РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 662–672

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.624;537.632

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕКТОРОМ ПОЙНТИНГА И ВЕКТОРОМ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В БИГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

© 2021 г. Э. Г. Локк[a, *], А. В. Луговской[a], С. В. Герус[a]

[a]*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141196 Российская Федерация*

**E-mail: edwin@ms.ire.rssi.ru*

Поступила в редакцию 29.07.2020 г.
После доработки 10.02.2021 г.
Принята к публикации 21.02.2021 г.

Получены аналитические формулы для всех компонент высокочастотного поля, вектора Пойнтинга $\vec{P}$ и вектора групповой скорости $\vec{U}$ электромагнитных волн, которые распространяются в произвольном направлении в неограниченной бигиротропной среде, описываемой эрмитовыми тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей. Доказано, что соответствующие компоненты векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ пропорциональны друг другу (и, следовательно, эти векторы параллельны), причем отношение этих компонент представляет собой объемную плотность энергии волны. Рассчитано изменение модуля и ориентации вектора $\vec{U}$ и ориентации вектора $\vec{P}$ в зависимости от ориентации волнового вектора для различных типов электромагнитных волн, распространяющихся в ферромагнитной среде (частном случае бигиротропной среды). Найдено, что векторы $\vec{U}$ и $\vec{P}$ всегда ориентированы одинаково для всех типов волн в ферромагнитной среде.

DOI: 10.31857/S003384942107007X

ВВЕДЕНИЕ

Исторически понятия “вектор групповой скорости” и “вектор Пойнтинга” возникли независимо друг от друга, причем оба этих понятия были введены в физику при описании волн в изотропных средах. Так, идея групповой скорости волны, отличающейся от фазовой скорости, впервые была предложена Гамильтоном в 1839 г., а позднее (поскольку эта идея осталась незамеченной) понятие о групповой скорости вновь было введено Стоксом и Рэлеем. Общее представление о потоке энергии в пространстве было введено в физику Умовым в 1874 г., а затем Пойнтинг в 1885 г. получил формулу для расчета потока электромагнитной энергии. В дальнейшем понятия вектора групповой скорости $\vec{U}$ и вектора Пойнтинга[1] $\vec{P}$ стали использовать и для характеристики волн в анизотропных средах. Поскольку оба эти вектора были введены в физику *независимо друг от друга*, то при их использовании для характеристики волн в анизотропных средах необходимо было установить как их взаимную ориентацию, так и их ориентацию по отношению к направлению переноса энергии. В частности, для плоских волн в безграничной анизотропной среде в [1] было показано, что в отсутствие поглощения скорость переноса энергии равна групповой скорости, а в [2] – что в прозрачной немагнитной среде с симметричным тензором диэлектрической проницаемости векторы $\vec{P}$ и $\vec{U}$ нормальны поверхности волновых векторов. В дальнейшем на основе использованного в [2] подхода аналогичные результаты были получены для магнитостатических волн в различных ферритовых структурах [3] и для электромагнитных волн в безграничной бигиротропной среде, описываемой эрмитовыми тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей [4], а в работах [5–7] была исследована скорость переноса энергии волн в среде с положительной аномальной дисперсией и в среде с проводимостью.

Следует, однако, отметить, что поскольку в работах [2–4] фактически было доказано, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{U}$ *нормальны одной и той же поверхности* (поверхности волновых векторов или изочастотной поверхности), то возникает вопрос: всегда ли эти векторы будут направлены одинаково или же существуют среды (условия), когда эти векторы могут быть направлены противоположно? Оче-

[1] Часто называемого также вектором Умова–Пойнтинга.

видно, что кроме анализа уравнений в векторной форме для сравнения ориентаций векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ у волн с неколлинеарной ориентацией групповой и фазовой скоростей необходимо получить для них аналитические выражения в какой-нибудь анизотропной среде, причем при выводе данных выражений не следует использовать различные приближенные методы. Одной из наиболее подходящих анизотропных сред для такого исследования является бигиротропная среда (частными случаями которой являются плазма и ферромагнитная среда), в которой ранее уже исследовалось распространение электромагнитных волн на основе уравнений Максвелла (без магнитостатического приближения) [8–12].

Ниже, развивая исследования, изложенные в [8, 9, 12], получены аналитические выражения для векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ электромагнитных волн, распространяющихся в произвольном направлении в бигиротропной среде, найдено отношение проекций этих векторов, проанализирован физический смысл этого отношения, а также рассчитаны ориентации этих векторов для безграничной ферромагнитной среды.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ БИГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Распространение электромагнитных волн в неограниченном бигиротропной среде уже исследовалось ранее (подробнее см. [8, гл. 5] и [9, гл. 5]). Напомним кратко основные соотношения, необходимые для намеченного исследования.

Пусть имеется бигиротропная среда, намагниченная до насыщения однородным постоянным магнитным полем $\vec{H}_{C0}$. Введем декартову систему координат $\Sigma_D = \{x; y; z\}$ так, чтобы ось z была направлена вдоль вектора $\vec{H}_{C0}$. В общем случае такую намагниченную бигиротропную среду можно охарактеризовать диэлектрической и магнитной проницаемостями, описываемыми эрмитовыми тензорами второго ранга $\vec{\vec{\varepsilon}}$ и $\vec{\vec{\mu}}$:

$$\vec{\vec{\mu}} = \begin{vmatrix} \mu & i\nu & 0 \\ -i\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix}, \quad \vec{\vec{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Электромагнитное поле с частотой ω, распространяющееся в данной среде и изменяющееся во времени по гармоническому закону $\sim\exp(i\omega t)$, должно удовлетворять системе уравнений Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} + i\omega\vec{B}/c = 0 \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} - i\omega\vec{D}/c = 0, \\ \operatorname{div}\vec{D} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

где c — скорость света в вакууме, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — комплексные амплитуды векторов напряженностей электрического и магнитного СВЧ-полей, а $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — комплексные амплитуды векторов напряженностей электрической и магнитной СВЧ-индукций, которые связаны с $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соотношениями

$$\vec{D} = \vec{\vec{\varepsilon}}\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \vec{\vec{\mu}}\vec{H}. \qquad (3)$$

С учетом выражений (1) и (3) систему (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + ik_0\mu H_x - k_0\nu H_y = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_0\nu H_x + ik_0\mu H_y = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + ik_0\mu_{zz} H_z = 0, \qquad (6)$$

$$\mu\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) + i\nu\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) + \mu_{zz}\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - ik_0\varepsilon E_x + k_0 g E_y = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - k_0 g E_x - ik_0\varepsilon E_y = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - ik_0\varepsilon_{zz} E_z = 0, \qquad (10)$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) + ig\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) + \varepsilon_{zz}\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \qquad (11)$$

где $k_0 = \omega/c$.

Из системы (4)–(11) можно получить два уравнения, содержащие лишь компоненты E_z и H_z. Действительно, продифференцируем уравнение (4) по y, а уравнение (5) – по x и вычтем полученные выражения:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) - \\ - k_0\nu\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) - ik_0\mu\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = 0. \end{gathered} \qquad (12)$$

Продифференцируем также уравнение (8) по y, а уравнение (9) – по x и вычтем полученные выражения:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}\right)+ \\ +k_0 g\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)-ik_0\varepsilon\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=0. \tag{13}$$

Третье слагаемое в (12) преобразуем с учетом выражения (11), а затем с учетом (6); четвертое слагаемое в (12) преобразуем с учетом выражения (7), а затем сложим его с пятым слагаемым в (12) и учтем (10). В итоге уравнение (12) примет вид

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+ \\ +k_0^2\varepsilon_{zz}\mu_\perp E_z+k_0\mu_{zz}\left(\frac{g}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\mu}\right)\frac{\partial H_z}{\partial z}=0, \tag{14}$$

где $\mu_\perp=(\mu^2-\nu^2)/\mu$.

Теперь третье слагаемое в (13) преобразуем с учетом выражения (7), а затем с учетом (10). Четвертое слагаемое в (13) преобразуем с учетом выражения (11), а затем сложим его с пятым слагаемым в (13) и учтем (6). В итоге уравнение (13) примет вид

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\frac{\mu_{zz}}{\mu}\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}+ \\ +k_0^2\mu_{zz}\varepsilon_\perp H_z-k_0\varepsilon_{zz}\left(\frac{g}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\mu}\right)\frac{\partial E_z}{\partial z}=0, \tag{15}$$

где $\varepsilon_\perp=(\varepsilon^2-g^2)/\varepsilon$.

Таким образом, мы получили систему из двух уравнений, (14) и (15), содержащих лишь компоненты E_z и H_z. Будем искать решения этой системы в виде однородной плоской электромагнитной волны с волновым вектором $\vec{k}$, т.е. будем считать, что компоненты полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (E_x E_y, E_z, H_x, H_y и H_z) изменяются в пространстве, как и во времени, по гармоническому закону:

$$E_{x,y,z}=E_{x0,y0,z0}\exp(-ik_x x-ik_y y-ik_z z)\quad\text{или} \\ \vec{E}=\vec{E}_0\exp(-i\vec{k}\vec{r}), \tag{16}$$

$$H_{x,y,z}=H_{x0,y0,z0}\exp(-ik_x x-ik_y y-ik_z z)\ \text{или} \\ \vec{H}=\vec{H}_0\exp(-i\vec{k}\vec{r}), \tag{17}$$

где наряду с декартовой системой координат введена также сферическая система координат $\Sigma_S=\{r;\varphi;\theta\}$ в соответствии с соотношениями

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

Очевидно, что модуль k волнового вектора $\vec{k}$ и его компоненты k_x, k_y и k_z также связаны соотношениями

$$k_x=k\sin\theta\cos\varphi,\quad k_y=k\sin\theta\sin\varphi,\quad k_z=k\cos\theta,$$

причем $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=k_\varphi^2+k_z^2$, где k_φ – проекция вектора $\vec{k}$ на плоскость xy, т.е. $k_\varphi^2=k_x^2+k_y^2=k^2\sin^2\theta$. Подставляя выражения (16) и (17) в (14) и (15), получим систему уравнений

$$F_\nu E_{z0}+i\mu_{zz}F_{\nu g}H_{z0}=0, \tag{18}$$

$$F_g H_{z0}-i\varepsilon_{zz}F_{\nu g}E_{z0}=0, \tag{19}$$

где безразмерные функции F_ν, F_g и $F_{\nu g}$ в системах Σ_D и Σ_S имеют вид

$$F_\nu=\frac{k_\varphi^2}{k_0^2}+\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\frac{k_z^2}{k_0^2}-\varepsilon_{zz}\mu_\perp= \\ =\frac{k^2}{k_0^2}\left(\sin^2\theta+\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\cos^2\theta\right)-\varepsilon_{zz}\mu_\perp, \tag{20}$$

$$F_g=\frac{k_\varphi^2}{k_0^2}+\frac{\mu_{zz}}{\mu}\frac{k_z^2}{k_0^2}-\mu_{zz}\varepsilon_\perp= \\ =\frac{k^2}{k_0^2}\left(\sin^2\theta+\frac{\mu_{zz}}{\mu}\cos^2\theta\right)-\mu_{zz}\varepsilon_\perp, \tag{21}$$

$$F_{\nu g}=\frac{k_z}{k_0}\left(\frac{g}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\mu}\right)=\frac{k}{k_0}\cos\theta\left(\frac{g}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\mu}\right), \tag{22}$$

причем обе недиагональные компоненты ν и g тензоров $\ddot{\varepsilon}$ и $\ddot{\mu}$ входят только в функцию $F_{\nu g}$, тогда как в функцию F_ν входит только компонента ν, а в функцию F_g – только g.

Приравнивая отношения H_{z0}/E_{z0}, найденные из (18) и (19), получим дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в бигиротропной среде:

$$F_\nu F_g-\varepsilon_{zz}\mu_{zz}F_{\nu g}^2=0\quad\text{или}\quad F(\omega,\vec{k})=0. \tag{23}$$

Перемножая F_ν и F_g и находя $F_{\nu g}^2$ в (23) с учетом (20)–(22), получим следующее биквадратное уравнение[2] относительно k/k_0:

$$\frac{k^4}{k_0^4}\left(\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\sin^2\theta}{\mu_{zz}}+\frac{\cos^2\theta}{\mu}\right)-\frac{k^2}{k_0^2}\times \\ \times\left[\sin^2\theta\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}}\right)+2\cos^2\theta\left(1+\frac{g\nu}{\varepsilon\mu}\right)\right]+\varepsilon_\perp\mu_\perp=0. \tag{24}$$

Выражения (23) и (24) представляют собой разные формы дисперсионного уравнения для электромагнитных волн в бигиротропной среде.

[2] Уравнение (24) приведено ранее, см. [9, (4.31)].

Дискриминант D уравнения (24) можно привести к виду

$$D = \left[\sin^2\theta\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}} + \frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}}\right) + 2\cos^2\theta\left(1 + \frac{g\nu}{\varepsilon\mu}\right)\right]^2 - \\ - 4\left(\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{zz}} + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\sin^2\theta}{\mu_{zz}} + \frac{\cos^2\theta}{\mu}\right)\varepsilon_\perp\mu_\perp = \\ = \sin^4\theta\left(\frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}} - \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}}\right)^2 + 4\cos^4\theta\left(\frac{\nu}{\mu} + \frac{g}{\varepsilon}\right)^2 + \\ + 4\sin^2\theta\cos^2\theta\left[\frac{\varepsilon_\perp\nu^2}{\varepsilon_{zz}\mu^2} + \frac{\mu_\perp g^2}{\mu_{zz}\varepsilon^2} + \frac{\nu g}{\mu\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}} + \frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}}\right)\right], \tag{25}$$

из которого видно, что последнее слагаемое в (25) может быть отрицательным, поэтому необходимо проверять (исходя из конкретных зависимостей компонент тензоров $\ddot{\varepsilon}$ и $\ddot{\mu}$), является ли величина D всегда положительной для конкретной исследуемой среды. Следует отметить, что в таких средах как плазма и ферромагнетик, где либо $\nu = 0$, либо $g = 0$, выражение (25) существенно упрощается. Например, при $g = 0$ и $\nu \neq 0$, а также при $g \neq 0$ и $\nu = 0$ получим соответственно:

$$D = \sin^4\theta\left(\frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}} - 1\right)^2 + 4\frac{\nu^2}{\mu^2}\cos^2\theta, \tag{26}$$

$$D = \sin^4\theta\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}} - 1\right)^2 + 4\frac{g^2}{\varepsilon^2}\cos^2\theta. \tag{27}$$

Очевидно, что в (26) и (27) все слагаемые положительны и величина D не может принимать в этих случаях отрицательные значения.

2. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА В БИГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Запишем выражения для электрических и магнитных компонент ВЧ-поля через амплитуду одной из компонент – например, через амплитуду E_{z0}. Для компоненты H_z такое выражение можно записать непосредственно из соотношения (17):

$$H_z = H_{z0}\exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z) = \\ = i\frac{F_\nu}{\mu_{zz}F_{\nu g}}E_{z0}\exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z). \tag{28}$$

Выражения для остальных компонент ВЧ-поля получим, подставляя соотношения (16) и (17) в уравнения (4)–(11), производя дифференцирование и помножив полученные выражения на i:

$$k_z E_{y0} - k_y E_{z0} + \mu k_0 H_{x0} + i\nu k_0 H_{y0} = 0, \tag{29}$$

$$k_x E_{z0} - k_z E_{x0} - i\nu k_0 H_{x0} + \mu k_0 H_{y0} = 0, \tag{30}$$

$$k_y E_{x0} - k_x E_{y0} + \mu_{zz} k_0 H_{z0} = 0, \tag{31}$$

$$(\mu k_x - i\nu k_y)H_{x0} + \\ + (\mu k_y + i\nu k_x)H_{y0} + \mu_{zz}k_z H_{z0} = 0, \tag{32}$$

$$k_z H_{y0} - k_y H_{z0} - \varepsilon k_0 E_{x0} - igk_0 E_{y0} = 0, \tag{33}$$

$$k_x H_{z0} - k_z H_{x0} + igk_0 E_{x0} - \varepsilon k_0 E_{y0} = 0, \tag{34}$$

$$k_y H_{x0} - k_x H_{y0} - \varepsilon_{zz} k_0 E_{z0} = 0, \tag{35}$$

$$(\varepsilon k_x - igk_y)E_{x0} + (\varepsilon k_y + igk_x)E_{y0} + \varepsilon_{zz}k_z E_{z0} = 0. \tag{36}$$

Помножим уравнение (36) на k_y, а уравнение (31) – на $(\varepsilon k_x - igk_y)$ и вычтем полученные выражения (чтобы избавиться от слагаемых, содержащих компоненту E_{x0}), а затем из полученного уравнения найдем величину E_{y0}. Подставляя E_{y0} в (16) и учитывая соотношения (18) и (28), получим

$$E_y = \frac{E_{z0}}{k_\varphi^2}\left(\frac{gF_\nu}{\varepsilon F_{\nu g}}k_y k_0 - \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}k_y k_z + i\frac{F_\nu}{F_{\nu g}}k_x k_0\right)\times \\ \times\exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z). \tag{37}$$

Аналогичным образом помножим уравнение (36) на k_x, а уравнение (31) – на $(\varepsilon k_y + igk_x)$ и сложим полученные выражения (чтобы избавиться от слагаемых, содержащих компоненту E_{y0}). В итоге, находя из полученного уравнения величину E_{x0} и подставляя ее в (16), с учетом (18) и (28) имеем

$$E_x = \frac{E_{z0}}{k_\varphi^2}\left(\frac{gF_\nu}{\varepsilon F_{\nu g}}k_x k_0 - \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}k_x k_z - i\frac{F_\nu}{F_{\nu g}}k_y k_0\right)\times \\ \times\exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z). \tag{38}$$

Помножим уравнение (32) на k_y, а уравнение (35) – на $(\mu k_x - i\nu k_y)$ и вычтем полученные выражения (чтобы избавиться от слагаемых, содержащих компоненту H_{x0}). В итоге, находя из полученного уравнения величину H_{y0} и подставляя ее в (17), с учетом (18) и (28) получим

$$H_y = \frac{E_{z0}}{k_\varphi^2}\left(i\varepsilon_{zz}\frac{\nu}{\mu}k_y k_0 - i\frac{F_\nu}{\mu F_{\nu g}}k_y k_z - \varepsilon_{zz}k_x k_0\right)\times \\ \times\exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z). \tag{39}$$

Помножим уравнение (31) на k_x, а уравнение (34) – на $(\mu k_y + i\nu k_x)$ и сложим полученные выражения (чтобы избавиться от слагаемых, содержащих компоненту H_{y0}). В итоге, находя из полученного уравнения величину H_{x0} и подставляя ее в (17), с учетом (18) и (28) имеем

$$H_x = \frac{E_{z0}}{k_\varphi^2}\left(i\varepsilon_{zz}\frac{\nu}{\mu}k_x k_0 - i\frac{F_\nu}{\mu F_{\nu g}}k_x k_z + \varepsilon_{zz}k_y k_0\right)\times \\ \times\exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z). \tag{40}$$

Итак, в формулах (28), (37)–(40) все компоненты электромагнитного ВЧ-поля выражены через амплитуду E_{z0}.

Получим теперь выражения для компонент вектора Пойнтинга $\vec{P}$, который, как известно, определяется формулой

$$\vec{P} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\vec{H}^*\right]. \qquad (41)$$

Используя формулы (28), (37)–(40) и учитывая, что $k_0 = \omega/c$, для компонент вектора Пойнтинга получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(E_y H_z^* - E_z H_y^*\right) = \\ &= k_x \frac{\varepsilon_{zz}\omega E_{z0}^2}{8\pi F_g k^2 \sin^2\theta}\left(F_\nu + F_g\right), \end{aligned} \qquad (42)$$

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(E_z H_x^* - E_x H_z^*\right) = \\ &= k_y \frac{\varepsilon_{zz}\omega E_{z0}^2}{8\pi F_g k^2 \sin^2\theta}\left(F_\nu + F_g\right), \end{aligned} \qquad (43)$$

$$\begin{aligned} P_z &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) = \frac{cE_{z0}^2}{8\pi k_\varphi^4}\times \\ &\times\left[\frac{\varepsilon_{zz}^2}{\varepsilon}k_x^2 k_z k_0 - \frac{gF_\nu}{\varepsilon F_{\nu g}}k_x^2 k_0^2\varepsilon_{zz} - \frac{\nu F_\nu}{\mu F_{\nu g}}k_y^2 k_0^2 \varepsilon_{zz} + \right. \\ &+ \frac{F_\nu^2}{\mu F_{\nu g}^2}k_y^2 k_z k_0 - \frac{gF_\nu}{\varepsilon F_{\nu g}}k_y^2 k_0^2\varepsilon_{zz} + \frac{\varepsilon_{zz}^2}{\varepsilon}k_y^2 k_z k_0 - \\ &\left. - \frac{\nu F_\nu}{\mu F_{\nu g}}k_x^2 k_0^2\varepsilon_{zz} + \frac{F_\nu^2}{\mu F_{\nu g}^2}k_x^2 k_z k_0\right] = \\ &= \frac{cE_{z0}^2 k_0 \varepsilon_{zz}}{8\pi k_\varphi^2}\left[k_z\left(\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon} + \frac{\mu_{zz}F_\nu}{\mu F_g}\right) - \frac{F_\nu}{F_{\nu g}}k_0\left(\frac{g}{\varepsilon} + \frac{\nu}{\mu}\right)\right] = \\ &= k_z \frac{\varepsilon_{zz}\omega E_{z0}^2}{8\pi F_g k^2 \sin^2\theta}\times \\ &\times\left[\frac{\mu_{zz}}{\mu}F_\nu + \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}F_g - \varepsilon_{zz}\mu_{zz}\left(\frac{g}{\varepsilon} + \frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]. \end{aligned} \qquad (44)$$

Выше при последнем преобразовании величины P_z использованы соотношения между величинами F_ν, F_g и $F_{\nu g}$ в соответствии с (23) и выражение (22).

3. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В БИГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Прежде чем получить выражения для вектора групповой скорости и его компонент в бигиротропной среде, оговорим условия применимости этих выражений и самого термина групповая скорость. Как известно, групповая скорость – это скорость перемещения полезного сигнала, модулирующего синусоидальную волну (с более высокой частотой), при условии, что форма этого сигнала по мере распространения волны сохраняется. Очевидно, что это условие безоговорочно выполняется только в средах с линейной дисперсией. В диспергирующих же средах, к которым относится исследуемая бигиротропная среда и многие другие анизотропные (по отношению к распространению волн) среды, следует оговорить условия применимости понятия групповой скорости. Так, в работе [13] было предложено использовать понятие "групповая скорость" в таких средах лишь на некотором конечном расстоянии, на котором форма модулирующего сигнала практически не искажается, причем величина этого расстояния, очевидно, будет зависеть от дисперсионных характеристик конкретной среды. В частности, развивая представленный в [13] подход, в работе [14] было предложено оценивать это расстояние по формуле, включающей отношение первой производной и квадрата второй производной дисперсионной зависимости среды (см. [14, ур-ния (24) и (25)]).

Таким образом, учитывая степень кривизны дисперсионной зависимости, мы всегда можем выбрать *расстояние*, на котором при данных конкретных условиях (параметрах среды) можно использовать понятие групповой скорости. Очевидно также, что если ограничиться рассмотрением случаев, когда модулируемая волна распространяется на очень маленькое (бесконечно малое) расстояние, то тогда понятие групповой скорости можно использовать практически в любой среде. Поэтому можно считать, что приведенные ниже выражения для вектора групповой скорости и его компонент всегда справедливы при распространении электромагнитных волн в бигиротропной среде на малые расстояния.

При сформулированных условиях выражение для вектора групповой скорости волны $\vec{U}$, характеризующего *величину скорости и направление* перемещения *группы волн*, определяется выражением (см., например, [13, 15])

$$\vec{U} = \frac{d\omega}{d\vec{k}} = \mathrm{grad}_{\vec{k}}\omega = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\vec{x}_0 + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\vec{y}_0 + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\vec{z}_0, \qquad (45)$$

причем соотношение (45) справедливо не только для волны, являющейся суммой двух или нескольких синусоидальных волн, но и для волны, представляющей собой узкий квазимонохроматический волновой пакет с определенным набором частот и волновых чисел [13]. Как правило, при исследовании реальных сред или структур зависимость $\omega(\vec{k})$ в явном виде можно получить лишь в редких случаях, тогда как вывести дисперсионное уравнение волны $F(\omega,\vec{k}) = 0$ удается гораздо чаще. Поэтому, используя правило дифференцирования неявной функции, выражение (45) можно записать в виде

$$\vec{U} = -\frac{\partial F/d\vec{k}}{\partial F/\partial\omega} = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \mathrm{grad}_{\vec{k}} F = = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial k_x}\vec{x}_0 + \frac{\partial F}{\partial k_y}\vec{y}_0 + \frac{\partial F}{\partial k_z}\vec{z}_0\right), \quad (46)$$

Выражение (46) удобно использовать при исследовании волн в анизотропных средах, где групповая скорость отличается от фазовой не только по величине, но и по направлению. Так, *вектор* $\mathrm{grad}_{\vec{k}}\, F$ определяет *пространственную* ориентацию вектора $\vec{U}$, а производная $\partial F/\partial\omega$ – это *число*, которое (вместе с модулем вектора $\mathrm{grad}_{\vec{k}}\, F$) определяет модуль вектора $\vec{U}$.

При фиксированных параметрах среды и значении частоты дисперсионное уравнение принимает вид

$$F(\vec{k}) = F(k_x, k_y, k_z) = 0$$

и описывает поверхность волновых векторов или изочастотную поверхность. Семейство изочастотных поверхностей (или – в двумерном случае – изочастотных зависимостей), рассчитанных для различных фиксированных значений частоты, часто анализируется в работах по исследованию волн в анизотропных средах, поскольку вектор $\mathrm{grad}_{\vec{k}}\, F$ (а значит, и вектор $\vec{U}$) всегда направлен по нормали к изочастотным поверхностям или зависимостям (называемым в векторном анализе поверхностями или зависимостями уровня). Это свойство обычно используется для наглядного изображения вектора $\vec{U}$ (см., например, [15, 16]).

Вычислим теперь вектор групповой скорости $\vec{U}$ электромагнитных волн, распространяющихся в бигиротропной среде. Подставляя в (46) частные производные[3] дисперсионного уравнения (23) по волновым числам, получим

$$U_x = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial k_x} = -2\frac{k_x}{k_0^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \left(F_\nu + F_g\right), \quad (47)$$

$$U_y = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial k_x} = -2\frac{k_y}{k_0^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \left(F_\nu + F_g\right), \quad (48)$$

$$U_z = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial k_z} = = -2\frac{k_z}{k_0^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \left[\frac{\mu_{zz}}{\mu}F_\nu + \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}F_g - \varepsilon_{zz}\mu_{zz}\left(\frac{g}{\varepsilon} + \frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]. \quad (49)$$

Производную $\partial F/\partial\omega$, входящую в соотношения (46)–(49), можно найти из дисперсионного уравнения (23). Предполагая, что компоненты ε_{zz} и μ_{zz} не зависят от частоты, и оставляя произвольными зависимости от частоты компонент ε, g, $\varepsilon_\perp$, μ, ν и $\mu_\perp$, получим следующее выражение:

$$\frac{\partial F}{\partial\omega} = -\left(2\frac{k_\varphi^2}{\omega k_0^2} + 2\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\frac{k_z^2}{\omega k_0^2} + \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon^2}\frac{k_z^2}{k_0^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} + \varepsilon_{zz}\frac{\partial\mu_\perp}{\partial\omega}\right)F_g - -\left(2\frac{k_\varphi^2}{\omega k_0^2} + 2\frac{\mu_{zz}}{\mu}\frac{k_z^2}{\omega k_0^2} + \frac{\mu_{zz}}{\mu^2}\frac{k_z^2}{k_0^2}\frac{\partial\mu}{\partial\omega} + \mu_{zz}\frac{\partial\varepsilon_\perp}{\partial\omega}\right)F_\nu - - 2\varepsilon_{zz}\mu_{zz}\left[\frac{k_z}{k_0}\left(\frac{\partial(g/\varepsilon)}{\partial\omega} + \frac{\partial(\nu/\mu)}{\partial\omega}\right) - \frac{F_{\nu g}}{\omega}\right]F_{\nu g}. \quad (50)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОТНОШЕНИЯ МОДУЛЕЙ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА И ВЕКТОРА ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

Сравнивая выражения для компонент вектора Пойнтинга $\vec{P}$ (42)–(44) и выражения для компонент вектора $\vec{U}$ (47)–(49), видно, что соответствующие компоненты P_x, P_y, P_z и U_x, U_y, U_z пропорциональны друг другу, т.е.

$$w = \frac{P_x}{U_x} = \frac{P_y}{U_y} = \frac{P_z}{U_z} = -\frac{\omega k_0^2 \varepsilon_{zz} E_{z0}^2}{16\pi F_g k^2 \sin^2\theta}\frac{\partial F}{\partial\omega} = = -\frac{V^2}{c^2}\frac{f\varepsilon_{zz}E_{z0}^2}{8F_g\sin^2\theta}\frac{\partial F}{\partial\omega}, \quad (51)$$

где $V = \omega/k$ – модуль фазовой скорости волны.

Пропорциональность компонент P_x, P_y, P_z и U_x, U_y, U_z означает, что вектор Пойнтинга $\vec{P}$ и вектор групповой скорости $\vec{U}$ всегда параллельны. Однако параллельность векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ в бигиротропной среде не означает, что эти векторы всегда направлены одинаково, поскольку, как видно из (51), коэффициент пропорциональности w в принципе может быть как положительным, так и отрицательным числом (величины $\partial F/\partial\omega$, F_ν и F_g, по-видимому, могут быть как положительными, так и отрицательными). Очевидно, возникает вопрос, возможна ли в принципе такая ситуация,

[3] Во избежание ошибок при дифференцировании уравнения (23) по волновым числам, как и при дифференцировании по частоте ω, следует заменить используемые обозначения k_φ^2, F_ν, F_g и $F_{\nu g}$ соответствующими выражениями (20)–(22), содержащими волновые числа k_x, k_y, и k_z, а величину k_0 заменить на ω/c. После проведения дифференцирования перечисленные обозначения можно вновь использовать для краткой записи выражений (47)–(50).

когда величина w будет отрицательной, и что это означает.

Для ответа на этот вопрос выясним физический смысл величины w. Очевидно, что пропорциональность компонент P_x, P_y, P_z и U_x, U_y, U_z в соответствии с (51) означает также, что

$$|w| = |\vec{P}|/|\vec{U}|. \tag{52}$$

Поскольку модуль вектора Пойнтинга описывает энергию, проходящую за 1 с через единицу площади, а модуль вектора групповой скорости описывает расстояние, которое проходит эта энергия (в направлении, перпендикулярном единичной площади) за эту же секунду (и, следовательно, эта энергия равномерно распределена вдоль этого расстояния), то очевидно, что *модуль величины w описывает объемную плотность энергии волны*.

Возникает вопрос, как же следует интерпретировать знак, которым в соответствии с (51) обладает величина w. Рассуждая логически, мы должны сделать вывод, что, если векторы $\vec{P}$ и $\vec{U}$ направлены одинаково, то волна характеризуется *положительной* объемной плотностью энергии, а если эти векторы направлены противоположно, – *отрицательной* объемной плотностью энергии. Как видно, вопрос о взаимной ориентации векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ сводится к вопросу о существовании волн с *отрицательной объемной плотностью энергии*, что в отличие от классической физики допускает квантовая физика [17, 18].

5. ОРИЕНТАЦИИ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА И ВЕКТОРА ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ У ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДЕ

Попробуем выяснить взаимную ориентацию векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ для электромагнитных волн, распространяющихся в неограниченной ферромагнитной среде, у которой диэлектрическая проницаемость – скаляр ($\varepsilon_{zz} = \varepsilon_\perp = \varepsilon$, $g = 0$), $\mu_{zz} = \text{const}$, а компоненты μ и ν зависят от частоты следующим образом:

$$\mu = 1 + \frac{\omega_M\omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} = \frac{\omega_\perp^2 - \omega^2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \tag{53}$$

$$\nu = \frac{\omega_M\omega}{\omega_H^2 - \omega^2}, \tag{54}$$

где $\omega_H = \gamma H_{c0}$, $\omega_M = 4\gamma\pi M_{c0}$, $\omega_\perp^2 = \omega_H(\omega_H + \omega_M)$, γ – гиромагнитная постоянная, $4\pi M_{c0}$ – намагниченность насыщения феррита.

Дисперсионное уравнение, описывающее электромагнитные волны в неограниченной ферритовой среде, в соответствии с (23) примет вид

$$F(\omega, \vec{k}) = F_\nu F_g - \mu_{zz}\varepsilon\frac{k_z^2\nu^2}{k_0^2\mu^2} = 0. \tag{55}$$

Полагая в (50) $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_\perp = \varepsilon = \text{const}$ и $g = 0$, получим выражение

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial\omega} = -\left(2\frac{k_\varphi^2}{\omega k_0^2} + 2\frac{k_z^2}{\omega k_0^2} + \varepsilon\frac{\partial\mu_\perp}{\partial\omega}\right)F_g - \\ -\left(2\frac{k_\varphi^2}{\omega k_0^2} + 2\frac{\mu_{zz}}{\mu}\frac{k_z^2}{\omega k_0^2} + \frac{\mu_{zz}}{\mu^2}\frac{k_z^2}{k_0^2}\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)F_\nu - \\ -2\varepsilon\mu_{zz}\frac{\nu}{\mu}\frac{k_z^2}{k_0^2}\left[\frac{\partial(\nu/\mu)}{\partial\omega} - \frac{\nu}{\mu\omega}\right].\end{gathered} \tag{56}$$

Найдем производные величин μ, $\mu_\perp$ и ν/μ по частоте, исходя из (53) и (54):

$$\frac{\partial\mu}{\partial\omega} = 2\omega\frac{\omega_\perp^2 - \omega_H^2}{(\omega_H^2 - \omega^2)^2} = \frac{2\omega\omega_M\omega_H}{(\omega_H^2 - \omega^2)^2}, \tag{57}$$

$$\frac{\partial\mu_\perp}{\partial\omega} = 2\omega\omega_M\frac{\omega_H + \omega_M}{(\omega_\perp^2 - \omega^2)^2} = \frac{2\omega\omega_M\omega_\perp^2}{\omega_H(\omega_\perp^2 - \omega^2)^2}, \tag{58}$$

$$\frac{\partial(\nu/\mu)}{\partial\omega} = \omega_M\frac{\omega_\perp^2 + \omega^2}{(\omega_\perp^2 - \omega^2)^2}. \tag{59}$$

Из формул (57)–(59) видно, что производные величин μ, $\mu_\perp$ и ν/μ по частоте *всегда являются положительными числами*.

Прежде чем проводить расчеты, напомним, что недавно в работе [12] исследовались изочастотные поверхности и их сечения (изочастотные зависимости) для электромагнитных волн в неограниченной ферромагнитной среде. В частности, как видно из [12], можно считать, что все изочастотные поверхности этих волн образованы путем вращения соответствующих изочастотных зависимостей[4] вокруг оси z (см. [12, рис. 1 и 2]). Таким образом, не обязательно исследовать характеристики волны (например, ориентации и модули векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$) *в каждой точке* изочастотной поверхности – достаточно рассмотреть эти характеристики *только для точек* изочастотной зависимости, которая является сечением этой поверхности *любой* плоскостью, проходящей через ось z. В частности, ниже при проведении расчетов в качестве такой плоскости использована *плоскость xz*. Отметим, что кроме изочастотной зависимости $k_x(k_z)$ в плоскости xz также *лежат* произвольный волно-

[4] Используя терминологию стереометрии, можно сказать, что изочастотная зависимость является *образующей* для соответствующей фигуры вращения – изочастотной поверхности.

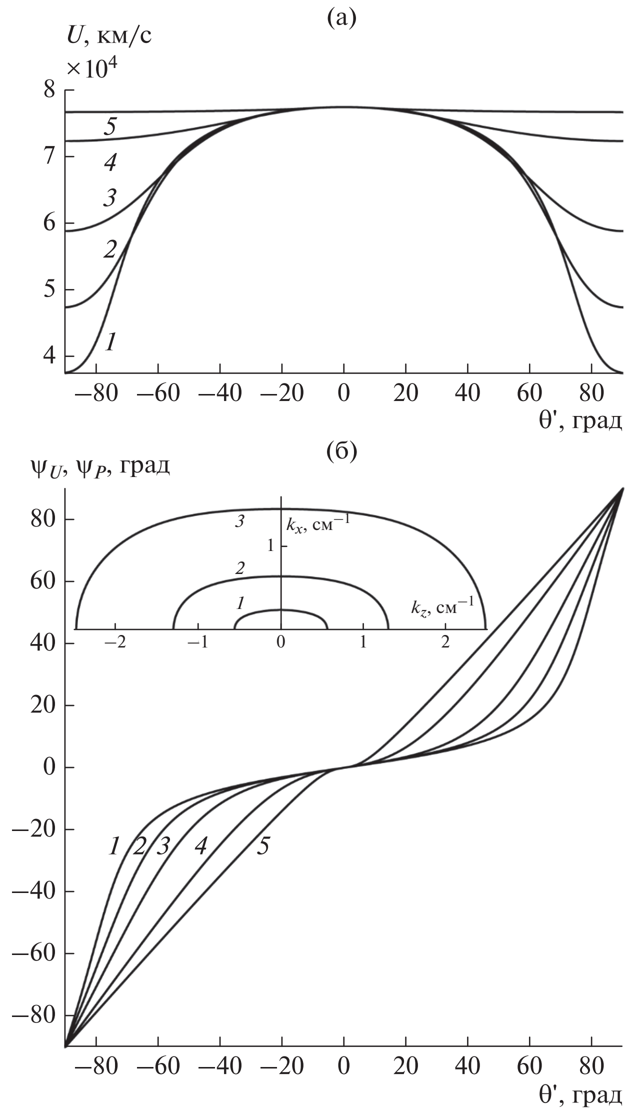

Рис. 1. Модуль U вектора групповой скорости (а), а также ориентации ψ_U и ψ_P вектора групповой скорости и вектора Пойнтинга (б) в зависимости от ориентации θ' волнового вектора для нерезонансных волн в неограниченном ферромагнитном пространстве при f = 0.3 (*1*), 0.8 (*2*), 1.8 (*3*), 6 (*4*), и 20 ГГц (*5*); на вставке – изочастотные зависимости для $k_x > 0$ при f = 0.3 (*1*), 0.8 (*2*), 1.8 (*3*).

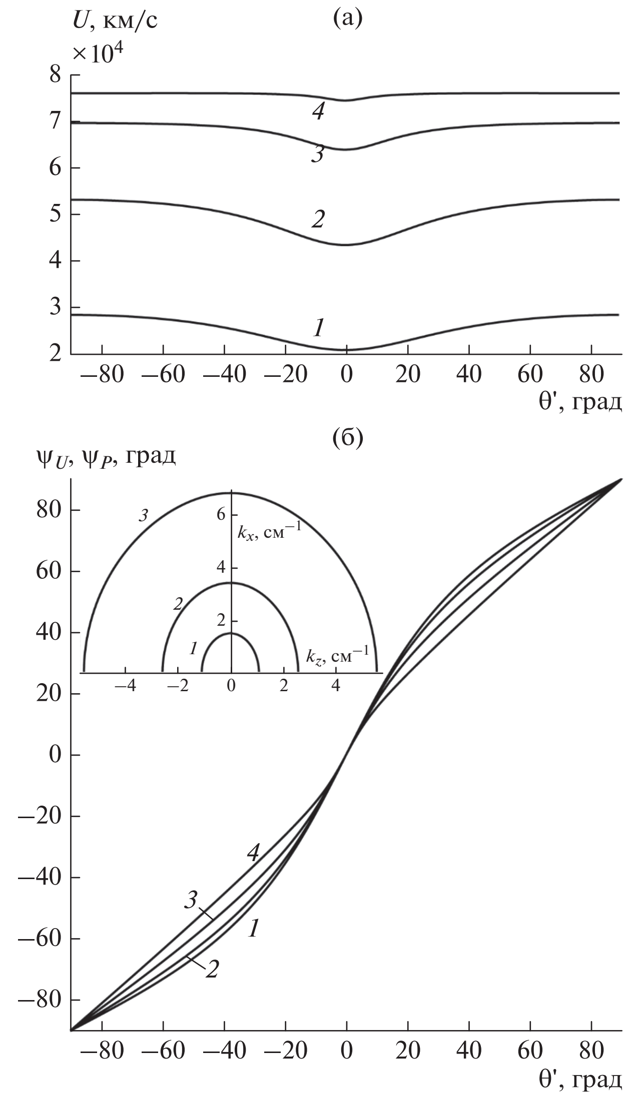

Рис. 2. Модуль U вектора групповой скорости (а), а также ориентации ψ_U и ψ_P вектора групповой скорости и вектора Пойнтинга (б) в зависимости от ориентации θ' волнового вектора для пострезонансных волн в неограниченном ферромагнитном пространстве при f = 6 (*1*), 7 (*2*), 10 (*3*) и 20 ГГц (*4*); на вставке – изочастотные зависимости для $k_x > 0$ при f = 6 (*1*), 7 (*2*), 10 (*3*).

вой вектор $\vec{k}$, направленный в любую точку этой зависимости, вектор групповой скорости $\vec{U}$, исходящий из этой точки, и вектор Пойнтинга $\vec{P}$, параллельный вектору $\vec{U}$ в соответствии с (51). Таким образом, не теряя общности рассуждений, вместо трехмерного анализа можно проводить двумерный анализ характеристик волн в плоскости xz, *полагая при этом* $P_y = U_y = 0$.

Отметим, что при расчетах углы, определяющие ориентации векторов $\vec{k}$, $\vec{U}$ и $\vec{P}$, удобнее отсчитывать[5] от оси x, а не от оси z. Поэтому введем угол θ', определяющий ориентацию вектора $\vec{k}$ относительно оси x, причем угол θ' и введенный ранее угол θ будут связаны простым соотношением

$$\theta' = \theta + 90^\circ. \tag{60}$$

[5] Это связано с тем, что в исследуемой среде векторы $\vec{k}$, $\vec{U}$ и $\vec{P}$ не всегда могут быть ориентированы вдоль оси z, а вдоль оси x эти векторы могут быть направлены всегда и для всех типов волн (что видно из приведённых далее рисунков).

Теперь, подставляя выражения (57)–(59) в (56), а (56) в (47)–(49), можно найти модуль вектора групповой скорости

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} \quad (61)$$

и угол, определяющий ориентацию вектора $\vec{U}$ относительно оси x,

$$\psi_U = \arcsin(U_z/U). \quad (62)$$

Точно также можно найти модуль вектора Пойнтинга

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \quad (63)$$

и угол, определяющий ориентацию вектора $\vec{P}$ относительно оси x,

$$\psi_P = \arcsin(P_z/P). \quad (64)$$

Изменение величины U и углов ψ_U и ψ_P в зависимости от ориентации θ' волнового вектора $\vec{k}$ для нерезонансной, пострезонансной и спиновой волн, распространяющихся в ферромагнитной среде, представлены[6] соответственно на рис. 1–3, а на вставках к рис. 1, 2 и на рис. 4 показаны соответствующие изочастотные зависимости для положительных значений k_x. Отсчет углов ψ_P, ψ_U и θ' на рис. 1–4 производился относительно оси x (или k_x). При расчетах использованы следующие параметры среды: H_{c0} = 300 Э, ε = 15 и $4\pi M_{c0}$ = = 1750 Гс (что соответствует железо-иттриевому гранату).

Как видно из рис. 1б, 2б и 3б, углы ψ_U и ψ_P *совпадают для всех типов электромагнитных волн в ферромагнитной среде*.

Отметим, что использование для расчета углов ψ_U и ψ_P формул (62) и (64), содержащим функцию арксинус, обусловлено тем, что при вычислении этих углов по формулам $\psi_U = \mathrm{arctg}(U_z/U_x)$ и $\psi_P = \mathrm{arctg}(P_z/P_x)$ для противоположно направленных векторов будут получены *одинаковые* значения углов (из-за одновременной смены знака обеих проекций у противоположно направленного условного вектора $\vec{R}$), что поясняют построе-

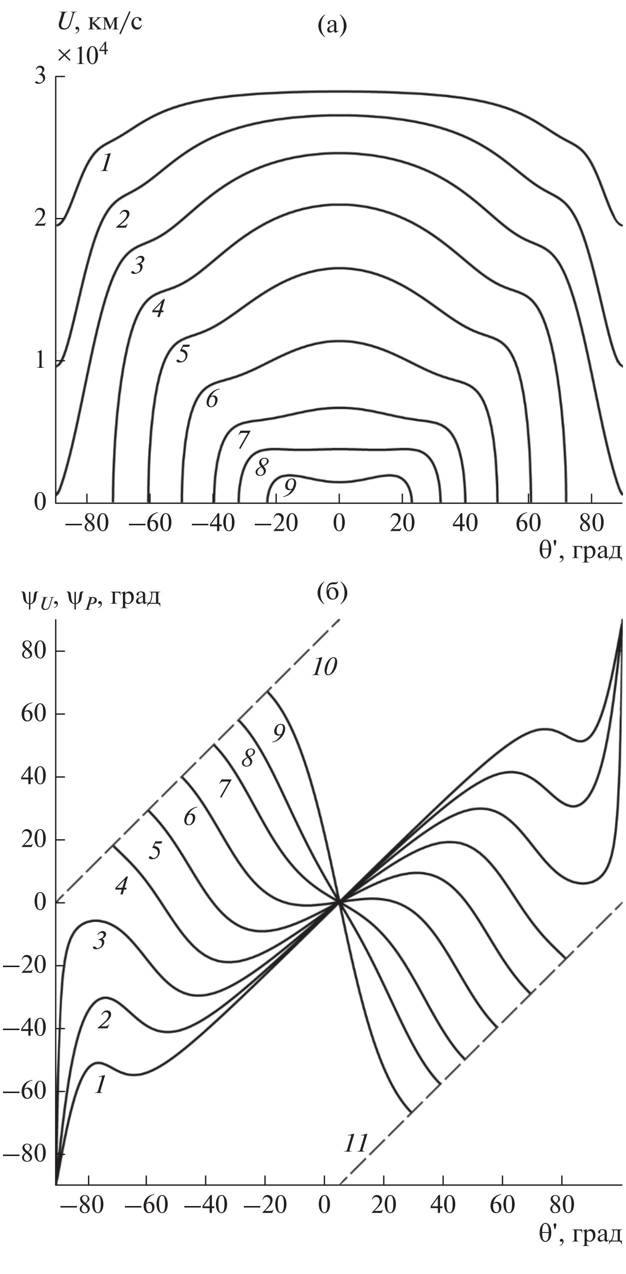

Рис. 3. Модуль U вектора групповой скорости (а) и ориентации ψ_U и ψ_P вектора групповой скорости и вектора Пойнтинга (б) в зависимости от ориентации θ' волнового вектора для спиновых волн при f = 300, 550, 800, 1050, 1300, 1550, 1770, 1915 и 2050 МГц (кривые *1*–*9* соответственно); значения ψ_U и ψ_P, лежащие на прямых *10* и *11*, соответствуют бесконечно большой величине волнового числа k (для тех частот, у которых изочастотные зависимости имеют асимптоты).

[6] Изменение величин P и w в данной работе не представлено, поскольку они зависят от мощности источника возбуждения волн. Казалось бы, можно их нормировать на множитель E_{z0}^2, однако такой расчет приведет к некорректному представлению об изменении величин P и w в зависимости от различных параметров. Так, например, зависимости $P(\theta')/E_{z0}^2$ и $w(\theta')/E_{z0}^2$ не имеют смысла при распространении волн вдоль оси z, поскольку в этом случае формулы (42)–(44) и (51) нельзя использовать (так как в их знаменателе будет стоять $\sin^2\theta = 0$) и, кроме того, в этом случае $E_{z0} = H_{z0} = 0$ (о чём упоминалось в [9, 12]). Отметим также, что при распространении волн вдоль осей x и y формулы (42)–(44) и (51) также нельзя использовать, поскольку в знаменателе будет стоять $F_g = 0$ (если подставить в формулу (21) $k_z = 0$, а k_φ^2 положить равным $k_0^2\varepsilon_\perp\mu_{zz}$ в соответствии с [9, (4.52)], то получим $F_g = 0$). Таким образом, исследование изменения величин P и w представляет собой отдельную задачу и выходит за рамки данной работы.

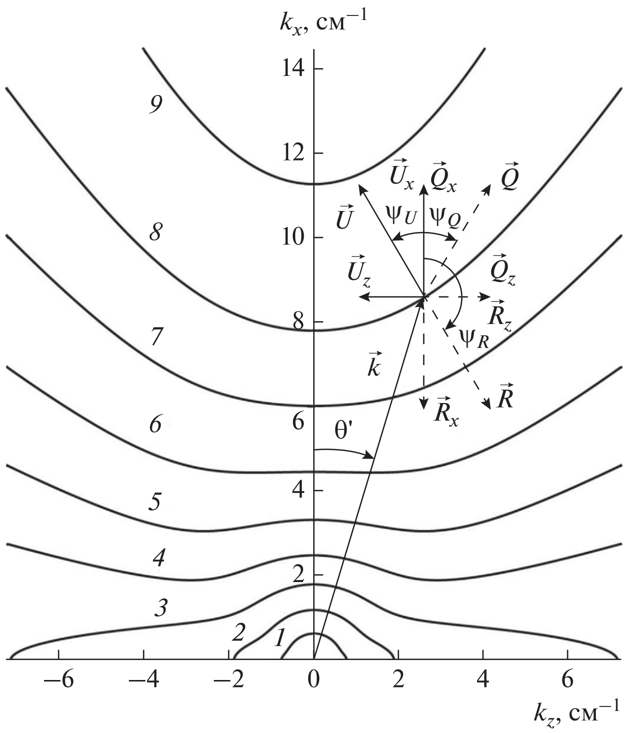

Рис. 4. Изочастотные зависимости спиновых волн (для полуплоскости $k_x > 0$) при $f = 300$, 550, 800, 1050, 1300, 1550, 1770, 1915 и 2050 МГц (кривые *1*–*9* соответственно); показаны произвольный волновой вектор $\vec{k}$, соответствующий вектор групповой скорости $\vec{U}$, а также условные противоположно направленный вектор $\vec{R}$ и симметричный ему вектор $\vec{Q}$, такие, при которых выполняются соотношения $U = R = Q$, $U_x = Q_x = -R_x$, $U_z = -Q_z = -R_z$; также показаны углы θ', ψ_U, ψ_R и ψ_Q, определяющие, соответственно, ориентации векторов $\vec{k}$, $\vec{U}$, $\vec{R}$ и $\vec{Q}$.

ния на рис. 4. Более того, поскольку область значений функции арксинус также ограничена интервалом −90...+90°, то и при вычислении углов ψ_U и ψ_P по формулам (62) и (64) для противоположно направленного условного вектора $\vec{R}$ будет получена неверная ориентация (ψ_Q вместо ψ_R, так как $Q_z = R_z$ (см. рис. 4)). Поэтому значения углов ψ_U и ψ_P, полученные по формулам (62) и (64), дополнительно проверяли на основе сравнения знаков одинаковых проекций векторов $\vec{U}$ и $\vec{P}$ (U_x и P_x, а также U_z и P_z), и в итоге можно утверждать, что *ориентации ψ_U и ψ_P векторов $\vec{U}$ и $\vec{P}$ для всех типов электромагнитных волн в ферромагнитной среде всегда совпадают*.

Отметим, что *одинаковая* ориентация *векторов* $\vec{U}$ и $\vec{P}$, характерная для всех типов электромагнитных волн в ферромагнитной среде, по-видимому, обусловлена определенными причинно-следственными условиями, накладываемыми на изменение компонент магнитной проницаемости в зависимости от частоты, в частности, положительными значениями производных (57)–(59) (подробнее об этом см. [2, §80 и 84]). В то же время вопрос о взаимной ориентации векторов $\vec{U}$ и $\vec{P}$ в других, более сложных средах, в частности, в средах с потерями, остается пока открытым.

Анализируя зависимости $\psi_U(\theta')$ и $\psi_P(\theta')$ на рис. 1–3, отметим, что углы ψ_U и ψ_P изменяются в диапазоне значений −90...+90° для спиновых волн в интервале частот $\omega < \omega_H$, а также для нерезонансных и пострезонансных волн, т.е. когда изочастотная зависимость волны является замкнутой кривой. Если же изочастотные кривые являются незамкнутыми, что имеет место для спиновой волны при $\omega_H < \omega < \omega_\perp$ (см. рис. 4, кривые *4*–*9*), то распространение волн характеризуется наличием углов отсечки волнового вектора θ'_{k1} и θ'_{k2}, определяемых в [12, выражения (17)], а также наличием углов отсечки ψ_{U1}, ψ_{U2} и ψ_{P1}, ψ_{P2} у векторов $\vec{U}$ и $\vec{P}$, причем зависимости $\psi_{U1}(\theta'_{k1})$, $\psi_{P1}(\theta'_{k1})$ и $\psi_{U2}(\theta'_{k2})$, $\psi_{P2}(\theta'_{k2})$ описывают, соответственно, прямые *10* и *11* на рис. 4.

Характеризуя зависимости $U(\theta')$ на рис. 1–3, отметим, что интервалы углов θ', где величина U практически постоянна, соответствуют участкам изочастотных зависимостей, которые достаточно хорошо аппроксимирует окружность, при этом неважно, где будет находиться центр этой окружности (ср., например, рис. 3а и 4, кривые *8*).

Следует отметить, что полученные выше выражения для вектора Пойнтинга, вектора групповой скорости и компонент электромагнитного поля, наряду с дисперсионным уравнением для электромагнитных волн в бигиротропной среде [9, 12] открывают хорошие перспективы для дальнейшего исследования поляризации этих волн, влияния диссипации на их характеристики и т.п., что позволит получить более точное представление о волновых процессах, происходящих в реальных анизотропных средах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе системы уравнений Максвелла описано распространение электромагнитных волн с произвольно ориентированным волновым вектором в бигиротропной среде, характеризующейся эрмитовыми тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей второго ранга. Получены аналитические формулы для всех компонент электромагнитного поля, вектора Пойнтинга $\vec{P}$ и вектора групповой скорости $\vec{U}$ исследуемых волн.

Найдено, что соответствующие компоненты векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ – P_x, P_y, P_z и U_x, U_y, U_z – пропорциональны друг другу, причем отношение этих компонент представляет собой объемную плотность энергии электромагнитной волны w. Рассчитаны модуль и ориентация вектора $\vec{U}$, а также ориентация вектора $\vec{P}$ в зависимости от ориентации волнового вектора $\vec{k}$ для нерезонансных, пострезонансных и спиновых волн, распространяющихся в неограниченной ферромагнитной среде (частном случае бигиротропной среды). Найдено, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{U}$ всегда ориентированы одинаково для всех перечисленных типов волн. Обнаружено, что участкам изочастотных зависимостей волн, которые по форме близки к окружности, соответствуют практически постоянные значения величины U.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания (тема № 0030-2019-0014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1979.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
3. *Вугальтер Г.А.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 8. С. 92.
4. *Локк Э.Г., Герус С.В., Анненков А.Ю.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 5. С. 731.
5. *Давидович М.В.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. Вып. 22. С. 53.
6. *Давидович М.В.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 5. С. 40.
7. *Давидович М.В.* // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. № 6. С. 623.
8. *Гуревич А.Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Физматгиз, 1960.
9. *Гуревич А.Г., Мелков Г.А.*, Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994.
10. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 9. С. 1101.
11. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* // РЭ. 2003. Т. 48. № 10. С. 1186.
12. *Локк Э.Г.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 3. С. 259.
13. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.
14. *Локк Э.Г.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 8. С. 1080.
15. *Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993.
16. *Локк Э.Г.* // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 4. С. 397.
17. *П.А.М. Дирак.* Воспоминания о необычной эпохе. М.: Наука, 1990.
18. *Де Бройль Л.* Революция в физике. М.: Атомиздат, 1965.