РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 703–716

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

ГЕОМЕТРИЗОВАННЫЕ МОДЕЛИ СПЛОШНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО И ПЛОСКОСИММЕТРИЧНОГО РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

© 2021 г. В. А. Сыровой*

ВЭИ – филиал "РФЯЦ – ВНИИТФ им. акад. Е.И. Забабахина",
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

**E-mail: red@cplire.ru*

Поступила в редакцию 30.10.2020 г.
После доработки 30.10.2020 г.
Принята к публикации 15.01.2021 г.

Сформулированы геометризованные модели релятивистского электронного потока при отсутствии внешнего магнитного поля, которые позволяют синтезировать непараксиальный пучок с катода заданной формы и с заданным распределением плотности тока в ρ-режиме эмиссии и основаны на интегрировании двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

DOI: 10.31857/S0033849421070123

ВВЕДЕНИЕ

Геометризованная теория интенсивных электронных пучков наиболее полно изложена в монографиях [1, 2] и более поздних работах [3–7]. В отличие от традиционных подходов искомыми являются не только конфигурация и параметры потока, но и заранее не известная система координат x^i $(i = 1, 2, 3)$, связанная с геометрией течения: траектории частиц совпадают с координатными линиями x^1 либо поверхности $x^2 = \text{const}$ могут быть трубками тока. В общем случае произвольной ориентации магнитного поля система x^i является неортогональной, если пучок стартует с термокатода при эмиссии в ρ- или T-режиме. Метрический тензор g_{ik} системы x^i удовлетворяет тождествам Ляме, выражающим факт эвклидовости пространства классической физики.

Для системы уравнений, объединяющей уравнения пучка и условия эвклидовости пространства, в двумерном случае удалось выполнить декомпозицию: сформулировать соотношение на трубке тока, имеющее вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно элемента g_{22} метрического тензора с производными по x^1, в которое поперечная координата x^2 входит как параметр, и построить эволюционную систему уравнений первого порядка, выражающих производные по x^2 от геометрических и физических параметров потока через распределения необходимых функций на базовой трубке тока. Это представление позволяет сконструировать алгоритмы расчета непараксиальных пучков методом сшивания узких полос или построением высших приближений теории, представляющих собой фрагмент тэйлоровского разложения по поперечной координате x^2.

При этом возможно рассмотрение задач с произвольной ориентацией магнитного поля на катоде, которые в принципе не поддаются анализу в рамках параксиального формализма.

В работе [8] проведено тестирование двумерных геометризованных моделей на полном наборе известных точных решений уравнений пучка с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, продемонстрировавшее преимущество уже первого приближения по сравнению с классическим параксиальным подходом. Расходящийся плоский электростатический поток со спирального катода и спиральными траекториями использован для тестирования в работе [9]. Расчет траекторий [9] на основе первого приближения геометризованной теории иллюстрирует рис. 1, где параметр q определяет ширину пучка.

Видно, что приемлемой точности можно добиться для потока с полушириной $q = 0.3$, для которого параксиальный подход является слишком грубым приближением. Ошибка вычисления потенциала составляет при этом 3.4%. Видимые на рис. 1 дефекты решения (смещение траектории и особенно координат катода – первая точка) могут быть существенно уменьшены за счет использования второго приближения как во всем поле течения, так и в прикатодной области: корректировка координат катода уменьшает ошибку их вычисления с 10% на рис. 1 до 0.8%. Использование второ-

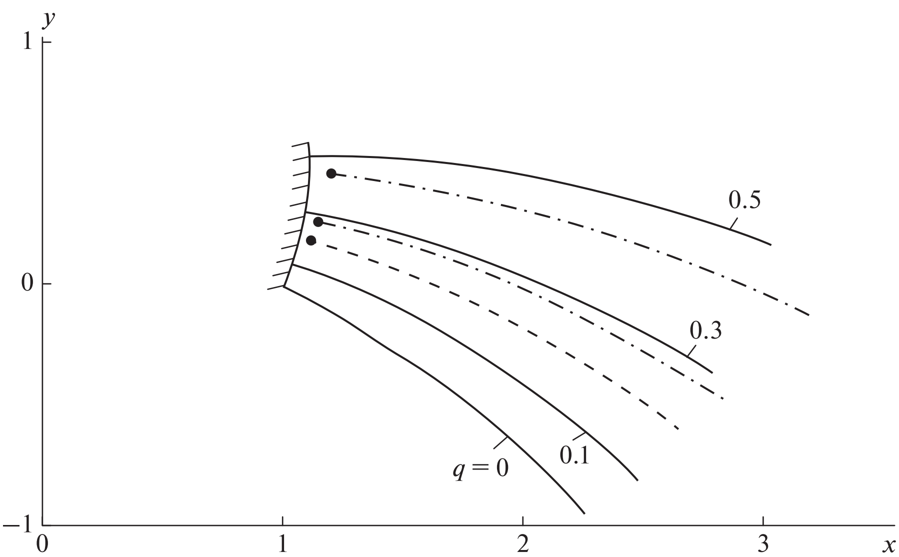

Рис. 1. Траектории q = const расходящегося спирального потока со спирального катода [9]: сплошные линии – точное решение, штриховая – параксиальная теория, штрих-пунктирные – первое приближение геометризованной теории.

го приближения во всей области течения снижает уровень ошибки вычисления траекторий вдвое. В результате с ошибкой порядка 5% удается рассчитать существенно непараксиальную область течения с перепадом плотности тока на катоде в 3.3 раза.

Относительная консервативность траекторий, иллюстрируемая рисунком, по сравнению с прочими параметрами потока, послужила основанием для построения комбинированных моделей, в которых расчет траекторий в первом приближении сочетается с более подробным описанием прикатодной зоны. В работе [10] подобная модель построена для гиротрона при эмиссии в ρ-режиме.

Цель работы – формулировка второго приближения теории в случае сплошных осесимметричных и плоскосимметричных релятивистских электронных пучков без внешнего магнитного поля и, следовательно, при отсутствии закрутки или сносовой скорости. Модель включает получение уравнения второго приближения и начальных данных к нему с учетом сингулярности на катоде, присущей ρ-режиму эмиссии; построение выражений для второй и четвертой производных плотности тока эмиссии на оси пучка и второй производной кривизны катода. Последняя соответствует четвертым производным функций, определяющих его форму. Перечисленные параметры позволяют построить адекватную модель прикатодной области.

1. УРАВНЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА

Невырожденная базовая трубка тока. Формулировку задачи о сплошном осесимметричном или плоскосимметричном потоке необходимо начинать с уравнений трубчатого пучка при отсутствии внешнего магнитного поля и при произвольной продольной координате x^1 на базовой поверхности $x^2 = \text{const}$. Ось сплошного пучка $x^2 = 0$ является вырожденной трубкой тока, на которой система x^i локально ортогональна: $g_{12} = 0$ при $g_{12,2} \neq 0$.

В двумерном случае метрический тензор g_{ik} системы x^i имеет следующие элементы:

$$g_{11} \equiv h_1^2,\ \ g_{22} \equiv h_2^2,\ \ g_{12} = h_1 h_2 \cos\theta_{12},\ \ g_{33} \equiv h_3^2, \quad (1)$$

где θ_{12} – угол между осями x^1, x^2; $h_3 = R$ в осесимметричном и $h_3 = 1$ в плоском случаях.

Соотношение на трубке тока определено выражением

$$\frac{(1+\tilde{\varphi})u^2}{\sin\theta_{12}}\left\{\frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} - h_2\frac{\theta_{12,1}^2}{h_1^2} - \cos\theta_{12}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1}\right\} + \frac{1}{h_1^2}\left(h_2\sin\theta_{12}\right)_{,1}\varphi_{,1} =$$

$$= h_2\sin\theta_{12}\left[-2(1+\tilde{\varphi})k_1^2u^2 + (1+\tilde{\varphi})k_1k_2u^2 + \ \ k_2\operatorname{tg}\theta\frac{1}{h_1}\varphi_{,1} - \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1}\varphi_{,1}\right)_{,1} - 2k_1uN - \frac{N^2-\tilde{E}_\nu^2}{1+\tilde{\varphi}}\right] + \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3(1+\tilde{\varphi})^2u}; \quad (2)$$

$$E_\nu = (1+\tilde{\varphi})k_1u^2 + uN,\ \ 1+\varphi = 1\Big/\sqrt{1-u^2}.$$

Здесь φ, u – потенциал электрического поля и скорость; N, E_ν – азимутальная компонента напряженности собственного магнитного поля и нормальное электрическое поле на трубке тока; k_1, k_2 – ее главные кривизны, причем k_2 отвечает за осесимметричность течения:

$$k_2 = -\cos\theta / R, \tag{3}$$

где θ – угол между касательной к трубке тока и осью z цилиндрической системы z, R; для плоских потоков $k_2 = 0$.

Главные кривизны поверхности $x^1 = \text{const}$ обозначим символами κ_1, κ_2

$$\kappa_2 = \cos\vartheta / R, \tag{4}$$

причем в отличие от k_2 эта функция на оси z в осесимметричном случае имеет конечную величину, равную κ_1. Частные производные по соответствующей координате обозначаются нижним индексом после запятой; нижний индекс 0 относит величину к катоду $x^1 = 0$. Соотношение (2) и все последующие выражения записаны в релятивистской нормировке, исключающей из уравнений все физические константы используемой системы единиц; тильдой отмечаются члены, исчезающие в нерелятивистском пределе.

Эволюционная система уравнений – вторая часть декомпозиции исходной системы – имеет вид

$$\begin{gathered}
z_{,2} = h_2\cos\vartheta, \quad R_{,2} = h_2\sin\vartheta, \quad \vartheta = \theta + \theta_{12};\\
\varphi_{,2} = h_2 E, \quad E = E_\nu \sin\theta_{12} + \frac{1}{h_1}\varphi_{,1}\cos\theta_{12};\\
\theta_{,2} = \frac{1}{\sin\theta_{12}}\frac{h_{2,1}}{h_1} + h_2\cos\theta_{12}k_1 - \frac{\text{ctg}\theta_{12}}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1},\\
h_{1,2} = -h_1 h_2\sin\theta_{12}k_1 + \left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1};\\
u_{,2} = h_2\sin\theta_{12}\left(k_1 u + \frac{N - u\tilde{E}_\nu}{1+\tilde{\varphi}}\right) + \frac{h_2\cos\theta_{12}}{u(1+\tilde{\varphi})^3}\frac{\varphi_{,1}}{h_1},\\
k_{1,2} = \frac{1}{h_1\sin\theta_{12}}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} +\\
+ h_2\sin\theta_{12}k_1^2 + h_2\cos\theta_{12}\frac{k_{1,1}}{h_1} -\\
- \frac{h_2\theta_{12,1}^2}{h_1^2\sin\theta_{12}} - \frac{\text{ctg}\theta_{12}}{h_1}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1},\\
E_{\nu,2} = h_2\sin\theta_{12}\times\\
\times\left[(k_1+k_2)E_\nu + k_2\text{tg}\theta\frac{\varphi_{,1}}{h_1} - \frac{1}{h_1}\left(\frac{\varphi_{,1}}{h_1}\right)_{,1}\right] +\\
+ (1+\tilde{\varphi})u^2 h_2\cos\theta_{12}\frac{k_{1,1}}{h_1} +\\
+ \frac{\varphi_{,1}}{h_1}\left[2k_1 + \frac{1}{1+\tilde{\varphi}}\left(\frac{N}{u} - E_\nu\right)\right] +\\
+ k_2\text{tg}\theta Nu - \frac{1}{h_1}(h_2\sin\theta_{12})_{,1}\frac{\varphi_{,1}}{h_1} + \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3 u},\\
N_{,2} = h_2 k_2\sin\theta_{12}N(1 + \text{ctg}\theta_{12}\text{tg}\theta) + \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3},\\
\theta_{12,1} = \frac{1}{h_2\sin\theta_{12}}\left[\cos\theta_{12}h_{2,1} - \left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right].
\end{gathered}\tag{5}$$

Обратим внимание на тот факт, что в правых частях уравнений (5) стоят величины, известные на базовой трубке тока. Комплексы типа $k_{1,1}/h_1$, $h_{2,1}/h_1$ имеют смысл физической составляющей градиента соответствующей величины в продольном направлении.

Уравнения пучка на оси, первое приближение. Локальная ортогональность системы x^i на оси z ($g_{12} = 0$, $\theta_{12} = \pi/2$, $h_1 = 1$) при $k_2 \to \infty$ в осесимметричном случае и $k_2 = 0$ для плоскосимметричных течений приводит к следующим трансформациям уравнения (2):

$$\begin{gathered}
(1+\tilde{\varphi})u^2 h_{2,11} + h_{2,1}\varphi_{,1} + \alpha h_2\varphi_{,11} = \beta\frac{b_0 J}{(1+\tilde{\varphi})^2 u},\\
\alpha = \begin{cases}1/2\\ 1\end{cases}, \quad \beta = \begin{cases}b_0/(2h_2)\\ 1\end{cases}, \quad b_0 \equiv h_{20},
\end{gathered}\tag{6}$$

где верхняя строка в выражениях для α, β соответствует осесимметричным потокам, а нижняя – плоским.

Правые части уравнений эволюционной системы на оси z обращаются в нуль для четных функций поперечной координаты

$$\begin{gathered}
z_{,2} = 0, \quad h_{1,2} = 0, \quad h_{2,2} = 0, \quad \varphi_{,2} = 0,\\
u_{,2} = 0, J_{,2} = 0,
\end{gathered}\tag{7}$$

в то время как производные нечетных функций определены выражениями[1]

$$\begin{gathered}
R_{,2} = h_2, \quad \theta_{,2} = h_{2,1}, \quad N_{,2} = \alpha\frac{b_0^2 J}{h_2}, \quad k_{1,2} = h_{2,11},\\
E_{\nu,2} = -\alpha h_2\varphi_{,11} - h_{2,1}\varphi_{,1} + \beta\frac{b_0 J}{u}; \quad k_1 k_2 = -\frac{k_{1,2}}{h_2}.
\end{gathered}\tag{8}$$

Уравнения (8) были использованы при получении соотношения (6).

[1] В плоскосимметричном случае символы z, R имеют смысл декартовых координат z, y; x – циклическая координата, аналогичная азимуту ψ для осесимметричных потоков.

Уравнения пучка на оси, второе приближение. Как соотношения на трубке тока, так и уравнения эволюционной системы высших приближений получаются по единому алгоритму, состоящему в дифференцировании по x^2, исключении при помощи эволюционной системы предыдущего приближения производных по этой переменной, возникающих в результате дифференцирования, и переходе к оси симметрии с раскрытием неопределенностей, вызванных стремлением k_2 к бесконечности в осесимметричном случае.

Двукратное дифференцирование по x^2 соотношения (2) приводит к уравнению для функции $h_{2,22}$, справедливому на оси z:

$$\begin{gathered}(1+\tilde{\varphi})u^2\left[h_{2,2211} - h_{2,11}h_{1,22} - h_{2,1}h_{1,221} - 2h_2\theta_{12,21}^2 - \right.\\ \left. - 2(\cos\theta_{12})_{,2}\, g_{12,211}\right] + \left\{u^2\tilde{\varphi}_{,22} + 2(1+\tilde{\varphi})uu_{,22} - \right.\\ \left. - (1+\tilde{\varphi})u^2\left[h_{1,22} + (\sin\theta_{12})_{,22}\right]\right\}h_{2,11} + \\ + (\varphi_{,221} - 2\varphi_{,1}h_{1,22})h_{2,1} + \varphi_{,1}\left[h_{2,22} + h_2(\sin\theta_{12})_{,22}\right]_{,1} = \\ = \left[h_{2,22} + h_2(\sin\theta_{12})_{,22}\right]\times \\ \times\left[(1+\tilde{\varphi})k_1k_2u^2 + k_2\mathrm{tg}\theta\varphi_{,1} - \varphi_{,11}\right] + \\ + h_2\left\{-4(1+\tilde{\varphi})k_{1,2}^2u^2 + \tilde{\varphi}_{,22}k_1k_2u^2 + \right. \\ + (1+\tilde{\varphi})(k_1k_2)_{,22}u^2 + \\ +2(1+\tilde{\varphi})k_1k_2uu_{,22} + (k_2\mathrm{tg}\theta)_{,22}\varphi_{,1} + \\ + \kappa_2(\varphi_{,221} - \varphi_{,1}h_{1,22}) - \varphi_{,2211} + 2\varphi_{,11}h_{1,22} + \\ \left. + \varphi_{,1}h_{1,221} - 4k_{1,2}uN_{,2} - 2\frac{N_{,2}^2 - \tilde{E}_{\nu,2}^2}{1+\tilde{\varphi}}\right\} + \frac{h_{30}}{h_3}\times \\ \times\frac{h_{20}J}{(1+\tilde{\varphi})^2u}\left(\frac{J_{,22}}{J} - 2\frac{\tilde{\varphi}_{,22}}{1+\tilde{\varphi}} - \frac{u_{,22}}{u}\right) + \frac{h_{20}J}{(1+\tilde{\varphi})^2u}\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22}.\end{gathered} \tag{9}$$

Эволюционные уравнения второго приближения принимают вид

$$\begin{gathered}z_{,22} = -h_2h_{2,1} + g_{12,2}, \quad \varphi_{,22} = h_2E_{,2}, \\ h_{1,22} = -h_2h_{2,11} + g_{12,21}, \\ u_{,22} = h_2\left[h_{2,11}u - \theta_{12,2}\frac{\tilde{\varphi}_{,1}}{(1+\tilde{\varphi})^3u} + \frac{N_{,2} - u\tilde{E}_{\nu,2}}{1+\tilde{\varphi}}\right].\end{gathered} \tag{10}$$

Для входящих в (9) комплексов имеем

$$(\cos\theta_{12})_{,2} = \frac{1}{h_2}g_{12,2}, \quad (\sin\theta_{12})_{,22} = -\left(\frac{g_{12,2}}{h_2}\right)^2,$$

$$\begin{gathered}\theta_{12,2} = -\frac{g_{12,2}}{h_2}, \quad (k_1k_2)_{,22} = -\frac{1}{3}\left(h_{2,1}h_{2,111} + 4h_{2,11}^2 - \right. \\ - \frac{1}{h_2}h_{2,1}^2h_{2,11} + \frac{1}{h_2}h_{2,2211} - \frac{1}{h_2^2}h_{2,11}h_{2,22}\Big) + \\ + \frac{1}{3}\left(2h_{2,111}\theta_{12,2} - \frac{2}{h_2}h_{2,1}h_{2,11}\theta_{12,2} - \frac{2}{h_2}h_{2,11}\theta_{12,2}^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{h_2}h_{2,11}g_{12,21} + \frac{1}{h_2}h_{2,1}g_{12,211} - \frac{2}{h_2}\theta_{12,2}g_{12,211} + 2\theta_{12,21}^2\right),\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}(k_2\mathrm{tg}\theta)_{,22} = -\frac{1}{3h_2}\times \\ \times\left[h_{2,221} + h_2h_{2,1}h_{2,11} - \frac{1}{h_2}h_{2,1}h_{2,22} + 2h_{2,1}^2\left(\frac{g_{12}}{h_2}\right)^2 - \right. \\ \left. - \left(h_{2,1}^2 - h_2h_{2,11}\right)g_{12,2} - \left(h_{2,1} + \frac{2}{h_2}g_{12,2}\right)g_{12,21}\right],\end{gathered}$$

$$\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22} = \frac{1}{3}\frac{b_0}{h_2}\left[-\frac{1}{h_2}h_{2,22} + \left(h_{2,1} - \frac{g_{12,2}}{h_2}\right)^2 - b_3^2\right],$$

$$\begin{gathered}(k_2k_1)_{,22} = -\frac{1}{3}\frac{1}{h_2}\left(k_{1,222} - \frac{1}{h_2}h_{2,22}k_{1,2}\right) + \\ + \frac{2}{h_2}\left(\frac{1}{3}h_{2,1}^2 - \frac{1}{3}h_{2,1}\theta_{12,2} - \frac{1}{6}\theta_{12,2}^2\right)k_{1,2}, \\ k_{1,222} = h_2h_{2,1}h_{2,111} + 4h_2h_{2,11}^2 + h_{2,1}^2h_{2,11} + \\ + h_{2,2211} - 2h_2\theta_{12,21}^2 - 2h_2h_{2,111}\theta_{12,2} + \\ + h_{2,11}\theta_{12,2}^2 - 2h_{2,11}g_{12,21} + (-h_{2,1} + 2\theta_{12,2})g_{12,211}.\end{gathered}$$

Параметры потока. Функции h_2, $h_{2,22}$, являющиеся решениями уравнений (6), (9), позволяют рассчитать все характеристики потока. Параметрические уравнения $R = R_e(z)$, $Z = z_e(z)$ границы пучка $x^2 = \eta = \mathrm{const}$ и потенциала $\varphi = \varphi_e(z)$ на ней определены соотношениями

$$\begin{gathered}R_e = R_{,2}\eta + \frac{1}{6}R_{,222}\eta^3, \\ z_e = z + \frac{1}{2}z_{,22}\eta^2 + \frac{1}{24}z_{,2222}\eta^4, \\ \varphi_e = \varphi(z) + \frac{1}{2}\varphi_{,22}\eta^2 + \frac{1}{24}\varphi_{,2222}\eta^4.\end{gathered} \tag{12}$$

Развернутые формулы для производных в (12) приведены в [1, 2].

В дальнейшем нам потребуется эволюционное уравнение четвертого порядка для h_1, вычисляемое по сформулированным выше правилам:

$$\begin{gathered}h_{1,2222} = -h_2h_{2,2211} - 3h_{2,11}h_{2,22} - h_2^2h_{2,1}h_{2,111} - h_2^2h_{2,11}^2 - \\ - h_2h_{2,1}^2h_{2,11} + g_{12,2221} + h_2\vartheta_{,2}g_{12,211} + \\ + (2h_2h_{2,11} + 4h_{2,1}\theta_{12,2})g_{12,21} - g_{12,21}^2 + \\ + (h_2h_{2,111} + 3h_{2,1}h_{2,11})g_{12,2} + 2\left(\frac{h_{2,11}}{h_2} + \frac{h_{2,1}^2}{h_2^2}\right)g_{12,2}^2.\end{gathered} \tag{13}$$

Выражение для $g_{12,222}$ приведено в [1, 2].

2. МОДЕЛЬ ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ

Форма решения. Решение вблизи стартовой поверхности $x^1 = 0$ при эмиссии в ρ-режиме имеет вид разложений по степеням параметра $\left(x^1\right)^{1/3}$:

$$\begin{gathered}
h_1 = a_0\left(1 + \bar{a}_1 x^{1/3} + \bar{a}_2 x^{2/3} + \ldots\right),\\
h_2 = b_0\left(1 + \bar{b}_3 x + \bar{b}_4 x^{4/3} + \ldots\right),\\
h_3 = R_0\left(1 + \bar{R}_3 x + \bar{R}_4 x^{4/3} + \ldots\right),\\
g_{12} = G_1 x^{1/3} + G_2 x^{2/3} + \ldots,\\
\varphi = \varphi_4 x^{4/3}\left(1 + \bar{\varphi}_5 x^{1/3} + \bar{\varphi}_6 x^{2/3} + \ldots\right),\\
u = V_2 x^{2/3}\left(1 + \bar{V}_3 x^{1/3} + \bar{V}_4 x^{2/3} + \ldots\right),\\
N = N_0 + N_3 x + N_4 x^{4/3} + \ldots;\ x \equiv x^1.
\end{gathered} \tag{14}$$

Для интегрирования уравнений (6), (9) необходимо задать начальные условия, в силу сингулярности эмитирующей поверхности сводящиеся к построению асимптотик для h_2, $h_{2,22}$ и прочих параметров течения. Вторые производные искомых функций в уравнениях (6), (9) имеют бесконечные значения при $x^1 = 0$ за счет членов с коэффициентами b_4, b_5, поэтому асимптотики должны включать эти параметры для первого уравнения и производные $b_{3,22}$, $b_{4,22}$, $b_{5,22}$ для второго.

Из нескольких возможных способов решения второй задачи выберем следующий. Учитывая, что в силу (7) на оси все коэффициенты a_k имеют нулевые производные

$$a_{k,2} = 0, \tag{15}$$

найдем из уравнения (2) выражения для коэффициентов φ_k, связанных с b_i, сохраняя члены, дающие ненулевой вклад при двукратном дифференцировании по x^2. Это линейные по a_k, $k > 0$ слагаемые и квадратичные произведения нечетных функций $a_{k,2}N_0$, N_0^2; члены с k_{20} требуют специального рассмотрения, так как производная $\left(k_{20}N_0^3\right)_{,22}$ отлична от нуля.

Правые части уравнения

$$\varphi_{,2} = h_2 E \tag{16}$$

могут быть вычислены с использованием уравнения (6), не содержащего функций a_k. Однократное дифференцирование полученных комплексов дает правильный результат в силу выполнения равенств (15) на оси, в то время как левая часть допускает выполнение двукратного дифференцирования коэффициентов φ_k, структура которых выявлена заблаговременно. Баланс членов в левой и правой частях уравнения (15) позволит получить требуемые соотношения.

Предварительные рассмотрения. Баланс членов порядка $x^{-2/3}$, $x^{1/3}$ в уравнении (2) приводит к следующим значениям первых коэффициентов разложения функций φ, u:

$$\begin{gathered}
\varphi_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{9a_0^2 J}{2}\right)^{2/3}, \quad \bar{\varphi}_5 = \bar{a}_1;\\
V_2 = \left(\frac{9a_0^2 J}{2}\right)^{1/3}, \quad \bar{V}_3 = \frac{1}{2}\bar{a}_1.
\end{gathered} \tag{17}$$

Выражение для кривизны k_1 позволяет связать разложение для этого параметра с разложениями из (14):

$$\begin{gathered}
k_1 = \frac{1}{h_2 \sin\theta_{12}}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1} - \frac{h_{1,2}}{h_1}\right] =\\
= x^{-2/3}\left(k_{10} + k_{11}x^{1/3} + k_{12}x^{2/3} + \ldots\right),\\
k_{10} = \frac{1}{3}\frac{1}{a_0^2 b_0}G_1, \quad k_{11} = \frac{2}{3}\frac{1}{a_0^2 b_0}\left(G_2 - \bar{a}_1 G_1\right);\\
\cos\theta_{12} = c_1 x^{1/3} + c_2 x^{2/3} + \ldots,\\
c_1 = \frac{1}{a_0 b_0}G_1, \quad c_2 = \frac{1}{a_0 b_0}\left(G_2 - \bar{a}_1 G_1\right).
\end{gathered} \tag{18}$$

Разложение для потенциала φ начинается со степени $4/3$, поэтому в правой части уравнения (16) коэффициенты при слагаемых порядка $x^{2/3}$, $x^{3/3}$ должны быть обращены в нуль. Возникающие равенства служат для определения функций G_1, G_2:

$$G_1 = -a_0^2 b_0 \bar{N}_0, \quad G_2 = -\frac{5}{4}a_0^2 b_0 \bar{a}_1 \bar{N}_0, \quad \bar{N}_0 \equiv \frac{N_0}{V_2}. \tag{19}$$

Проведенное до конца рассмотрение показывает, что в более полном описании элемента g_{12} нет необходимости:

$$G_3 = G_4 = \ldots = 0. \tag{20}$$

Параметрические уравнения произвольной трубки тока в локальных декартовых координатах X, Y (нормаль, касательная к катоду в точке старта) представим в виде

$$\begin{gathered}
Y = Y(l) = f_4 l^{4/3} + f_5 l^{5/3} + \ldots,\\
X = X(l) = \int\sqrt{1 - Y'^2}\,dl,
\end{gathered} \tag{21}$$

где l — длина дуги образующей поверхности $x^2 = \mathrm{const}$. Разложение для угла наклона θ к оси z выражается через траекторные коэффициенты f_k:

$$\begin{gathered}
\theta = \theta_0 + \mathrm{arctg}\left(Y'/X'\right) = \theta_0 + \theta_1 l^{1/3} + \theta_2 l^{2/3} + \ldots,\\
\theta_1 = \frac{4}{3}f_4, \quad \theta_2 = \frac{5}{3}f_5, \quad \theta_3 = 2f_6 + \frac{32}{81}f_4^3.
\end{gathered} \tag{22}$$

На трубке тока при $x^1 \equiv l$, $a_0 = 1$, $a_k = 0$ имеет место соотношение

$$k_1 = \theta_{,1}, \tag{23}$$

позволяющее определить первые траекторные коэффициенты

$$f_4 = -\frac{3}{4}\bar{N}_0, \quad f_5 = 0. \tag{24}$$

Рассматривая в выражении для k_1 из (18) члены порядка x^0, $x^{1/3}$, получаем

$$k_{12} = -\frac{a_{0,2}}{b_0} - \frac{1}{6}\bar{N}_0^3, \quad k_{13} = -\frac{a_{1,2}}{b_0} + \frac{1}{3}\bar{b}_3\bar{N}_0. \tag{25}$$

Дальнейшие балансы в (23) с учетом (25) приводят к следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} k_{12} = \theta_3, \quad k_{13} = \frac{4}{3}\theta_4; \quad \frac{a_{0,2}}{b_0} = -2f_6, \\ \frac{a_{1,2}}{b_0} = -\frac{28}{9}f_7 + \frac{1}{3}\bar{b}_3\bar{N}_0. \end{gathered} \tag{26}$$

Рассмотрим две соседние трубки тока $x^2 = 0$ и $x^2 = \eta$, которые будем отмечать индексами 0, 1 с длинами дуг l_0, l_1 и локальными декартовыми системами X_0, Y_0 и X_1, Y_1. Координаты X, Y и z, R связаны соотношениями

$$\begin{gathered} \bar{z} \equiv z - z_0 = X\cos\theta_0 - Y\sin\theta_0, \\ \bar{R} \equiv R - R_0 = X\sin\theta_0 + Y\cos\theta_0; \\ X = \bar{z}\cos\theta_0 + \bar{R}\sin\theta_0, \\ Y = -\bar{z}\sin\theta_0 + \bar{R}\cos\theta_0. \end{gathered} \tag{27}$$

Уравнения трубки тока $x^2 = \eta$ в системе z, R на основании эволюционной системы (5) имеют вид

$$\begin{gathered} z^{(1)} = z^{(0)} + (h_2\cos\vartheta)^{(0)}\eta, \\ R^{(1)} = R^{(0)} + (h_2\sin\vartheta)^{(0)}\eta. \end{gathered} \tag{28}$$

Координаты точки на катоде, с которой стартует трубка $x^2 = \eta$, суть

$$\begin{gathered} z_0^{(1)} = z_0^{(0)} - (b_0\sin\theta_0)^{(0)}\eta, \\ R_0^{(1)} = R_0^{(0)} + (b_0\cos\theta_0)^{(0)}\eta. \end{gathered} \tag{29}$$

Уравнения базовой трубки тока $x^2 = 0$ через функции $X_0(l_0)$, $Y_0(l_0)$ с учетом (27) определены соотношениями

$$\begin{gathered} z^{(0)} - z_0^{(0)} = X_0(l_0)\cos\theta_0^{(0)} - Y_0(l_0)\sin\theta_0^{(0)}, \\ R^{(0)} - R_0^{(0)} = X_0(l_0)\sin\theta_0^{(0)} + Y_0(l_0)\cos\theta_0^{(0)}. \end{gathered} \tag{30}$$

Запишем выражения для Y_1, используя (27)–(30) и уравнение для θ из (5) при $x^1 = 0$ и ограничившись линейными членами по η:

$$\begin{gathered} Y_1 = -\bar{z}^{(1)}\sin\theta_0^{(1)} + \bar{R}^{(1)}\cos\theta_0^{(1)}, \quad \vartheta_0^{(0)} = \frac{\pi}{2} + \theta_0^{(0)}, \\ \bar{z}^{(1)} = z^{(1)} - z_0^{(1)} = \left[z^{(0)} + (h_2\cos\vartheta)^{(0)}\eta\right] - \\ - \left[z_0^{(0)} - b_0^{(0)}\sin\theta_0^{(0)}\right], \quad \bar{R}^{(1)} = R^{(1)} - R_0^{(1)} = \\ = \left[R^{(0)} + (h_2\sin\vartheta)^{(0)}\eta\right] - \left[R_0^{(0)} + b_0^{(0)}\cos\theta_0^{(0)}\right], \\ z^{(0)} - z_0^{(0)} = X_0\cos\theta_0^{(0)} - Y_0\sin\theta_0^{(0)}, \\ R^{(0)} - R_0^{(0)} = X_0\sin\theta_0^{(0)} + Y_0\cos\theta_0^{(0)}, \\ Y_1 = -X_0\sin\left(\theta^{(1)} - \theta_0^{(0)}\right) + Y_0\cos\left(\theta^{(1)} - \theta_0^{(0)}\right) + \\ + \left[-h_2^{(0)}\sin\left(\theta_0^{(1)} - \vartheta^{(0)}\right) - b_0^{(0)}\cos\left(\theta_0^{(1)} - \theta_0^{(0)}\right)\right]\eta. \end{gathered} \tag{31}$$

Учитывая выражения

$$\begin{gathered} \theta_0^{(1)} - \theta_0^{(0)} = \bar{b}_3^{(0)}\eta, \\ \theta^{(1)} - \vartheta^{(0)} = \left[\theta^{(0)} + b_3^{(0)}\eta\right] - \left[\frac{\pi}{2} + \theta_0^{(0)} + \vartheta_3^{(0)}x\right] = \\ = -\frac{\pi}{2} + \left[b_3^{(0)}\eta - \vartheta_3^{(0)}x\right], \end{gathered} \tag{32}$$

для первой трубки тока получаем

$$Y_1 = -X_0(l_0)b_3^{(0)}\eta + Y_0(l_0) + h_2^{(0)} - b_0^{(0)}. \tag{33}$$

Параметрические уравнения (21) базовой поверхности $x^2 = 0$ вблизи катода описываются соотношениями

$$\begin{gathered} Y_0 = f_4 l_0^{4/3} + f_5 l_0^{5/3} + f_6 l_0^{6/3} + \ldots, \\ X_0 = l_0 - \frac{8}{15}f_4^2 l_0^{5/3} - \frac{10}{9}f_4 f_5 l_0^{6/3} + \ldots \end{gathered} \tag{34}$$

Подстановка выражений для X_0, Y_0 из (34) в (33) дает

$$\begin{gathered} Y_1 = \left[f_4^{(0)} + b_4^{(0)}\eta\right]l_0^{4/3} + \\ + \left[f_5^{(0)} + \left(b_5 + \frac{8}{15}b_3 f_4^2\right)^{(0)}\eta\right]l_0^{5/3} + \ldots \end{gathered} \tag{35}$$

Длины дуг l_0, l_1 следующим образом связаны друг с другом:

$$\begin{gathered} l_1 = \int\left[a_0^{(1)} + a_1^{(1)}l_0^{1/3} + a_2^{(1)}l_0^{2/3} + \ldots\right]dl_0, \\ a_0^{(1)} = 1 + a_{0,2}^{(0)}\eta, \quad a_1^{(1)} = a_{1,2}^{(0)}\eta, \quad a_2^{(1)} = a_{2,2}^{(0)}\eta, \ldots \\ l_0 = l_1 - \frac{3}{4}a_1^{(1)}l_1^{4/3} - \frac{3}{5}a_2^{(1)}l_1^{5/3} + \ldots \end{gathered} \tag{36}$$

Переходя от l_0 к l_1 в формуле (35) с учетом (26), (36), получаем

$$\begin{gathered} Y_1 = \left[f_4^{(0)} + \left(\bar{b}_4 + \frac{8}{3}f_4 f_6\right)^{(0)} b_0^{(0)}\eta\right]l_1^{4/3} + \\ + \left[f_5^{(0)} + \left(\bar{b}_5 + \frac{44}{45}\bar{b}_3 f_4^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{28}{9}f_4 f_7 + \frac{10}{3}f_5 f_6\right)^{(0)} b_0^{(0)}\eta\right]l_1^{5/3} + \ldots \end{gathered} \tag{37}$$

Пропорциональные η агрегаты в круглых скобках из (37) задают скорость изменения траекторных коэффициентов в x^2-направлении. Вместе с тем коэффициент f_4 определен через магнитное поле на катоде формулами (24), а $f_5 = 0$; производные этих коэффициентов по x^2 могут быть получены дифференцированием выражений (24) с использованием уравнения для $N_{,2}$ эволюционной системы (5):

$$\frac{1}{b_0} f_{4,2} = -\frac{3}{4}\left(k_{20}\bar{N}_0 - \frac{10}{3}\bar{N}_0 f_6 + \frac{1}{4}\bar{N}_0^4 + \frac{2}{9}\tilde{V}_2^2\right), \quad f_{5,2} = 0. \tag{38}$$

Приравнивая производные траекторных коэффициентов в (37), (38), получаем выражения для $\bar{b}_4$, $\bar{b}_5$:

$$\bar{b}_4 = \frac{1}{b_0} f_{4,2} - \frac{8}{3} f_4 f_6, \quad \bar{b}_5 = -\frac{28}{9} f_4 f_7 - \frac{10}{3} f_5 f_6 - \frac{44}{45}\bar{b}_3 f_4^2. \tag{39}$$

На оси сплошного пучка в осесимметричном и плоском случаях имеем соответственно

$$\bar{b}_4 = -\frac{1}{12}\tilde{V}_2^2, \quad \bar{b}_5 = 0; \quad \bar{b}_4 = -\frac{1}{6}\tilde{V}_2^2, \quad \bar{b}_5 = 0. \tag{40}$$

Полученная выше информация позволяет перейти к решению основной задачи.

3. ПЛОТНОСТЬ ТОКА ЭМИССИИ И КРИВИЗНА КАТОДА

Плотность тока. Баланс членов порядка $x^{4/3}$ в уравнении (16) в случае произвольной продольной координаты приводит к выражению для градиента плотности тока эмиссии

$$\frac{1}{b_0}\frac{J_{,2}}{J} = -5\frac{a_{0,2}}{a_0 b_0} + \left(6\bar{a}_2 + \frac{15}{16}\bar{a}_1^2\right)\bar{N}_0 - \frac{3}{4}\bar{N}_0^3. \tag{41}$$

Повторное дифференцирование по x^2 с переходом к оси z позволяет получить вторую и четвертую производные, отличные от нуля:

$$\frac{1}{b_0^2}\frac{J_{,22}}{J} = -5\frac{a_{0,22}}{a_0 b_0^2}, \quad \frac{1}{b_0^4}\frac{J_{,2222}}{J} = -5\frac{a_{0,2222}}{a_0 b_0^4} + 15\frac{a_{0,22}^2}{a_0^2 b_0^4} + 18\frac{\bar{a}_{2,22}}{a_0 b_0^2}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0} - \frac{9}{2}\frac{\bar{N}_{0,2}^3}{b_0^3}. \tag{42}$$

Уравнение для $h_{1,22}$ из (10) приводит к следующим значениям вторых производных $a_{k,22}$:

$$\begin{gathered}\frac{a_{0,22}}{b_0^2} = -2\bar{b}_6, \quad \frac{a_{1,22}}{b_0^2} = -\frac{28}{9}\bar{b}_7 - \frac{4}{9}\bar{b}_3\bar{b}_4, \\ \frac{a_{2,22}}{b_0^2} = -\frac{40}{9}\bar{b}_8 - \frac{4}{9}\bar{b}_4^2, \quad \frac{a_{3,22}}{b_0^2} = -6\bar{b}_9 - 2\bar{b}_3\bar{b}_6, \\ \frac{a_{4,22}}{b_0^2} = -\frac{70}{9}\bar{b}_{10} - 2\bar{b}_3\bar{b}_7 - \frac{22}{9}\bar{b}_4\bar{b}_6, \\ \frac{a_{5,22}}{b_0^2} = -\frac{88}{9}\bar{b}_{11} - \frac{40}{9}\bar{b}_3\bar{b}_8 - \frac{32}{9}\bar{b}_4\bar{b}_7, \\ \frac{a_{6,22}}{b_0^2} = -12\bar{b}_{12} - 6\bar{b}_3\bar{b}_9 - \frac{44}{9}\bar{b}_4\bar{b}_8 - 2\bar{b}_6^2.\end{gathered} \tag{43}$$

Формулы (43) справедливы как для осесимметричных, так и для плоских течений.

Уравнение (13) позволяет вычислить производную $a_{0,2222}$:

$$\frac{a_{0,2222}}{b_0^4} = -2\frac{b_{6,22}}{b_0^3} - 6\bar{b}_3\bar{b}_9 - 4\bar{b}_6^2 + \frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\left(\frac{56}{27}\bar{b}_8 - \frac{52}{27}\bar{b}_4^2\right) + \frac{4}{9}\frac{\bar{N}_{0,2}^2}{b_0^2}\bar{b}_4. \tag{44}$$

Кривизна катода. В силу локальной ортогональности системы x^1, x^2 при $x^1 = 0$ для вычисления вторых производных главных кривизн на оси можно пользоваться выражениями, записанными в ортогональной системе [1, 2]:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{h_1}\frac{h_{2,1}}{h_2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{h_1}\frac{h_{3,1}}{h_3} = -\frac{\sin\theta}{R}. \tag{45}$$

Двукратное дифференцирование по x^2 приводит к следующему результату:

$$\begin{gathered}\kappa_{1,22} = -\frac{1}{h_2}h_{2,221} + \frac{1}{h_2^2}h_{2,1}h_{2,22} + \frac{1}{h_2}h_{2,1}h_{1,22}, \\ \kappa_2 = -\frac{1}{h_2}\left[\theta_{,2} + \frac{1}{6}\left(\theta_{,222} - \theta_{,2}^3 - \frac{1}{h_2}\theta_{,2}R_{,222}\right)\eta^2\right], \\ \theta_{,2} = \frac{h_{2,1}}{h_1}, \quad \theta_{,222} = h_{2,221} - h_{2,1}h_{1,22}, \\ R_{,222} = h_{2,22} - h_2\theta_{,2}^2, \\ \kappa_{2,22} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{h_2}h_{2,221} + \frac{1}{h_2^2}h_{2,1}h_{2,22} + \frac{1}{h_2}h_{2,1}h_{1,22}\right).\end{gathered} \tag{46}$$

При $x^1 = 0$ для производных кривизн с учетом (43) получаем

$$\frac{\kappa_{10,22}}{b_0^2} = 3\frac{\kappa_{20,22}}{b_0^2} = -\frac{\bar{b}_{3,22}}{b_0^2} + \bar{b}_3\frac{a_{0,22}}{b_0^2} = -\left(\frac{\bar{b}_{3,22}}{b_0^2} + 2\bar{b}_3\bar{b}_6\right); \quad \kappa_{10} = -\bar{b}_3. \tag{47}$$

Таким образом, для решения поставленной задачи при описании прикатодной области необходимо найти функции $\overline{b}_{3,22}$, $\overline{b}_{6,22}$.

4. НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Коэффициенты φ_k *с возможностью двукратного дифференцирования по* x^2. Выполняя намеченную в разд. 2 программу, рассмотрим общий случай соотношения (2). Выпишем уравнения, связывающие коэффициенты разложения потенциала и скорости, следующие из интеграла энергии:

$$
\begin{gathered}
\overline{\varphi}_6 = 2\overline{V}_4 + \overline{V}_3^2, \;\; \overline{\varphi}_7 = 2\overline{V}_5 + 2\overline{V}_3\overline{V}_4, \\
\overline{\varphi}_8 = 2\overline{V}_6 + 2\overline{V}_3\overline{V}_5 + \overline{V}_4^2 + \frac{3}{4}\tilde{V}_2^2, \\
\overline{\varphi}_9 = 2\overline{V}_7 + 2\overline{V}_3\overline{V}_6 + 2\overline{V}_4\overline{V}_5 + 3\overline{V}_3\tilde{V}_2^2, \\
\overline{\varphi}_{10} = 2\overline{V}_8 + 2\overline{V}_3\overline{V}_7 + 2\overline{V}_4\overline{V}_6 + \overline{V}_5^2 - \overline{\varphi}_6\tilde{\varphi}_4 - \\
- \frac{1}{2}\overline{\varphi}_5^2\tilde{\varphi}_4 + \left(2\overline{\varphi}_6 + 2\overline{V}_3\overline{V}_5\right)\tilde{V}_2^2, \\
\overline{\varphi}_{11} = 2\overline{V}_9 + 2\overline{V}_5\overline{V}_6 + 3\overline{V}_5\tilde{V}_2^2, \;\; \overline{\varphi}_{12} = 2\overline{V}_{10} + \overline{V}_6^2 + \\
+ 3\overline{V}_6\tilde{V}_2^2 + \frac{5}{8}\tilde{V}_2^4, \;\; \overline{\varphi}_{13} = 2\overline{V}_{11} + 2\overline{V}_5\overline{V}_8, \\
\overline{\varphi}_{14} = 2\overline{V}_{12} + 2\overline{V}_5\overline{V}_9 + 2\overline{V}_6\overline{V}_8 + \frac{3}{2}\left(2\overline{V}_8 + 3\overline{V}_5^2\right)\tilde{V}_2^2, \\
\overline{\varphi}_{15} = 2\overline{V}_{13} + 2\overline{V}_5\overline{V}_{10} + 2\overline{V}_6\overline{V}_9 + \\
+ 3\left(\overline{V}_9 + 3\overline{V}_5\overline{V}_6\right)\tilde{V}_2^2 + \frac{15}{4}\overline{V}_5\tilde{V}_2^4, \\
\overline{\varphi}_{16} = 2\overline{V}_{14} + 2\overline{V}_5\overline{V}_{11} + 2\overline{V}_6\overline{V}_{10} + \overline{V}_8^2 + \\
+ \frac{3}{2}\left(2\overline{V}_{10} + 3\overline{V}_6^2\right)\tilde{V}_2^2 + \frac{15}{4}\overline{V}_6\tilde{V}_2^4 + \frac{35}{64}\tilde{V}_2^6.
\end{gathered}
\tag{48}
$$

Начиная с $\overline{\varphi}_{11}$ приведенные соотношения справедливы только на оси z.

Балансы членов в уравнении (2) (первый баланс – члены порядка x^0) приводят к следующим выражениям для коэффициентов $\overline{\varphi}_k$ и для $\overline{V}_k$, необходимых в дальнейшем

$$
\begin{gathered}
\overline{\varphi}_6 = \frac{4}{5}\overline{a}_2 - \frac{3}{10}\overline{N}_0^2, \;\; \overline{\varphi}_7 = \frac{2}{3}\overline{a}_3 + \frac{8}{15}a_0T_0, \\
T_0 = \kappa_{10} + \kappa_{20}, \;\; \overline{\varphi}_8 = \frac{4}{7}\overline{a}_4 + a_0\overline{a}_1\left(\frac{13}{30}\kappa_{10} + \frac{14}{15}\kappa_{20}\right) - \\
- \frac{2}{3}\overline{b}_4 + a_0\overline{N}_0\left(\frac{2}{7}\frac{a_{0,2}}{a_0b_0} - \frac{1}{2}k_{20}\right) - \frac{5}{84}\tilde{V}_2^2, \\
\overline{\varphi}_9 = \frac{1}{2}\overline{a}_5 + a_0\overline{a}_2\left(\frac{289}{1050}\kappa_{10} + \frac{56}{75}\kappa_{20}\right) - \\
- \frac{23}{42}\overline{a}_1\overline{b}_4 - a_0\overline{a}_1k_{20}\overline{N}_0 - \frac{5}{42}\overline{a}_1\tilde{V}_2^2 - \frac{11}{14}\overline{b}_5 + \\
+ \frac{3}{14}\overline{N}_0\frac{a_{1,2}}{a_0b_0} + a_0\overline{N}_0^2\left(\frac{449}{700}\kappa_{10} - \frac{233}{350}\kappa_{20}\right), \\
\overline{\varphi}_{10} = \frac{4}{9}\overline{a}_6 + a_0\overline{a}_3\left(\frac{8}{45}\kappa_{10} + \frac{28}{45}\kappa_{20}\right) - \\
- \frac{16}{45}\overline{a}_2\overline{b}_4 - \frac{3}{5}a_0\overline{a}_2k_{20}\overline{N}_0 - \frac{2}{21}\overline{a}_2\tilde{V}_2^2 - \frac{8}{9}\overline{b}_6 + \\
+ \frac{83}{225}a_0^2\left(\kappa_{10}^2 + \kappa_{20}^2\right) + \frac{157}{450}a_0^2\kappa_{10}\kappa_{20} - \frac{1}{2}\frac{a_{0,2}^2}{a_0^2b_0^2} - \\
- \frac{4}{9}a_0^2k_{20}\frac{a_{0,2}}{a_0b_0} + \frac{1}{6}\overline{N}_0\frac{a_{2,2}}{a_0b_0} - \frac{99}{160}\overline{b}_4\overline{N}_0^2 + \\
+ \frac{733}{3780}\overline{N}_0^2\tilde{V}_2^2 + \frac{101}{360}a_0k_{20}\overline{N}_0^3; \;\; \overline{V}_4 = \frac{2}{5}\overline{a}_2 - \frac{3}{20}\overline{N}_0^2, \\
\overline{V}_5 = \frac{1}{3}\overline{a}_3 + \frac{4}{15}a_0T_0, \;\; \overline{V}_6 = \frac{2}{7}\overline{a}_4 + \\
+ a_0\overline{a}_1\left(\frac{1}{12}\kappa_{10} + \frac{1}{3}\kappa_{20}\right) - \frac{1}{3}\overline{b}_4 + \\
+ a_0\overline{N}_0\left(\frac{1}{7}\frac{a_{0,2}}{a_0b_0} - \frac{1}{4}k_{20}\right) - \frac{17}{42}\tilde{V}_2^2, \\
\overline{V}_7 = \frac{1}{4}\overline{a}_5 + a_0\overline{a}_2\left(\frac{13}{420}\kappa_{10} + \frac{4}{15}\kappa_{20}\right) - \\
- \frac{3}{28}\overline{a}_1\overline{b}_4 - \frac{3}{8}a_0\overline{a}_1k_{20}\overline{N}_0 - \frac{17}{28}\overline{a}_1\tilde{V}_2^2 - \frac{11}{28}\overline{b}_5 + \\
+ \frac{3}{28}\overline{N}_0\frac{a_{1,2}}{a_0b_0} + a_0\overline{N}_0^2\left(\frac{101}{280}\kappa_{10} - \frac{41}{140}\kappa_{20}\right).
\end{gathered}
\tag{49}
$$

Балансы уравнения $\varphi_{,22} = \left(h_2E\right)_{,2}$. Формула (41) выражала баланс членов порядка $x^{4/3}$ в уравнении (16). При рассмотрении членов более высокого порядка используются формулы

$$
\begin{gathered}
\varphi_{k,2} = \frac{1}{2}V_2^2\left[\overline{\varphi}_{k,2} + \overline{\varphi}_k\left(\frac{4}{3}\frac{a_{0,2}}{a_0} + \frac{2}{3}\overline{J}_{,2}\right)\right], \;\; \overline{J}_{,2} \equiv \frac{J_{,2}}{J}; \\
\varphi_{k,22} = \frac{1}{2}V_2^2\left[\overline{\varphi}_{k,22} + \overline{\varphi}_k\left(\frac{4}{3}\frac{a_{0,22}}{a_0} + \frac{2}{3}\overline{J}_{,22}\right)\right], \\
\overline{J}_{,22} \equiv \frac{J_{,22}}{J}.
\end{gathered}
\tag{50}
$$

Приравняв в (16) члены порядка $x^{5/3} \ldots x^{10/3}$, выполнив однократное дифференцирование по x^2 полученных таким образом правых частей и двукратное дифференцирование функций φ_k из (49) в левых частях, приходим к следующим соотношениям:

$$
\begin{gathered}
\frac{a_{1,22}}{b_0^2} = \frac{1}{9}V_2^2\left(-\frac{46}{45}\kappa_{10} + \frac{14}{45}\kappa_{20}\right), \\
\frac{a_{2,22}}{b_0^2} = \frac{80}{63}\overline{b}_4\frac{\overline{N}_{0,2}}{b_0} + \frac{3}{14}\frac{\overline{N}_{0,2}^2}{b_0^2} - \frac{1}{6}\left(k_{20}\overline{N}_0^2\right)_{,2} - \frac{10}{63}\frac{\overline{N}_{0,2}}{b_0}\tilde{V}_2^2, \\
\frac{\overline{b}_{3,22}}{b_0^2} = -5\overline{b}_9 - \frac{13}{2}\overline{b}_3\overline{b}_6,
\end{gathered}
$$

$$\frac{\bar b_{4,22}}{b_0^2}=\frac{3}{2}\Bigg[\frac{9}{7}\frac{\bar a_{4,22}}{b_0^2}+\left(-\frac{61}{21}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}+\frac{11}{42}\tilde V_2^2\right)\bar b_6+ \\ +\left(-\frac{23}{270}\kappa_{10}^2+\frac{434}{18\,225}\kappa_{20}^2-\frac{1907}{36\,450}\kappa_{10}\kappa_{20}\right)\tilde V_2^2+ \\ +\left(\frac{77}{90}\kappa_{10}^2+\frac{53}{90}\kappa_{20}^2+\frac{403}{450}\kappa_{10}\kappa_{20}\right)\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}- \\ -\frac{1}{4}\frac{1}{b_0^2}\left(a_0\bar N_0k_{20}\right)_{,22}-\frac{7}{6}k_{20}\frac{a_{0,2}}{b_0}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}\Bigg]. \tag{51}$$

Члены с k_{20}, присущие осесимметричной задаче, раскрываются следующим образом:

$$\cos\theta=1-\frac{1}{2}b_3^2\eta^2+0\cdot\eta^3,\quad R=b_0\eta-\frac{1}{6}b_0b_3^2\eta^3, \\ N_0=N_{0,2}\eta+\frac{1}{6}N_{0,222}\eta^3,\quad \frac{1}{b_0^3}N_{0,222}=-\kappa_{10}\kappa_{20}\frac{1}{b_0}N_{0,2}, \\ a_0\bar N_0k_{20}=\left(\frac{9J}{2}\right)^{-1/3}a_0^{4/3}N_0\left(-\frac{\cos\theta}{R}\right), \\ \frac{1}{b_0}N_{0,2}=J-\frac{\cos\theta}{R_0}N_0,\ a_0=1+\frac{1}{2}a_{0,22}\eta^2, \\ \frac{1}{b_0}\bar N_{0,2}=\frac{1}{9}\tilde V_2^2,\ a_0\bar N_0k_{20}=-\frac{a_0^2N_{0,2}}{V_2}\times \\ \times\left(1+\frac{2}{3}\frac{a_{0,22}}{a_0}\eta^2\right)\eta\left(1+\frac{1}{6}\frac{N_{0,222}}{N_{0,2}}\eta^2\right)\times \\ \times\left(1-\frac{1}{6}\bar J_{,22}\eta^2\right)\left(1-\frac{1}{2}b_3^2\eta^2\right)\frac{1}{b_0\eta}\left(1+\frac{1}{6}b_3^2\eta^2\right); \\ -\frac{1}{4}\frac{1}{b_0^2}\left(a_0\bar N_0k_{20}\right)_{,22}-\frac{7}{6}k_{20}\frac{a_{0,2}}{b_0}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}=-\frac{23}{54}\bar b_6\tilde V_2^2. \tag{52}$$

Последнее выражение получено с учетом значения $\bar N_{0,2}$ в осесимметричном случае из (8).

Продолжая рассмотрение уравнения $\varphi_{,2}=h_2E$, для $\varphi_{9,22}$ имеем ($\varphi_9=0$ на оси):

$$\frac{\bar b_{5,22}}{b_0^2}=\frac{28}{11}\Bigg\{\frac{5}{4}\frac{\bar a_{5,22}}{b_0^2}+\left(\frac{1409}{2100}\kappa_{10}+\frac{68}{75}\kappa_{20}\right)\frac{a_{2,22}}{b_0^2}+ \\ +\left(-\frac{23}{84}\bar b_4+\frac{3}{14}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}-\frac{65}{252}\tilde V_2^2\right)\frac{a_{1,22}}{b_0^2}+ \\ +\left(\frac{449}{700}\kappa_{10}-\frac{233}{350}\kappa_{20}\right)\frac{\bar N_{0,2}^2}{b_0^2}+ \\ +\left[\left(-\frac{4}{15}\bar b_4-\frac{379}{5670}\tilde V_2^2\right)\kappa_{10}-\left(\frac{19}{15}\bar b_4-\frac{1318}{2835}\tilde V_2^2\right)\kappa_{20}\right]\times \\ \times\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}+\left(\frac{11}{6}\bar\varphi_{11}-\frac{1}{3}\bar V_9-\bar b_7\right)\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}-\frac{1}{2}\frac{1}{b_0^2}\left(a_1\bar N_0k_{20}\right)_{,22}+ \\ +\left[k_{20}\bar N_0\left(\frac{31}{70}\kappa_{10}\bar N_0+\frac{1}{5}\kappa_{20}\bar N_0+\frac{9}{28}\frac{a_{1,2}}{b_0}\right)\right]_{,2}\Bigg\}. \tag{53}$$

Члены с производными, обязанными осесимметричности, раскрываются так:

$$a_1\bar N_0k_{20}=-\frac{1}{2}a_{1,22}\eta^2\frac{a_0N_{0,2}}{V_2}\eta\left(1+\frac{1}{3}\frac{a_{0,22}}{a_0}\eta^2\right)\times \\ \times\left(1+\frac{1}{6}\frac{N_{0,222}}{N_{0,2}}\eta^2\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\bar J_{,22}\eta^2\right)\left(1-\frac{1}{2}b_3^2\eta^2\right)\times \\ \times\frac{1}{b_0\eta}\left(1+\frac{1}{6}b_3^2\eta^2\right)=-\frac{1}{9}a_{1,22}\tilde V_2^2\eta^2, \\ \left(a_1\bar N_0k_{20}\right)_{,22}=-\frac{2}{9}a_{1,22}\tilde V_2^2,\ \left(k_{20}\bar N_0^2\right)_{,2}=-\bar N_{0,2}^2, \\ \left(a_{1,2}k_{20}\bar N_0\right)=-a_{1,22}\bar N_{0,2}. \tag{54}$$

В соответствии с формулами (42)–(44) нам необходимо вычислить производную $\bar b_{6,22}$ и коэффициент $\bar b_{12}$. Обозначим через $\bar B_{6,22}$ фрагмент функции $\bar b_{6,22}$, общий для осесимметричных и плоских течений и через $\bar\beta_{6,22}$ слагаемые, присущие осесимметричным потокам. Баланс членов порядка $x^{10/3}$, позволяющий рассчитать четвертую производную плотности тока эмиссии, приводит к следующему результату:

$$\frac{4}{9}\frac{\bar B_{6,22}}{b_0^2}=\frac{83}{225}\frac{1}{b_0^2}\left(\kappa_{10}\kappa_{10,22}+\kappa_{20}\kappa_{20,22}\right)+ \\ +\frac{157}{900}\frac{1}{b_0^2}\left(\kappa_{20}\kappa_{10,22}+\kappa_{10}\kappa_{20,22}\right)-\left(6\bar b_9+2\bar b_3\bar b_6\right)\times \\ \times\left(\frac{28}{45}\kappa_{10}+\frac{38}{45}\kappa_{20}\right)-2\bar b_6\left[\frac{383}{225}\left(\kappa_{10}^2+\kappa_{20}^2\right)\right. \\ \left.+\frac{73}{50}\kappa_{10}\kappa_{20}+\frac{4}{9}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}\right]-\frac{2}{9}\bar b_6^2+\frac{11}{9}\frac{a_{6,22}}{b_0^2}+ \\ +\left(\frac{332}{225}\kappa_{10}^2+\frac{272}{225}\kappa_{20}^2+\frac{254}{225}\kappa_{10}\kappa_{20}-\frac{1}{3}\bar V_{10}+\right. \\ \left.+2\bar\varphi_{12}-\frac{1405}{10\,206}\bar b_4^2+\frac{1445}{3402}\bar b_4\tilde V_2^2-\frac{3364}{35\,721}\tilde V_2^4\right)\times \\ \times\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}+\left(-\frac{92}{135}\bar b_4+\frac{733}{3780}\tilde V_2^2\right)\frac{\bar N_{0,2}^2}{b_0^2}+ \\ +\frac{32\,506}{178\,605}\bar b_4\tilde V_2^4-\frac{115}{23\,814}\tilde V_2^6. \tag{55}$$

Функция $\bar\beta_{6,22}/b_0^2$ определена выражением

$$\frac{4}{9}\frac{\bar\beta_{6,22}}{b_0^2}=-\frac{2}{9}\frac{1}{b_0^2}\left(a_0k_{20}\frac{a_{0,2}}{b_0}\right)_{,22}-\frac{15}{64}\frac{1}{b_0^2}\left(a_0k_{20}\bar N_0^3\right)_{,22}- \\ -\frac{3}{10}\frac{1}{b_0^2}\left(\bar a_2a_0k_{20}\bar N_0\right)_{,22}- \\ -\frac{1}{b_0}\left(\frac{11}{40}k_{20}\bar N_0\frac{a_{2,2}}{b_0}-\frac{263}{360}\bar b_4k_{20}\bar N_0^2+\right. \\ \left.+\frac{1}{6}k_{20}^2\bar N_0^3+\frac{29}{72}k_{20}\bar N_0^2\tilde V_2^2\right)_{,2}+\frac{16}{9}\left(2\bar b_6-\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}\right)\times$$

$$\times a_0 k_{20}\frac{a_{0,2}}{b_0}-\frac{271}{1440}\frac{\bar{N}_0^2}{b_0^2}a_0\bar{N}_0 k_{20}=$$
$$=8\bar{b}_6^2+\frac{8}{27}\bar{b}_3^2\bar{b}_6-\frac{32}{81}\bar{b}_6\tilde{V}_2^2+\frac{476\,977}{7\,348\,320}\tilde{V}_2^6. \qquad (56)$$

Функции $a_{k,22}$ из (43) при получении асимптотики для уравнения второго приближения (9) относительно $h_{2,22}$ и расчете четвертой производной плотности тока эмиссии (уравнения (51), (53)–(56)) выражаются через коэффициенты $\bar{\varphi}_k$, $\bar{b}_k$, связь между которыми устанавливает справедливое на оси z уравнение (6). Поскольку это уравнение имеет различный вид для плоских и осесимметричных течений, два варианта потоков приходится рассматривать раздельно.

Сопоставление уравнений для $\bar{a}_{1,22}$, $\bar{a}_{2,22}$ из (43), (51) позволяет вычислить значения функций $\bar{b}_7$, $\bar{b}_8$, в то время как определение прочих $\bar{b}_k$ – отдельная задача:

$$\bar{b}_7=-\frac{1}{7}\bar{b}_3\bar{b}_4+\left(\frac{23}{630}\kappa_{10}-\frac{1}{90}\kappa_{20}\right)\tilde{V}_2^2,$$
$$\bar{b}_8=-\frac{1}{10}\bar{b}_4^2-\frac{2}{7}\bar{b}_4\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}+\frac{3}{112}\left(k_{20}\bar{N}_0^2\right)_{,2}- \qquad (57)$$
$$-\frac{27}{560}\frac{\bar{N}_{0,2}^2}{b_0^2}+\frac{3}{112}\left(k_{20}\bar{N}_0^2\right)_{,2}.$$

5. СВЯЗЬ ФУНКЦИЙ $\bar{\varphi}_k$ И $\bar{b}_k$ НА ОСИ ПУЧКА

Плоские потоки. Предварим рассмотрение балансов в уравнении (6) специализацией уже полученных результатов:

$$\bar{b}_4=-\frac{1}{6}\tilde{V}_2^2,\quad \frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}=\frac{2}{9}\tilde{V}_2^2,\quad \bar{b}_7=\frac{4}{315}\kappa_{10}\tilde{V}_2^2,$$
$$\bar{b}_8=\frac{101}{7560}\tilde{V}_2^4,\quad \bar{\varphi}_8=\frac{13}{252}\tilde{V}_2^2,\quad \bar{V}_6=-\frac{22}{63}\tilde{V}_2^2,$$
$$\frac{a_{1,22}}{b_0^2}=-\frac{46}{405}\kappa_{10}\tilde{V}_2^2,\quad \frac{a_{2,22}}{b_0^2}=-\frac{122}{1701}\tilde{V}_2^4;$$

$$\frac{\bar{b}_{4,22}}{b_0^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{9}{7}\frac{\bar{a}_{4,22}}{b_0^2}-\frac{145}{378}\bar{b}_6\tilde{V}_2^2+\frac{17}{162}\kappa_{10}\tilde{V}_2^2\right),$$
$$\frac{\bar{b}_{5,22}}{b_0^2}=\frac{28}{11}\left[\frac{5}{4}\frac{\bar{a}_{5,22}}{b_0^2}+\frac{1409}{2100}\kappa_{10}\frac{a_{2,22}}{b_0^2}-\right.$$
$$-\frac{83}{504}\frac{a_{1,22}}{b_0^2}\tilde{V}_2^2+\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\times \qquad (58)$$
$$\left.\times\left(\frac{449}{700}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}-\frac{127}{5670}\kappa_{10}\tilde{V}_2^2+\frac{11}{6}\bar{\varphi}_{11}-\frac{1}{3}\bar{V}_9-\bar{b}_7\right)\right],$$

$$\frac{\bar{b}_{6,22}}{b_0^2}=\frac{9}{4}\left[\frac{11}{9}\frac{\bar{a}_{6,22}}{b_0^2}+\frac{17}{9}\bar{b}_3\bar{b}_9-\frac{2839}{450}\bar{b}_3^2\bar{b}_6-\frac{2}{9}\bar{b}_6^2+\right.$$
$$+\frac{3487}{11340}\frac{\bar{N}_{0,2}^2}{b_0^2}\tilde{V}_2^2+\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\left(-\frac{8}{9}\bar{b}_6+\frac{332}{225}\bar{b}_3^2+\right.$$
$$+2\bar{\varphi}_{12}-\frac{1}{3}\bar{V}_{10}-\frac{1405}{10206}\bar{b}_4^2+\frac{1445}{3402}\bar{b}_4\tilde{V}_2^2-$$
$$\left.\left.-\frac{3364}{35721}\tilde{V}_2^4\right)-\frac{769}{21870}\tilde{V}_2^6\right].$$

Выпишем балансы уравнения (6), начиная с членов порядка $x^{4/3}$:

$$\bar{\varphi}_{10}=-\frac{8}{9}\bar{b}_6+\frac{83}{225}\bar{b}_3^2,\quad \bar{\varphi}_{11}=-\frac{44}{45}\bar{b}_7-$$
$$-\frac{584}{675}\bar{b}_4T_0+\frac{152}{315}T_0\tilde{V}_2^2,$$
$$\bar{\varphi}_{12}=-\frac{58}{55}\bar{b}_8+\frac{321}{21560}\tilde{V}_2^4,$$
$$\bar{\varphi}_{13}=\frac{37}{33}\left(-\bar{b}_9-\frac{413}{370}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{10}+\frac{39\,911}{249\,750}\bar{b}_3^3\right), \qquad (59)$$
$$\bar{\varphi}_{14}=\frac{9}{78}\left(-\frac{92}{9}\bar{b}_{10}-\frac{224}{45}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{11}+\right.$$
$$\left.+\frac{23}{56}\bar{\varphi}_{10}\bar{V}_2^2-\frac{1381}{56\,700}\bar{b}_3^2\bar{V}_2^2\right),$$
$$\bar{\varphi}_{15}=\frac{9}{91}\left(-\frac{112}{9}\bar{b}_{11}-\frac{364}{45}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{12}+\right.$$
$$\left.+\frac{244}{189}\bar{\varphi}_{11}\bar{V}_2^2+\frac{5078}{178\,605}\bar{b}_3\tilde{V}_2^4\right);$$
$$\bar{b}_{12}=-\frac{1}{134}\left[105\bar{\varphi}_{16}+\frac{853}{10}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{13}-\right.$$
$$-\left(11\bar{\varphi}_{12}+\frac{89}{21}\bar{V}_{10}\right)\bar{V}_2^2-\frac{3}{4}\bar{\varphi}_{10}^2+$$
$$+\left(83\bar{b}_6+\frac{8}{25}\bar{b}_3^2\right)\bar{\varphi}_{10}-\frac{145}{63}\bar{\varphi}_8\tilde{V}_2^4+2\bar{V}_6^3+$$
$$+\left(-\frac{331}{63}\bar{b}_8+\frac{8035}{7938}\bar{b}_4\tilde{V}_2^2-\frac{5}{2}\bar{V}_6^2-\frac{9}{4}\bar{V}_6\tilde{V}_2^2-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{31}{4}\tilde{V}_2^4\right)\bar{V}_2^2-\frac{796}{15}\bar{b}_3\bar{b}_9-\frac{5632}{354\,375}\bar{b}_3^4\right].$$

Осесимметричные потоки. Формулы для параметров осесимметричного течения, аналогичные (58), имеют вид[2]

$$\bar{b}_4=-\frac{1}{12}\tilde{V}_2^2,\quad \frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}=\frac{1}{9}\tilde{V}_2^2,\quad \bar{b}_7=\frac{17}{1260}\kappa_{10}\tilde{V}_2^2,$$
$$\bar{b}_8=\frac{151}{30\,240}\tilde{V}_2^4,\quad \bar{\varphi}_8=\frac{13}{252}\tilde{V}_2^2,\quad \bar{V}_6=-\frac{22}{63}\tilde{V}_2^2,$$
$$\frac{a_{1,22}}{b_0^2}=\frac{32}{405}\kappa_{10}\tilde{V}_2^2,\quad \frac{a_{2,22}}{b_0^2}=-\frac{43}{1701}\tilde{V}_2^4,$$

[2] Исключение $\bar{a}_{k,22}$ из выражений для $\bar{b}_{k,22}$ по сравнению с формулами для плоских потоков обеспечивает более компактную форму записи.

$$
\begin{gathered}
\frac{\bar{b}_{4,22}}{b_0^2} = -15\bar{b}_{10} + \frac{323\,382}{16\,065}\bar{b}_3\bar{b}_7 + \frac{85}{21}\bar{b}_4\bar{b}_6, \\
\frac{\bar{b}_{5,22}}{b_0^2} = \frac{28}{11}\left[-\frac{110}{9}\bar{b}_{11} - \frac{50}{9}\bar{b}_3\bar{b}_8 - \frac{40}{9}\bar{b}_4\bar{b}_7 - \right. \\
- \frac{3313}{2100}\bar{b}_3\frac{a_{2,22}}{b_0^2} - \frac{65}{126}\frac{\bar{a}_{1,22}}{b_0^2}\tilde{V}_2^2 - \frac{917}{700}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0} + \\
\left. + \frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\left(-\frac{5963}{11\,340}\bar{b}_3 + \frac{11}{6}\bar{\varphi}_{11} - \frac{1}{3}\bar{V}_9 - \bar{b}_7\right)\right],
\end{gathered}
\tag{60}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\bar{b}_{6,22}}{b_0^2} = \frac{9}{4}\left[-\frac{132}{9}\bar{b}_{12} - \frac{109}{45}\bar{b}_3\bar{b}_9 - \frac{484}{81}\bar{b}_4\bar{b}_8 + \right. \\
+ \frac{16}{3}\bar{b}_6^2 - \frac{2659}{270}\bar{b}_3^2\bar{b}_6 + \frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\left(-\frac{40}{9}\bar{b}_6 + \frac{289}{75}\bar{b}_3^2 + \right. \\
\left. + 2\bar{\varphi}_{12} - \frac{1}{3}\bar{V}_{10} - \frac{1405}{10\,206}\bar{b}_4^2 + \frac{64\,807}{90\,720}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\tilde{V}_2^2\right) - \\
\left. - \frac{10\,714}{535\,815}\tilde{V}_2^6\right].
\end{gathered}
$$

Балансы в уравнении (6) в осесимметричном случае приводят к следующим соотношениям:

$$
\begin{gathered}
\bar{\varphi}_{10} = -\frac{16}{9}\bar{b}_6 + \frac{163}{150}\bar{b}_3^2, \\
\bar{\varphi}_{11} = -\frac{88}{45}\bar{b}_7 - \frac{43}{45}\bar{b}_4 T_0 - \frac{1319}{56\,700}T_0\tilde{V}_2^2, \\
\bar{\varphi}_{12} = -\frac{116}{55}\bar{b}_8 + \frac{5699}{582\,120}\tilde{V}_2^4, \\
\bar{\varphi}_{13} = \frac{3}{11}\left(-\frac{74}{9}\bar{b}_9 + \frac{4898}{405}\bar{b}_3\bar{b}_6 - \frac{122\,029}{30\,375}\bar{b}_3^3\right), \\
\bar{\varphi}_{14} = \frac{9}{39}\left(-\frac{92}{9}\bar{b}_{10} - \frac{219}{90}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{11} + \right. \\
\left. + \frac{8259}{24\,192}\bar{\varphi}_{10}\bar{V}_2^2 - \frac{244\,501}{725\,760}\bar{b}_3^2\tilde{V}_2^2\right), \\
\bar{\varphi}_{15} = \frac{18}{91}\left(-\frac{112}{9}\bar{b}_{11} - 5\bar{b}_3\bar{\varphi}_{12} + \frac{1}{3}\bar{\varphi}_{11}\bar{V}_2^2 - \right. \\
\left. - \frac{1\,369\,973}{5\,000\,940}\bar{b}_3\tilde{V}_2^4\right); \quad \bar{b}_{12} = -\frac{1}{134}\left[\frac{105}{2}\bar{\varphi}_{16} + \right. \\
+ \frac{99}{5}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{13} - \left(\frac{13}{4}\bar{\varphi}_{12} + \frac{41}{21}\bar{V}_{10}\right)\tilde{V}_2^2 - \frac{3}{8}\bar{\varphi}_{10}^2 + \\
+ \left(\frac{1075}{16}\bar{b}_6 - \frac{52}{75}\bar{b}_3^2\right)\bar{\varphi}_{10} - \frac{76}{567}\bar{\varphi}_8\tilde{V}_2^4 + \frac{1}{9}\bar{V}_6^3 + \\
+ \left(\frac{17}{9}\bar{b}_8 + \frac{3}{4}\bar{b}_4\tilde{V}_2^2 - \frac{5}{27}\bar{V}_6^2 - \frac{37}{216}\bar{V}_6\tilde{V}_2^2 + \frac{565}{31104}\tilde{V}_2^4\right)\times \\
\left. \times\tilde{V}_2^2 - \frac{1502}{15}\bar{b}_3\bar{b}_9 + \frac{7424}{50\,625}\bar{b}_3^4\right].
\end{gathered}
\tag{61}
$$

Антипараксиальные разложения, определяющие асимптотику решения вблизи сингулярной стартовой поверхности при эмиссии в ρ-режиме, обладают тем свойством, что коэффициенты разложения потенциала φ_{4+3k} могут быть заданы произвольно, в то время как коэффициенты с промежуточными значениями индексов жестко определены (регламентированы) значениями компонент магнитного поля на катоде и коэффициентами φ_{4+3k}. Впервые этот факт был отмечен в работе [11]. В применении к рассматриваемой задаче величины φ_{4+3k}, $k \geq 0$ задают плотность тока эмиссии J, кривизну катода κ_{10}, вторую производную $J_{,22}$, вторую производную кривизны $\kappa_{10,22}$, четвертую производную $J_{,2222}$ и т.д., полностью определяя тем самым физические и геометрические параметры пучка.

Связь пар $\bar{b}_4$, $\bar{\varphi}_8$; $\bar{b}_5$, $\bar{\varphi}_9$; $\bar{b}_7$, $\bar{\varphi}_{11}$; $\bar{b}_8$, $\bar{\varphi}_{12}$ позволяет рассчитать коэффициенты разложения потенциала при известных значениях $\bar{b}_k$, которые удалось установить на основе регуляризации решения. Соответствующие коэффициенты разложения скорости $\bar{V}_k$ следуют из интеграла энергии (48). Однако выполненная регуляризация не дает возможности указать значения коэффициентов $b_k \neq b_{3l}$ начиная с $k = 10$.

6. РЕГЛАМЕНТИРОВАННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ b_k, $k > 10$

Необходимые в рамках рассматриваемой модели коэффициенты b_{10}, b_{11} связаны со значениями φ_{14}, φ_{15}; V_{12}, V_{13}. Эволюционное уравнение на оси z

$$
k_{1,2} = h_{2,11} \tag{62}
$$

из (8) позволяет выразить величины $\bar{b}_k$ через производные траекторных коэффициентов f_k в формуле (21):

$$
\bar{b}_k = \frac{1}{b_0}f_{k,2}. \tag{63}
$$

Наиболее простой способ вычисления функций f_k – построение антипараксиальных разложений в ортогональной системе s, l, ψ (нормаль, длина дуги вдоль катода, азимут), связанной со стартовой поверхностью $s = 0$ и имеющей следующие коэффициенты Ляме:

$$
h_1 = 1, \quad h_2 = 1 - \kappa_{10}s, \quad h_3 = R = R_0\left(1 - \kappa_{20}s\right). \tag{64}
$$

Поверхность катода зададим параметрически

$$
R = R_0(l), \quad z = Z_0(l). \tag{65}
$$

Уравнения пучка в рассматриваемом случае определены соотношениями

$$\begin{gathered}(h_2 p_l)_{,s} - p_{s,l} + h_2 H_\psi = 0,\quad p_l^2 + p_s^2 = (1+\varphi)^2 - 1,\\ (h_2h_3\varphi_{,s})_{,s} + \left(\frac{h_3}{h_2}\varphi_{,l}\right)_{,l} = h_2h_3(1+\tilde\varphi)\sigma,\\ \sigma = \frac{\rho}{1+\varphi},\quad (h_2h_3\sigma p_s)_{,s} + (h_2\sigma p_l)_{,l} = 0,\\ -(h_3H_\psi)_{,s} = h_3\sigma p_l,\quad \vec p = (1+\varphi)\vec v.\end{gathered}\tag{66}$$

Здесь $\vec p$ — импульс, σ — скалярная плотность заряда. Структура решения соответствует эмиссии в ρ-режиме:

$$\begin{gathered}p_s = U_2 s^{2/3}\left(1 + \bar U_4 s^{2/3} + \bar U_5 s + \ldots\right),\\ p_l = U_2 s\left(\bar V_3 + \bar V_4 s^{1/3} + \bar V_5 s^{2/3} + \ldots\right),\\ \varphi = \varphi_4 s^{4/3}\left(1 + \bar\varphi_6 s^{2/3} + \bar\varphi_7 s + \ldots\right),\\ \sigma = s^{-2/3}\left(\sigma_{-2} + \sigma_0 s^{2/3} + \sigma_1 s + \ldots\right).\end{gathered}\tag{67}$$

Дифференциальное уравнение траектории имеет вид

$$\frac{dl}{ds} = \frac{p_l}{(1-\kappa_1 s)\,p_s} = \alpha_1 s^{1/3} + \alpha_3 s + \ldots + \alpha_8 s^{8/3}.\tag{68}$$

Для решения поставленной задачи необходимо вычислить коэффициенты разложения компонент импульса вплоть до $\bar V_{10}$ и $\bar U_9$. Функции $\bar V_3(l), \bar V_5(l), \bar V_6(l), \bar U_4(l), \bar U_5(l)$ необходимо разложить в окрестности точки старта $l = l_0$, сохраняя приведенные ниже члены:

$$\begin{gathered}\bar V_3(l) = \bar V_3(l_0) + \bar V_3'(l_0)\bar l = \bar V_3(l_0) +\\ + \bar V_3'(l_0)\left(l_4 s^{4/3} + l_6 s^2 + l_7 s^{7/3}\right),\\ \bar V_5(l) = \bar V_5(l_0) + \bar V_5'(l_0) l_4 s^{4/3},\\ \bar V_6(l) = \bar V_6(l_0) + \bar V_6'(l_0) l_4 s^{4/3},\\ \bar U_4(l) = \bar U_4(l_0) + \bar U_4'(l_0) l_4 s^{4/3},\\ \bar U_5(l) = \bar U_5(l_0) + \bar U_5'(l_0) l_4 s^{4/3},\\ \bar l = l - l_0 = l_4 s^{4/3} + l_6 s^2 + l_7 s^{7/3} + \ldots\end{gathered}\tag{69}$$

Коэффициенты в правой части уравнения (68) с учетом разложений (69) вычисляются в точке $l = l_0$ и следующим образом связаны с коэффициентами из (67):

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \bar V_3,\quad \alpha_3 = \bar V_5 - \bar U_4\bar V_3,\quad \alpha_4 = \bar V_6 - \bar U_5\bar V_3 + \kappa_{10}\alpha_1,\\ \alpha_5 = \bar V_7 - \bar U_4\bar V_5 + \left(-\bar U_6 + \bar U_4^2\right)\bar V_3 + \bar V_3' l_4,\\ \alpha_6 = \bar V_8 - \bar U_4\bar V_6 - \bar U_5\bar V_5 + \left(-\bar U_7 + 2\bar U_4\bar U_5\right)\bar V_3 + \kappa_{10}\alpha_3,\\ \alpha_7 = \bar V_9 - \bar U_4\bar V_7 - \bar U_5\bar V_6 + \left(-\bar U_6 + \bar U_4^2\right)\bar V_5 +\\ + \left(-\bar U_8 + 2\bar U_4\bar U_6 + \bar U_5^2 - \bar U_4^3\right)\bar V_3 + \kappa_{10}\alpha_4 + \kappa_{10}^2\alpha_1 +\\ + \bar V_3' l_6 + \left(\bar V_5' - \bar U_4\bar V_3' - V_3\bar U_4'\right) l_4,\\ \alpha_8 = \bar V_{10} - \bar U_4\bar V_8 - \bar U_5\bar V_7 +\\ + \left(-\bar U_6 + \bar U_4^2\right)\bar V_6 + \left(-\bar U_7 + 2\bar U_4\bar U_5\right)\bar V_5 +\\ + \left(-\bar U_9 + 2\bar U_4\bar U_7 + 2\bar U_5\bar U_6 - 3\bar U_4^2\bar U_5\right)\bar V_3 + \kappa_{10}\alpha_5 +\\ + \bar V_3' l_7 + \left(\bar V_6' - V_3\bar U_5'\right) l_4.\end{gathered}\tag{70}$$

Коэффициенты разложения компонент импульса в результате построения локального решения системы (66) определены формулами

$$\begin{gathered}U_2 = \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3},\quad \bar U_4 = -\frac{9}{20}\bar N_0^2,\quad \bar U_5 = \frac{4}{15}T_0,\\ \bar U_6 = \frac{3}{14}\bar N_0\bar J_{,2} - \frac{243}{2800}\bar N_0^4 + \frac{19}{126}\tilde U_2^2,\\ \bar U_7 = -\frac{12}{35}T_0\bar N_0^2,\\ \bar U_8 = \frac{67}{450}T_0^2 - \frac{2}{9}\kappa_{10}\kappa_{20} - \frac{2}{45}\left(\bar J_{,22} - k_{20}\bar J_{,2}\right) - \frac{1}{180}\bar J_{,2}'^2 +\\ + \frac{61}{1680}\bar N_0^3\bar J_{,2} - \frac{29}{80}\bar N_0^2\bar N_{0,2} - \frac{1863}{56\,000}\bar N_0^6 + \frac{71}{2520}\bar N_0^2\tilde U_2^2,\\ \bar U_9 = \frac{1}{20}\left[\bar N_0\left(\frac{46}{21}\kappa_{10,2} + 2\kappa_{20,2}\right) +\right.\\ + \left(\frac{1069}{135}\kappa_{10} + \frac{1837}{945}\kappa_{20}\right)\bar N_0\bar J_{,2} -\\ \left. - \frac{24\,839}{10\,500}T_0\bar N_0^4 + \left(\frac{78\,608}{15\,309}\kappa_{10} + \frac{79\,256}{15\,309}\kappa_{20}\right)\tilde U_2^2\right];\\ \bar V_3 = -\bar N_0,\quad \bar V_5 = \frac{1}{5}\bar J_{,2},\quad \bar V_6 = -\frac{1}{2}T_0\bar N_0,\\ \bar V_7 = -\frac{9}{140}\bar N_0^2\bar J_{,2} - \frac{27}{70}\bar N_0\bar N_{0,2} - \frac{1}{14}\bar N_0\tilde U_2^2,\\ \bar V_8 = \frac{1}{10}T_{0,2} + \left(\frac{7}{30}\kappa_{10} + \frac{1}{30}\kappa_{20}\right)\bar J_{,2},\\ \bar V_9 = \left(-\frac{1}{2}\kappa_{10}^2 - \frac{1}{3}\kappa_{20}^2 - \frac{1}{6}\kappa_{10}\kappa_{20} + \frac{1}{14}\bar J_{,22} -\right.\\ \left. - \frac{1}{21}\bar J_{,2}^2 - \frac{27}{2800}\bar N_0^3\bar J_{,2}\right)\bar N_0 +\\ + \left(\frac{1}{14}\bar J_{,2} - \frac{81}{700}\bar N_0^3\right)\bar N_{0,2} + \left(\frac{109}{1890}\bar J_{,2} + \frac{1}{30}\bar N_0^3\right)\tilde U_2^2,\\ \bar V_{10} = -\frac{3}{10}\left[\frac{12}{35}\bar N_0^2 T_{0,2} + \left(\frac{23}{70}\kappa_{10} + \frac{4}{35}\kappa_{20}\right)\bar N_0^2\bar J_{,2} +\right.\\ + \left(\frac{69}{35}\kappa_{10} + \frac{24}{35}\kappa_{20}\right)\bar N_0\bar N_{0,2} +\\ \left. + \left(\frac{319}{630}\kappa_{10} + \frac{1}{6}\kappa_{20}\right)\bar N_0\tilde U_2^2\right].\end{gathered}\tag{71}$$

В результате интегрирования уравнения (68) с правой частью (70) трубка тока в криволинейной системе s, l описывается выражением

$$\bar{l} = l - l_0 = \frac{3}{4}\alpha_1 s^{4/3} + \frac{1}{2}\alpha_3 s^2 + \frac{3}{7}\alpha_4 s^{7/3} + \ldots. \quad (72)$$

Воспользуемся связью [1, 2] произвольных ортогональных координат с локальными декартовыми координатами X, Y, которая для системы s, l принимает вид

$$\begin{gathered} s = X - \frac{1}{2}\kappa_1 Y^2 - \frac{1}{6}\kappa_1' Y^3, \\ \bar{l} = Y + \kappa_1 XY + A_2 Y^3 + B_2 XY^2 + \kappa_1^2 X^2 Y. \end{gathered} \quad (73)$$

Непоясняемые в (73) коэффициенты A_2, B_2 не являются существенными в рассматриваемом случае. Перейдем при помощи формул (73) к координатам X, Y:

$$\begin{gathered} Y = f_4 X^{4/3} + f_6 X^2 + f_7 X^{7/3} + \ldots \\ f_4 = \frac{3}{4}\alpha_1, \quad f_6 = \frac{1}{2}\alpha_3, \quad f_7 = \frac{3}{7}\alpha_4 - \kappa_1 f_4, \\ f_8 = \frac{3}{8}\alpha_5, \quad f_9 = \frac{1}{3}\alpha_6 - \kappa_1 f_6 - \frac{1}{2}\alpha_1\kappa_1 f_4^2, \\ f_{10} = \frac{3}{10}\alpha_7 - \kappa_1 f_7 - \kappa_1^2 f_4, \\ f_{11} = \frac{3}{11}\alpha_8 - \kappa_1 f_8 - B_2 f_4^2 - \alpha_1\kappa_1 f_4 f_6 - \frac{1}{2}\alpha_3\kappa_1 f_4^2. \end{gathered} \quad (74)$$

Отметим, что в формуле (63) при вычислении функций $\bar{b}_k$ использовались траекторные коэффициенты из (21) для функции $Y = Y(l)$, а не для представления $Y = Y(X)$. Длина дуги l для кривой (74) определена формулой

$$l = \int \sqrt{1 + Y'^2}\, dX, \quad (75)$$

которую после интегрирования можно обратить, чтобы выразить X через l. При этом различие величин X, l описывается членами с нелинейными комбинациями коэффициентов f_k, которые при дифференцировании по x^2 и переходе к оси z, где все $f_k = 0$, дадут нулевой вклад. По этой причине при вычислении функций $\bar{b}_k$ можно дифференцировать траекторные коэффициенты (74). В результате получим

$$\begin{gathered} \bar{b}_4 = -\frac{3}{4}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}, \quad \bar{b}_6 = \frac{1}{10}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2}, \\ \bar{b}_7 = \left(\frac{31}{140}\kappa_{10} - \frac{1}{10}\kappa_{20}\right)\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}, \\ \bar{b}_8 = \frac{153}{1120}\frac{\bar{N}_{0,2}^2}{b_0^2} + \frac{5}{168}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\tilde{V}_2^2, \\ \bar{b}_9 = \frac{1}{30}T_{0,22} - \kappa_{10}\bar{b}_6 + \left(\frac{19}{150}\kappa_{10} - \frac{1}{150}\kappa_{20}\right)\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2}, \\ \bar{b}_{10} = \frac{3}{10}\Bigg[\left(-\frac{227}{90}\kappa_{10}^2 - \frac{23}{90}\kappa_{20}^2 - \frac{139}{45}\kappa_{10}\kappa_{20} + \right. \\ \left. + \frac{31}{315}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2} + \frac{2}{45}k_{20}\frac{\bar{J}_{,2}}{b_0}\right)\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0} + \\ + \frac{26}{945}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2}\tilde{V}_2^2\Bigg] - \kappa_{10}\bar{b}_7 - \kappa_{10}^2\bar{b}_4, \\ \bar{b}_{11} = \frac{3}{11}\Bigg[\left(-\frac{153}{175}\kappa_{10} - \frac{18}{175}\kappa_{20}\right)\frac{\bar{N}_{0,2}^2}{b_0^2} + \\ + \left(\frac{151727}{765450}\kappa_{10} + \frac{3412}{15309}\kappa_{20}\right)\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\tilde{V}_2^2\Bigg] - \kappa_{10}\bar{b}_8. \end{gathered} \quad (76)$$

Связи между функциями $\bar{b}_k$ и $\bar{\varphi}_k$ в (61) позволяют установить значения коэффициентов разложения потенциала, а соотношения (48), следующие из интеграла энергии, дают возможность вычислить соответствующие коэффициенты $\bar{V}_k$ разложения скорости. В результате получена вся необходимая информация для построения асимптотики функции $h_{2,22}$ в (9) и формулы для четвертой производной плотности тока эмиссии $J_{,2222}$ в (42).

Выражения для $\bar{b}_7$, $\bar{b}_8$ в (76) представляют собой форму записи, альтернативную по отношению к выражениям (57), полученным из соображений регуляризации решения; обе формы приводят к тождественным результатам.

В случае плоских и осесимметричных потоков величины $\bar{b}_{10}$, $\bar{b}_{11}$ принимают следующие значения:

$$\begin{gathered} \bar{b}_{10} = -\left(\frac{1}{540}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2} + \frac{67}{4725}\kappa_{10}\right)\tilde{V}_2^2, \\ \bar{b}_{11} = -\frac{598\,628}{404\,157\,600}\kappa_{10}\tilde{V}_2^4; \\ \bar{b}_{10} = \left(\frac{13}{7560}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2} - \frac{22}{175}\kappa_{10}\right)\tilde{V}_2^2, \\ \bar{b}_{11} = \frac{4\,300\,171}{404\,157\,600}\kappa_{10}\tilde{V}_2^4. \end{gathered} \quad (77)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная в работе модель плоскосимметричных и осесимметричных релятивистских потоков при отсутствии внешнего магнитного поля, сводящаяся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, позволяет синтезировать непараксиальный электронный пучок с катода заданной формы и с заданным распределением плотности тока эмиссии J. Произвольные значения плотности тока J, второй и четвертой производных $J_{,22}$, $J_{,2222}$ на оси, кривизны κ_{10} катода и второй производной $\kappa_{10,22}$ достигаются за счет коэффициентов разложения потенциала φ_4, $\bar{\varphi}_7$, $\bar{\varphi}_{10}$, $\bar{\varphi}_{13}$, $\bar{\varphi}_{16}$. Соответствующие соотношения определяют связь между функциями J, κ_1 и $\varphi(z)$.

Рассмотренные конфигурации электронных потоков наиболее часто используются в приборах СВЧ и сильноточных ускорителях. Задача о формировании подобных течений даже в случае очень узких пучков не может быть решена методами классической параксиальной теории или теории В.Т. Овчарова [12], распространенной на релятивистские скорости, из-за невозможности выполнить условия термоэмиссии на стартовой поверхности при работе с ортогональной системой координат.

По сравнению с численными моделями, в том числе коммерческими пакетами траекторного анализа, предложенный в работе подход исключает ошибки, связанные с грубым описанием сингулярной прикатодной зоны. Дополненный известными алгоритмами расчета торцевой лапласовской области [13], основанными на теории антипараксиальных разложений, он служит основой для создания теплового зазора с теоретически обоснованной конфигурацией. Произвольное его исполнение для мощных пучков и пучков с высокой компрессией, обычное при использовании пакетов траекторного анализа, должно приводить к существенным ошибкам, которые впоследствии приходится компенсировать за счет экспериментальной доводки прибора. Проблемы, связанные с формированием теплового зазора и вариантами его практической реализации, обсуждаются в работе [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сыровой В.А.* Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. *Syrovoy V.A.* Theory of Intense Beams of Charged Particles. US: Elsevier, 2011.
3. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 6. С. 614.
4. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2014. Т. 59. № 4. С. 358.
5. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 3. С. 263.
6. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 502.
7. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 82.
8. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
9. *Вашковский А.В., Неганова Л.А., Сыровой В.А.* // Прикл. физика. 1998. № 3–4. С. 33.
10. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 9. С. 1114.
11. *Алексахин Ю.И.* Препринт ОИЯИ № Р-81-619. 1984.
12. *Овчаров В.Т.* // РЭ. 1962. Т. 7. № 8. С. 1367.
13. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1106.
14. *Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А.* // Электрон. техника. СВЧ-техника. 2018. № 1. С. 32.