$$

Тогда, поскольку $A^*\vec{W} = 0$, из (12) получим $\vec{W}^* = \hat{\eta}^t\vec{V}$. Теперь из (9), (12) имеем

$$\hat{\eta}^t A(\hat{\varepsilon}^t)\vec{V} = (A^*\vec{W})^* = 0, \qquad (13)$$

где $A(\hat{\varepsilon}^t)$ – оператор уравнения (9) с тензором диэлектрической проницаемости, равным $\hat{\varepsilon}^t$. Из (13) следует, что любой нуль оператора $A^*(\hat{\varepsilon})$ определяет нуль оператора $A(\hat{\varepsilon}^t)$. Обратное из (13) не следует. Значит, размерности подпространств нулей этих операторов связаны неравенством $n\left(A^*(\hat{\varepsilon})\right) \le n\left(A(\hat{\varepsilon}^t)\right)$. Теперь пусть $\vec{W}$ – нуль оператора (9) с диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}^t$, т.е. $A(\hat{\varepsilon}^t)\vec{W} = 0$. Обозначим $\vec{V}^* = \hat{\eta}^t\vec{W}$. Тогда из (9), (12) имеем $(A^*\vec{V})^* = \hat{\eta}^t A(\hat{\varepsilon}^t)\vec{W} = 0$, откуда следует, что $n\left(A(\hat{\varepsilon}^t)\right) \le n\left(A^*(\hat{\varepsilon})\right)$. Значит, $n\left(A(\hat{\varepsilon}^t)\right) = n\left(A^*(\hat{\varepsilon})\right)$, т.е. размерности подпространств нулей операторов $A^*(\hat{\varepsilon})$ и $A(\hat{\varepsilon}^t)$ равны. Лемма доказана.

Теперь докажем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть в ограниченной области Q среда характеризуется эрмитовой тензор-функцией диэлектрической проницаемости* $\hat{\varepsilon}(x)$*, а вне Q диэлектрическая проницаемость равна* ε_0*. Кроме того, тензор-функция* $\left(\hat{\varepsilon}(x) - \varepsilon_0\hat{I}\right)$ *может не иметь обратную функцию в Q только на множестве точек меры ноль, например на границе Q. Тогда существуют ненулевые решения однородного уравнения (4) в* $\vec{L}_2(Q)$*, если выполняется одно из следующих условий.*

А. В каждой точке области Q нарушается условие (1); компоненты тензора – вещественные величины и являются непрерывными по Гёльдеру функциями в Q;

Б. Существует подобласть $Q_0 \subset Q$*, в каждой точке которой нарушается условие (1), а в области* $Q \setminus Q_0$ *условие (1) выполняется;* $\hat{\varepsilon}(x)$ *– трижды дифференцируемая функция в* $\mathbf{R}^3$*.*

Если среда в Q анизотропная, тензор $\hat{\varepsilon}$ *имеет обратный тензор в каждой точке области нарушения условия (1), то в области Q может накапливаться энергия электромагнитного поля.*

Доказательство. Будем использовать некоторые рассуждения, приведенные в работе [7] при доказательстве теорем существования и единственности решения задач рассеяния. Рассмотрим сначала условие А теоремы 2. Определим область B в виде шара с центром в точке $x_0 \in Q$ и радиусом $2d$, где d – диаметр области Q (диаметр области – максимальное расстояние между точками границы). Очевидно, что $Q \subset B$. Зададим в области B непрерывную по Гёльдеру эрмитову тензор-функцию $\hat{\varepsilon}^0(x)$, причем $(\hat{\varepsilon}^0)^t = \hat{\varepsilon}^0$, а компоненты тензора вещественные величины. Далее, в области Q функция $\hat{\varepsilon}^0(x)$ совпадает с функцией $\hat{\varepsilon}(x)$, т.е. $\hat{\varepsilon}^0(x) = \hat{\varepsilon}(x), x \in Q$. Определим функцию-срезку со свойствами:

$\zeta(t;a,b) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $0 \le \zeta(t;a,b) \le 1$, $\zeta(t;a,b) = 1$ при $t \le a$,

$\zeta(t;a,b) = 0$ при $t \ge b$,

$\zeta(t;a,b) > 0$ при $a < t < b$ $(0 < a < b)$.

Рассмотрим вспомогательную задачу, которая описывается однородным интегральным уравнением (4) в области $\Omega = B$ с диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}^c(x)$, определяемой формулой

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}^c(x) := (\hat{\varepsilon}^0(x) - \varepsilon_0 \hat{I})\zeta(|x - x_0|; d, 2d) + \\ + \varepsilon_0 \hat{\mathrm{I}} + i\sigma(x)\hat{\mathrm{I}}.\end{aligned} \tag{14}$$

В (14) $\sigma(x)$ – вещественная непрерывная по Гёльдеру функция, которая определяется следующим образом:

$\sigma(x) \geq 0$; $\sigma(x) = 0$ при $x \in Q$,

$\sigma(x) > 0$ при $x \in B \setminus Q$;

$\sigma(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}^3 \setminus B$.

Диэлектрическая проницаемость $\hat{\varepsilon}^c(x)$ является всюду в $\mathbf{R}^3$ непрерывной по Гёльдеру функцией. Поскольку условие (1) не выполняется в Q, то из теоремы 1 следует, что оператор A уравнения (4) с указанной диэлектрической проницаемостью не является нетеровым в пространстве $\vec{L}_2(B)$. Докажем, что размерность подпространства нулей оператора бесконечна. Предположим, что это не так, т.е. значение $n(A)$ конечно. Тогда, учитывая, что $(\hat{\varepsilon}^c)^t = \hat{\varepsilon}^c$, из леммы 1 следует – значение $n(A^*)$ тоже конечно и, значит, оператор A является нетеровым. Таким образом, приходим к противоречию, и поэтому значение $n(A)$ бесконечно.

Теперь рассмотрим структуру нулей оператора уравнения (4), определенного в области B. В области $B \setminus \overline{Q}$ среда, определяемая (14), имеет потери, и поэтому в этой области электромагнитное поле равно нулю. Тогда, сравнивая уравнение (4), определенное в области B с диэлектрической проницаемостью (14), и уравнение (4) в области Q, находим, что множества нулей операторов этих уравнений совпадают в Q. Значит, существует бесконечное число ненулевых решений однородного уравнения (4) в $\vec{L}_2(Q)$.

Покажем, что для анизотропной среды энергия электромагнитного поля, определяемая ненулевыми решениями в Q, также ненулевая. Энергия электромагнитного поля в Q определяется выражением

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\left(\int\limits_Q \vec{E}^* \hat{\varepsilon} \vec{E} dQ + \mu_0 \int\limits_Q \left|\vec{H}\right|^2 dQ\right). \tag{15}$$

Из (6), (15) получим

$$\mathrm{E} = \mu_0 \int\limits_Q \left|\vec{H}\right|^2 dQ. \tag{16}$$

Значит, электромагнитная энергия в Q будет нулевой, если магнитное поле равно нулю. Предположим, что магнитное поле равно нулю в Q. Тогда из первого уравнения (2) имеем $\hat{\varepsilon}\vec{E} = 0$, и поскольку тензор-функция $\hat{\varepsilon}(x)$ имеет обратную функцию в Q, электрическое поле также равно нулю. Значит, энергия электромагнитного поля, определяемая ненулевыми решениями уравнения (4) в $\vec{L}_2(Q)$, также ненулевая.

Теперь пусть выполняется условие Б теоремы 2. Рассмотрим вспомогательную задачу, которая описывается уравнением (4) в области $\Omega = B$ с диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}(x)$. Из условия теоремы следует, что в области $B \setminus Q$ диэлектрическая проницаемость постоянна и равна ε_0. Но поскольку тензор-функция $\hat{\varepsilon}(x)$ – эрмитова, то электромагнитное поле равно нулю в области $B \setminus Q$. Тогда получаем, что множества нулей операторов уравнения (4) в области B и уравнения (4) в Q совпадают в области Q.

Пусть в уравнении (4) диэлектрическая проницаемость равна $\hat{\varepsilon}^t(x)$. Тогда электромагнитное поле для этой задачи также равно нулю в области $B \setminus Q$. Покажем, что

$$n\left(A(\hat{\varepsilon})\right) = n\left(A(\hat{\varepsilon}^t)\right), \tag{17}$$

где A – оператор уравнения (4) в области B.

Электромагнитное поле в Q, определяемое уравнением (4), удовлетворяет уравнениям Максвелла и нулевым граничным условиям на ∂Q. Из уравнений (2) следует, что элементы множества нулей оператора $A(\hat{\varepsilon})$ описываются решениями уравнения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} - \omega^2\mu_0\hat{\varepsilon}\vec{E} = 0, \tag{18}$$

удовлетворяющими граничным условиям – тангенциальные компоненты $\vec{E}$ и $\operatorname{rot}\vec{E}$ на ∂Q равны нулю. Аналогично, элементы множества нулей оператора $A(\hat{\varepsilon}^t)$ описываются решениями уравнения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}_1 - \omega^2\mu_0\hat{\varepsilon}^t\vec{E}_1 = 0, \tag{19}$$

удовлетворяющими граничным условиям – тангенциальные компоненты $\vec{E}_1$ и $\operatorname{rot}\vec{E}_1$ на ∂Q равны нулю.

Пусть $\vec{E}$ – нуль оператора $A(\hat{\varepsilon})$. Возьмем комплексное сопряжение (18). Тогда, поскольку тензор $\hat{\varepsilon}$ эрмитов, из (18), (19) получим, что $\vec{E}_1 = \vec{E}^*$ является нулем оператора $A(\hat{\varepsilon}^t)$, и поэтому $n\left(A(\hat{\varepsilon})\right) \leq n\left(A(\hat{\varepsilon}^t)\right)$. Аналогично, применяя комплексное сопряжение к (19), получим $n\left(A(\hat{\varepsilon}^t)\right) \leq n\left(A(\hat{\varepsilon})\right)$. Значит, справедливо равенство (17). Поскольку множества нулей операторов уравнений (4) в B и в Q совпадают в области Q, получим равенство (17) для оператора уравнения (4) в Q.

Диэлектрическая проницаемость $\hat{\varepsilon}(x)$ является всюду в $\mathbf{R}^3$ дифференцируемой функцией. Поэтому, поскольку условие (1) не выполняется в области $Q_0 \subset Q$, из теоремы 1 получим, что оператор уравнения (4) не является нетеровым в пространстве $\vec{L}_2(Q)$. Из (17) и леммы 1 следует, что $n(A) = n(A^*)$ для оператора уравнения (4) в области Q. Значит, аналогично изложенному выше получаем, что значение $n(A)$ бесконечно.

Теперь рассмотрим структуру нулей оператора уравнения (4) в области B. Согласно условию Б, эрмитова тензор-функция $\hat{\varepsilon}(x)$ в области $B \setminus Q_0$ удовлетворяет условию (1) и является трижды дифференцируемой. Тогда, используя уравнения (7) и применяя принцип продолжения решения по непрерывности [5] из области $B \setminus \overline{Q}$ в область $Q \setminus Q_0$, получим, что электромагнитное поле равно нулю в $B \setminus Q_0$. Множества нулей оператора уравнения (4) в B и оператора уравнения (4) в Q совпадают. Значит, существует бесконечное число ненулевых решений однородного уравнения (4) из $\vec{L}_2(Q)$, которые локализованы в области Q_0.

Для анизотропной среды получим, аналогично изложенному выше, что энергия электромагнитного поля в Q_0, определяемая ненулевыми решениями уравнения (4), ненулевая. Теорема доказана.

В изотропной среде при выполнении условий теоремы 2 энергия электромагнитного поля не может накапливаться. В этом случае нарушение условия (1) принимает вид $\varepsilon(x) = 0$. Тогда в области Q_1, где нарушается условие (1), из (6) имеем, что в этой области магнитное поле равно нулю. Значит, согласно (16) энергия также равна нулю. Далее из второго уравнения (2) следует, что $\vec{E} = \mathrm{grad}\varphi$, где φ — любая дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\mathrm{grad}\varphi = 0$ на ∂Q_1. Очевидно, что существует бесконечное число таких ненулевых решений.

Пусть диэлектрическая проницаемость всюду в $\mathbf{R}^3$ постоянна и равна ε_0, а в области Q задана тензор-функция магнитной проницаемости $\hat{\mu}(x)$. Тогда справедливы рассмотренные уравнения с заменой $\vec{E} \to \vec{H}, \vec{H} \to -\vec{E}$ и диэлектрической проницаемости на магнитную проницаемость и обратно. Очевидно, что в этом случае справедливы все полученные утверждения с указанными выше заменами.

3. ПРИМЕРЫ РЕЗОНАНСНЫХ СТРУКТУР

Теорема 2 дает ответ на вопрос о существовании открытых резонансных анизотропных диэлектрических структур.

Приведем пример простой анизотропной среды, для которой выполняется условие А теоремы 2. В области Q среда характеризуется постоянным тензором диэлектрической проницаемости, который в декартовой системе координат имеет вид $\varepsilon_{nm} = \varepsilon_n \delta_{nm}$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — вещественные величины, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \neq \varepsilon_0$, а $\varepsilon_3 < 0$. Очевидно, что выполняются все условия теоремы, поэтому в Q может накапливаться электромагнитная энергия. Отметим, что форма области Q может быть практически любой. Можно привести много других примеров, удовлетворяющих условиям теоремы. Однако следует отметить, что подобные анизотропные диэлектрические структуры могут быть получены, по-видимому, только искусственным способом.

Теперь приведем пример анизотропной среды, удовлетворяющей условию Б теоремы 2. Рассмотрим анизотропную плазменную среду без потерь. В области Q среда характеризуется функциями плотности электронов $N(x)$ и внешнего магнитного поля $\vec{H}_0(x)$, которые являются трижды дифференцируемыми в $\mathbf{R}^3$, причем $\vec{H}_0(x), N(x) = 0$ при $x \in \mathbf{R}^3 \setminus Q$. Для описания тензора диэлектрической проницаемости в точке $x \in Q$ введем локальную декартовую систему координат так, чтобы вектор $\vec{H}_0(x)$ был направлен вдоль оси x_3. Тогда компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости среды в локальной системе координат в точке $x \in Q$ будут иметь вид [8]

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\left(\omega^2 - \omega_H^2\right)}, \quad \varepsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \\ \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -i\frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega\left(\omega^2 - \omega_H^2\right)}, \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc},\end{gathered} \tag{20}$$

где e и m — заряд и масса электрона соответственно; c — скорость света; $N = N(x)$, $H_0 = \left|\vec{H}_0(x)\right|$.

Из (20) следует

$$\sum_{n,m=1}^{3} \varepsilon_{nm}\alpha_n\alpha_m = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\left(\omega^2 - \omega_H^2\right)}\right) \times (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\alpha_3^2. \tag{21}$$

Из (21), учитывая, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 - \alpha_3^2$, получим, что условие (1) будет нарушено, если

$$\alpha_3^2 = \frac{\omega^2}{\omega_p^2 \omega_H^2}\left(\omega_p^2 + \omega_H^2 - \omega^2\right), \ |\alpha_3| \le 1, \ \mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0. \quad (22)$$

Требование $\mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0$ приводит к тому, что $\omega^2 \le \omega_p^2 + \omega_H^2$. Далее из (22) следует, что условие $|\alpha_3|^2 \le 1$ приводит к тому, что должно выполняться неравенство $\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)\left(\omega^2 - \omega_H^2\right) \ge 0$. Получим, что условие (1) не будет выполняться, если справедливо одно из следующих условий:

$$\omega \le \min\{\omega_p, \omega_H\}, \quad (23)$$

$$\omega \ge \max\{\omega_p, \omega_H\}, \ \ \omega^2 \le \omega_p^2 + \omega_H^2. \quad (24)$$

Отметим, что в приведенные условия не входят параметры локальной системы координат.

Рассмотрим условие (24). Пусть в каждой точке области $Q_0 \subset Q$ выполняется условие $\omega(x)_p^2 + \omega(x)_H^2 = \omega^2$, а в области $Q \setminus Q_0$ справедливо неравенство $\omega^2 > \omega(x)_p^2 + \omega(x)_H^2$. Тогда в каждой точке области Q_0 условие (1) нарушается, а в области $Q \setminus Q_0$ оно выполняется. Далее из (20) следует, что тензор-функция $\hat{\varepsilon}(x)$ имеет обратную функцию в каждой точке области Q_0. Кроме того, из (20) следует, что тензор $(\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})$ имеет обратный в каждой точке области Q, за исключением границы ∂Q. Значит, выполняются все условия теоремы 2, и в области Q_0 может накапливаться энергия электромагнитного поля. Используя условия (23), (24), можно построить примеры других сред, удовлетворяющих условиям теоремы 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, доказано, что в среде без потерь, в которой нарушается условие (1) в области неоднородности Q, могут существовать ненулевые решения однородной задачи. Если среда анизотропная, то в области Q может находиться электромагнитная энергия и при этом нет излучения в окружающее пространство. Полученные результаты открывают принципиальную возможность создания аккумуляторов электромагнитной энергии. Кроме того, приведенный пример плазменной среды во внешнем магнитном поле показывает, что природа шаровой молнии связана, возможно, с рассмотренными резонансными структурами.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин А.Б.* Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998.
2. *Самохин А.Б.* // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37. № 10. С. 1357.
3. *Самохин А.Б.* // Дифф. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1215.
4. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели в электродинамике. М.: Высш. школа, 1991.
5. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987.
6. *Potthast R.* // J. Integral Equations Appl. 1999. V. 11. № 2. P. 197.
7. *Самохин А.Б., Смирнов Ю.Г.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 1. С. 85.
8. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.