

## АНАЛИЗ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ И ШУМА

© 2021 г. Б. И. Шахтарин\*

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
2-я Бауманская ул., Москва, 105005 Российская Федерация*

\*E-mail: shakhtarin@mail.ru

Поступила в редакцию 27.10.2020 г.

После доработки 27.10.2020 г.

Принята к публикации 24.03.2021 г.

Рассмотрены приоритетные работы В.И. Тихонова в изучении статистических характеристик фазовой автоподстройки (ФАП), когда на ее вход воздействует помеха в форме шума. В продолжение работ В.И. Тихонова получены основные соотношения метода гармонического баланса, и в процессе их вывода отмечены стадии упрощения, по которым можно судить о степени точности полученных соотношений. В частном случае уравнения совпадают с соотношениями, полученными автором ранее. Найдены значения выходных параметров предполагаемого решения ДУ ФАП.

**DOI:** 10.31857/S0033849421080076

### ВВЕДЕНИЕ

Воздействие помех на системы синхронизации в устройствах радионавигации (ГЛОНАСС, GPS и др.), радиосвязи и радиолокации рассматривалось в ряде работ [1–16]. Среди помех особое внимание уделяется шумовым и активным помехам, к которым, в частности, относятся гармонические прицельные и перестраиваемые помехи. Особое внимание в последние годы уделяется воздействию гармонических помех на системы фазовой автоподстройки.

Определяющая роль в исследовании воздействия помех на систему фазовой автоподстройки (ФАП) принадлежит В.И. Тихонову. Основные статистические характеристики ФАП при воздействии шумовых и гармонических помех получены В.И. Тихоновым и его ближайшими учениками.

К статистическим характеристикам ФАП относятся плотность распределения вероятности (ПРВ) сигнала ошибки, его числовые характеристики в стационарном и переходящих режимах, частота вращательных движений, время достижения указанным сигналом соответствующих порогов и, в частности, среднее время до срыва слежения.

Первые исследования приведенных характеристик были начаты В.И. Тихоновым. К этим работам он активно привлекал своих учеников. В результате комплекса работ была создана теория ФАП, функционирующая под воздействием помех, что имело большое практическое значение и породило массу работ его последователей.

При содействии В.И. Тихонова начато исследование ФАП и при воздействии на нее гармонических помех [11], которое продолжилось в работах [12, 13] на основе применения метода гармонического баланса [17].

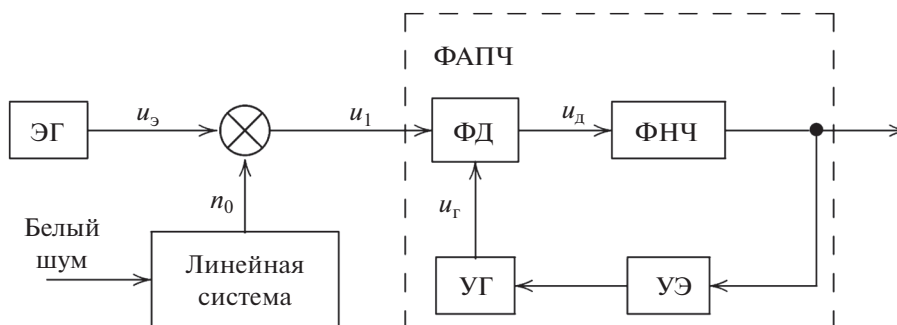
В [17, 18] методом гармонического баланса найден ряд динамических характеристик ФАП при условии, что частота гармонической помехи лежит за пределами полосы синхронизации ФАП, причем в [17] это сделано при условии малой амплитуды биений.

### 1. РАБОТЫ В.И. ТИХОНОВА И ЕГО БЛИЖАЙШИХ УЧЕНИКОВ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЗДЕЙСТВИЯ ШУМОВ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОМЕХ НА СИСТЕМУ ФАП

Рассмотрим подробно вывод основного соотношения метода гармонического баланса, из которого видна степень приближения полученного результата и, следовательно, возможность оценки его точности. В работе [1, с. 1192] была получена ставшая общеизвестной формула Тихонова

$$W(x) = \frac{1}{2\pi I_0(r)} \exp(r \cos x), \quad |x| \leq \pi, \quad (1)$$

где  $W(x)$  – ПРВ сигнала рассогласования ФАП,  $r$  – отношение сигнал/шум (ОСШ),  $I_0(r)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.



**Рис. 1.** Структурная схема ФАП (по В.И. Тихонову): ЭГ – эталонный генератор, ФД – фазовый детектор (дискриминатор), ФНЧ – фильтр низкой частоты, УЭ – управляющий элемент, УГ – управляемый генератор, сигналы  $u_э$  – эталонный,  $u_г$  – от генератора,  $u_д$  – от дискриминатора,  $u_1$  – на входе ФАП.

Формула Тихонова (1) соответствует нулевой начальной расстройке  $D_0$  по частоте сигналов, подаваемых на фазовый дискриминатор (рис. 1).

Там же [1] представлена ПРВ  $W(x)$  в интегральной форме для случая  $D_0 \neq 0$  [1, ф-ла (21)] с нормирующим множителем  $N$ , в который входит квадрат модуля модифицированной функции Бесселя с мнимым индексом  $|I_{iv}(r)|^2, (v = D_0)$ . В этом случае при вычислениях ПРВ  $W(x)$  требовалось использовать известные таблицы Моргана.

В работе [3, ф-ла (9)] интегральная формула Тихонова была преобразована в быстроходящийся ряд по модифицированным функциям Бесселя с целочисленным индексом и исследова-

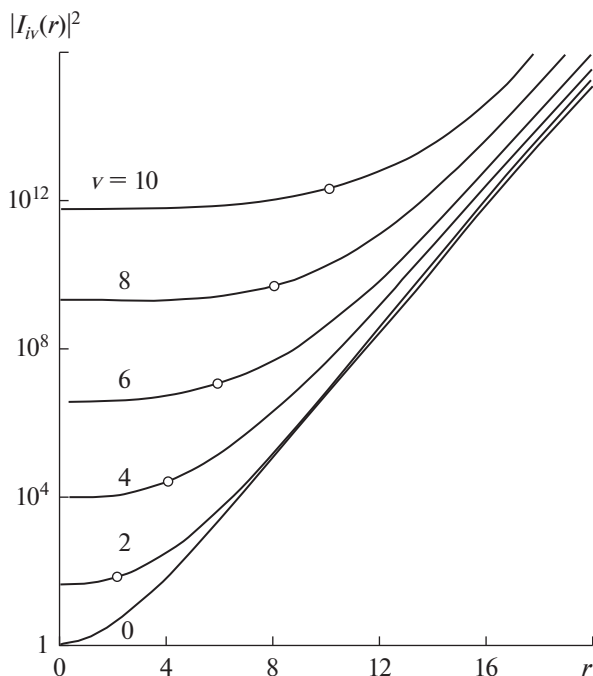
на сходимость полученного ряда. Величина  $|I_{iv}(r)|^2$  была представлена (рис. 2) [1, рис. 2.2; 4, ф-ла (XIX)] в форме ряда

$$|I_{iv}(r)|^2 = \frac{\text{sh}(\pi v)}{\pi v} \left[ I_0^2(r) + 2v^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n(r)}{n^2 + v^2} \right], \quad (2)$$

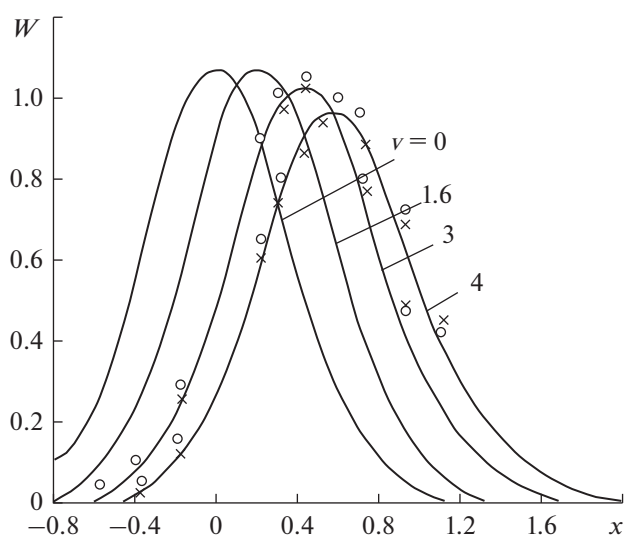
что исключало обращение к неудобным таблицам Моргана.

Впервые результаты расчета ПРВ  $W(x)$  (при  $D_0 \neq 0$ ) опубликованы в работе [5].

С учетом оценки сходимости ряда для ПРВ  $W(x)$  [3] при точности  $\epsilon = 10^{-4}$  получено, что число слагаемых отрезка ряда равно  $N = 4, 7, 10, 15, 22, 26$  при ОСШ  $r = 1, 2.7, 4.5, 7.4, 12.2, 17$ . На рис. 3 приведены ПРВ  $W(x)$  при  $r = 7.4$  и различных значениях  $v = D_0$  [3].



**Рис. 2.** Зависимость квадрата модуля модифицированной функции Бесселя от аргумента и чисто мнимого порядка  $iv$ .



**Рис. 3.** Плотность распределения вероятностей фазовой ошибки при отношении сигнал/шум  $r = 7.4$  и различных значениях частотной расстройки, приближенные значения ПРВ отмечены крестиками и кружками.

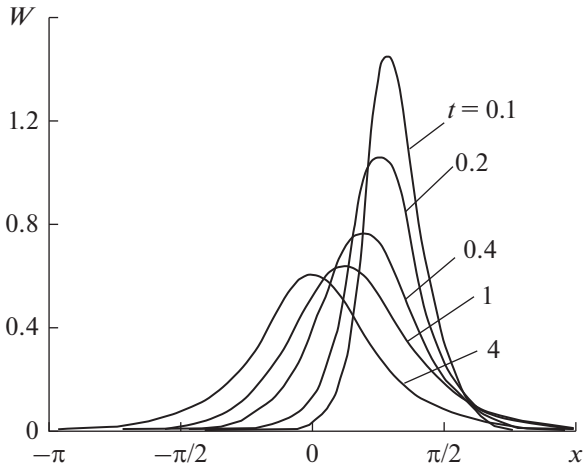


Рис. 4. Плотность распределения вероятностей фазовой ошибки  $W(x, t)$  в переходном режиме при  $r = 2.5$  и нулевой расстройке по частоте.

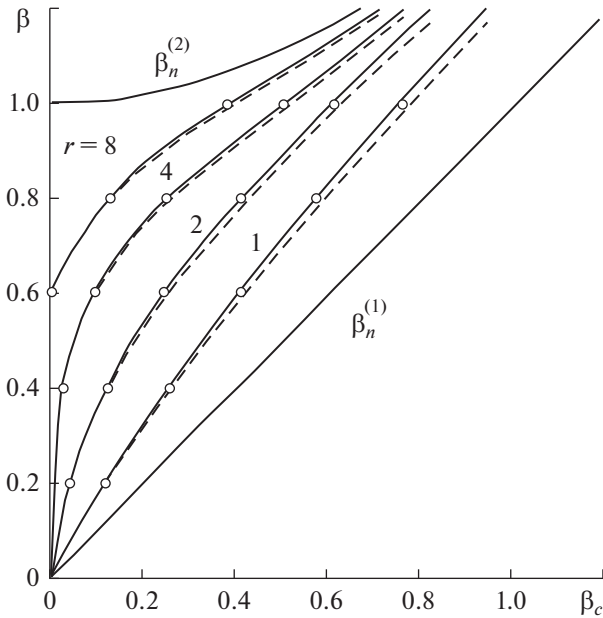


Рис. 5. Характеристика вращательных движений ФАП (сплошные кривые), где  $\beta = v/r$ ,  $\beta_c$  – нормированная частота вращательных движений; асимптотика  $\beta_c$  для систем ФАП второго порядка (штриховые).

На основе ПРВ  $W(x)$  в форме рядов получены формулы для начальных моментов  $m_{1x}$  и  $m_{2x}$  сигнала рассогласования ФАП [4], а также формула дисперсии (при  $v = 0$ ) [7]:

$$\sigma_x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n(r)}{n^2 I_0(r)}. \quad (3)$$

Была разработана разностная схема для уравнения [1, ф-ла (13)] и найдена ПРВ  $W(x, t)$  в пере-

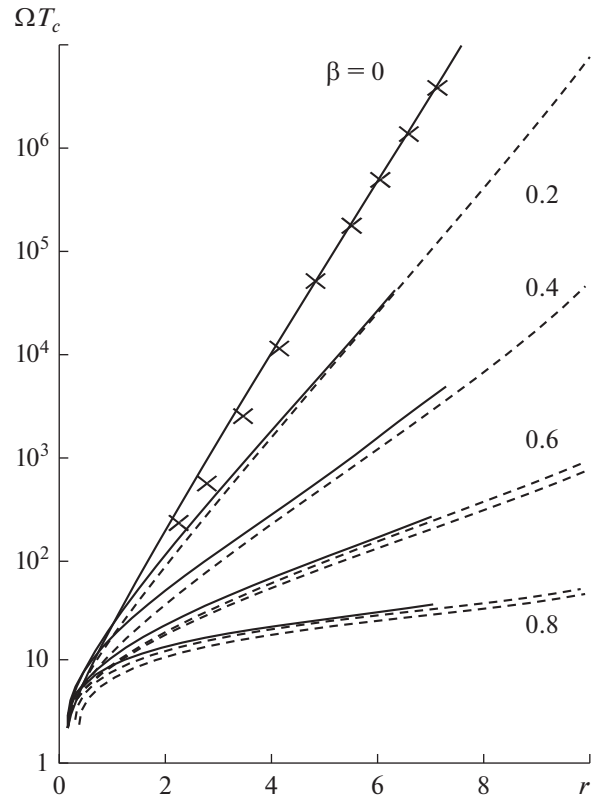


Рис. 6. Зависимости нормированного среднего значения времени до срыва слежения от параметров ФАП (сплошные кривые), расчет по асимптотическим формулам (штриховые) и нормированное средне-квадратическое значение времени до срыва слежения (крестики).

ходном режиме (рис. 4) при  $r = 2.5$ ;  $v = 0$  и  $x_0 = 1$ ;  $W_0(x) = \delta(x - x_0)$ .

Следует отметить, что в первой работе [1] В.И. Тихоновым решена и другая (в отличие от ПРВ  $W(x)$ ) проблема статистической динамики ФАП, а именно получена характеристика вращательных движений  $\beta_c$  в системе ФАП, которая после преобразований может быть представлена в виде [4]

$$\beta_c = \frac{2\pi}{r} c(v, r), \quad (4)$$

где  $c(v, r) = \text{sh}(\pi v) / 2\pi^2 |I_{iv}(r)|^2$ . Эта зависимость представлена на рис. 5, где  $\beta = v/r$ .

В работе [10], а также [5, 8] аналитически, экспериментально и посредством моделирования была детально исследована проблема срыва слежения в системе ФАП. В частности, рассмотрена задача достижения границ марковским процессом [10], найдены формулы для начальных моментов времени  $T_1$  до срыва слежения. Показано, что нормированное среднее время  $\gamma_c = \Omega T_c$  ( $\Omega$  –

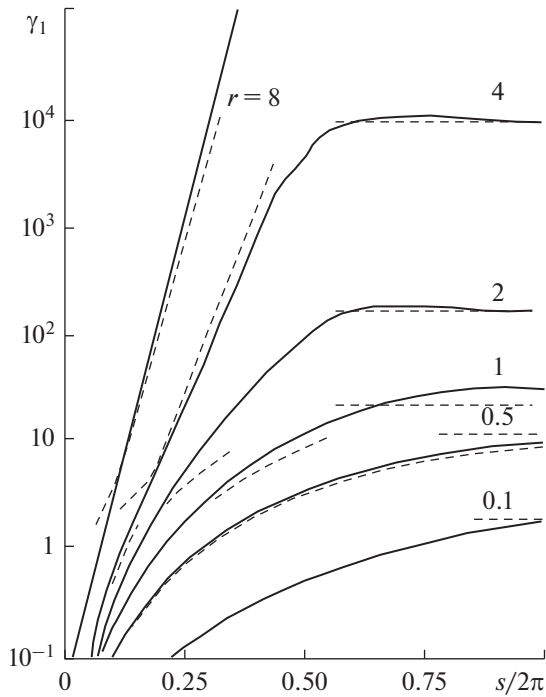


Рис. 7. Зависимость нормированного среднего значения времени достижения порога  $s$ .

полоса синхронизации ФАП,  $T_c = T_1$ ) может быть представлено в виде (рис. 6,  $\beta = v/r$ )

$$\gamma_c = rc^{-1}(v, r) \operatorname{th}(\pi v). \quad (5)$$

Получены также зависимости  $\gamma_1(s) = \Omega T_1(s)$  от порога  $s$  (рис. 7). Найдена вероятность срыва слежения (рис. 8) на основе разностной схемы уравнения Понтрягина.

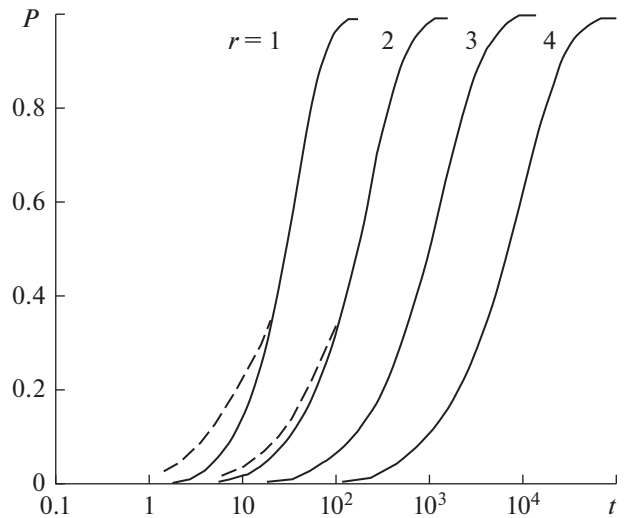


Рис. 8. Зависимость вероятности срыва слежения от времени и отношения сигнал/шум.

Экспериментально показано, что срыв слежения в системе ФАП определяется не только простым пересечением сигналом рассогласования фазовых уровней  $\pi/2$  и  $\pi$ , а также циклом вращения вокруг фазового цилиндра с последующим переходом от состояния равновесия к соседнему (рис. 9). Данные явления срыва подтверждены результатами моделирования ФАП (рис. 10).

Исследования В.И. Тихонова шумовых воздействий на ФАП продолжены его учениками. В результате наряду с шумовыми помехами рассмотрены и воздействия на ФАП и гармонических помех [11–13].

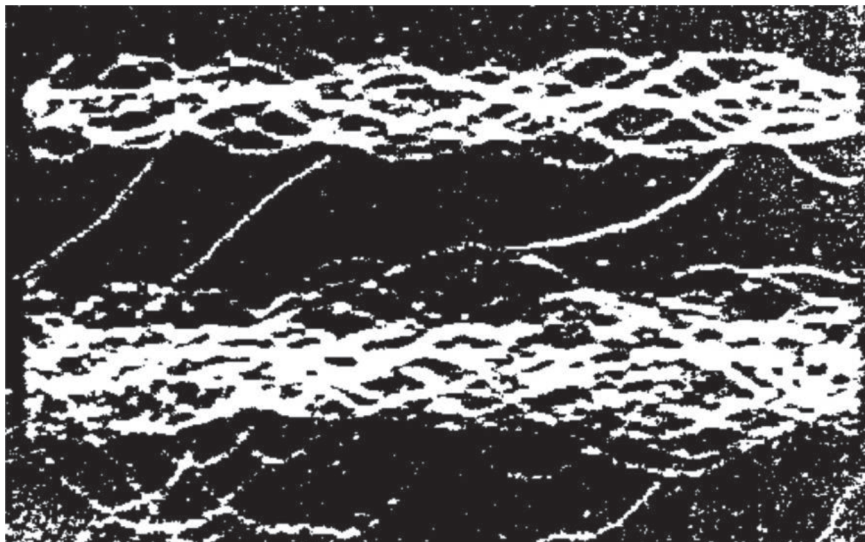


Рис. 9. Осциллограммы при физическом моделировании срыва слежения.

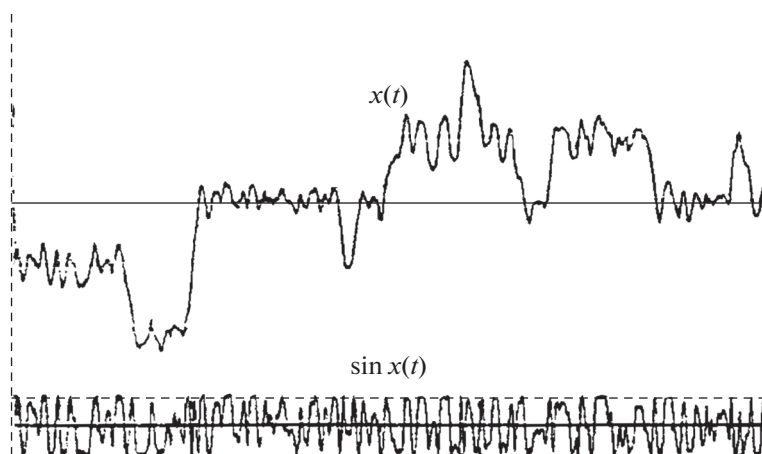


Рис. 10. Зависимости, полученные при математическом моделировании срыва слежения.

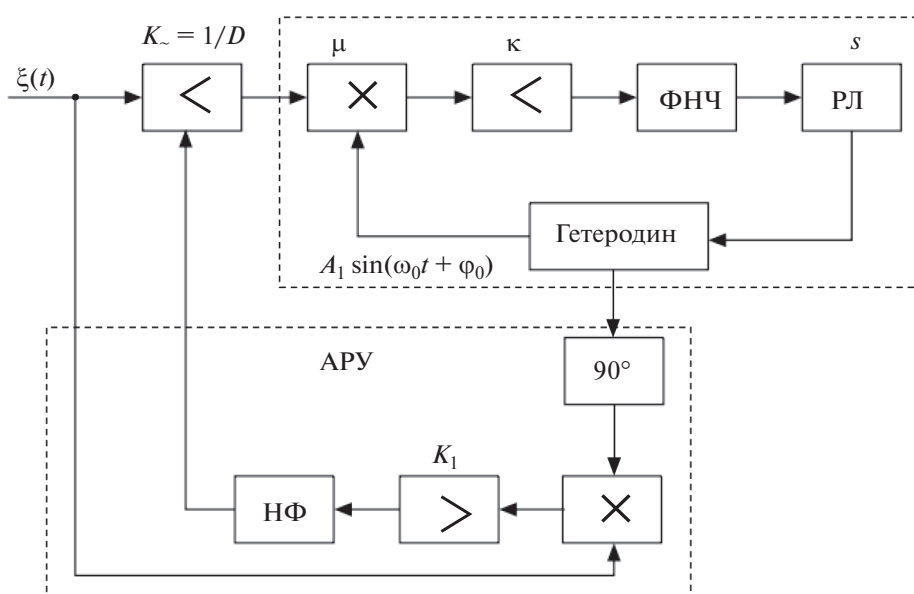


Рис. 11. Структурная схема оптимальной (по В.И. Тихонову) системы ФАП: АРУ – автоматическая регулировка усиления, НФ – нелинейный фильтр, РЛ – управляющий элемент.

Следует отметить, что наряду с анализом ФАП под воздействием помех В.И. Тихонов получил ряд результатов в области синтеза оптимальных систем ФАП [7, 14] (рис. 11).

## 2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ НА СИСТЕМУ ФАП

### 2.1. Основные соотношения метода гармонического баланса

Можно показать, что при воздействии на ФАП наряду с сигналом и гармонической помехи дифференциальное уравнение ФАП имеет вид [17]

$$px = \beta - F(p)[\sin x + \varepsilon \sin(x + dt + \Delta\theta)], \quad (6)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования;  $t = \Omega t_1$ ;  $t_1$  – время в с;  $\Omega$  – полоса синхронизации

ФАП;  $x = x(t)$  – сигнал рассогласования;  $\beta = \Omega_0/\Omega$ ;  $\Omega_0 = \omega_c - \omega_0$  – расстройка по частоте сигнала  $\omega_c$  и частотой управляемого генератора (УГ)  $\omega_0$ ;  $\varepsilon = A_n/A_c$  – отношение амплитуд помехи  $A_n$  и сигнала  $A_c$  (ОПС);  $d = \Delta\Omega/\Omega$ ;  $\Delta\Omega = \omega_n - \omega_c$  – разность частот помехи и сигнала.

Предполагаемое решение дифференциального уравнения (6) в методе гармонического баланса при учете лишь одной гармоники принимается в виде [17]

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(dt + \Delta\theta + \varphi) = x_0 + x_1 \cos\Phi. \quad (7)$$

Параметры предполагаемого решения (7) – постоянная составляющая  $x_0$ , амплитуда первой гармоники  $x_1$  и фазовый угол  $\Phi$  – найдены в процессе гармонического баланса подстановкой (7) в

левую и правую части дифференциального уравнения (6).

В работе [17] эти параметры были нами найдены при условии малого значения амплитуды  $x_1$  и при условии  $d > 1$ , что обусловило использование приближенных соотношений [17] (нулевое приближение):

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin x_0 + x_1 \cos x_0 \cos \Phi, \\ \cos x &= \cos x_0 - x_1 \sin x_0 \cos \Phi. \end{aligned} \quad (8)$$

Затем нами были получены уточняющие соотношения на основе первого приближения.

В данной статье при использовании дифференциального уравнения (6) и предполагаемого решения в форме (7) используем более строгий подход (второе приближение), когда вместо (8) используются приближения более высокого порядка, в связи с чем повышается точность полученных результатов: динамических характеристик и критических значений параметров ФАП и помехи.

В данном случае используются отрезки рядов

$$\begin{aligned} \sin(x_1 \cos \Phi) &= 2J_1 \cos \Phi, \\ \cos(x_1 \cos \Phi) &= J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $J_0 = J_0(x_1)$ ,  $J_1 = J_1(x_1)$ ,  $J_2 = J_2(x_1)$  – функции Бесселя соответствующих порядков, причем здесь добавляется в разложении (9) вторая гармоника  $\cos 2\Phi$ .

В результате вместо (8) используются соотношения

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin x_0 [J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi] + \\ &+ \cos x_0 [2J_1 \cos \Phi], \\ \cos x &= \cos x_0 [J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi] - \\ &- \sin x_0 [2J_1 \cos \Phi]. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя предполагаемое решение (2) в исходное дифференциальное уравнение (6), получим

$$\begin{aligned} -dx_1 \sin \Phi &= \beta - F(p) \{ \sin x + \varepsilon \sin(x + dt + \Delta\theta) \} = \\ &= \beta - F(p) \{ \sin [x_0 + x_1 \cos \Phi] + \\ &+ \varepsilon \sin x \cos(\Phi - \psi) + \varepsilon \cos x \sin(\Phi - \psi) \} = \\ &= \beta - F(p) \{ \sin x_0 \cos(x_1 \cos \Phi) + \\ &+ \cos x_0 \sin(x_1 \cos \Phi) + \varepsilon \sin(x_0 + x_1 \cos \Phi) \times \\ &\times (\cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi) + \\ &+ \varepsilon \cos(x_0 + x_1 \cos \Phi) (\sin \Phi \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi) \} = \\ &= \beta - F(p) \{ \sin x_0 \cos(x_1 \cos \Phi) + \\ &+ \cos x_0 \sin(x_1 \cos \Phi) + \varepsilon [\sin x_0 \cos(x_1 \cos \Phi) + \\ &+ \cos x_0 \sin x_1 \cos \Phi] [\cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi] + \\ &+ \varepsilon [\cos x_0 \cos(x_1 \cos \Phi) - \sin x_0 \sin(x_1 \cos \Phi)] \\ &\times [\sin \Phi \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi] \}. \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением (9). В результате получим (первая стадия упрощения)

$$\begin{aligned} -dx_1 \sin \Phi &= \beta - F(p) \{ \sin x_0 (J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi) + \\ &+ \cos x_0 2J_1 \cos \Phi + \varepsilon [\sin x_0 (J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi) + \\ &+ \cos x_0 2J_1 \cos \Phi] [\cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi + \\ &+ \varepsilon [\cos x_0 (J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi) - \sin x_0 2J_1 \cos \Phi] \times \\ &\times [\sin \Phi \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi] \}. \end{aligned}$$

На второй стадии упрощения пренебрегаем второй гармоникой во втором слагаемом в фигурных скобках, при перемножении воспользуемся приближенными равенствами (отбросим третьи гармоники):

$$\cos 2\Phi \cos \Phi \approx \frac{1}{2} \cos \Phi; \quad \cos 2\Phi \sin \Phi \approx -\frac{1}{2} \sin \Phi,$$

а также отбросим вторые гармоники, возникающие в произведениях,

$$2 \sin \Phi \cos \Phi = \sin 2\Phi; \quad \cos^2 \Phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\Phi) \approx \frac{1}{2}.$$

В результате в правой части приведенного соотношения останутся лишь первые гармоники вида  $\sin \Phi$  и  $\cos \Phi$ :

$$\begin{aligned} -dx_1 \sin \Phi &= \beta - F(p) \{ J_0 \sin x_0 + \\ &+ \cos x_0 2J_1 \cos \Phi + \varepsilon J_0 \sin x_0 \times \\ &\times (\cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi) - \varepsilon J_2 \sin x_0 \times \\ &\times \cos \psi \cos \Phi + \varepsilon J_2 \sin x_0 \sin \psi \sin \Phi + \\ &+ \varepsilon J_1 \cos x_0 \cos \psi + \varepsilon J_0 \cos x_0 \times \\ &\times (\sin \Phi \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi) + \varepsilon J_2 \cos x_0 \times \\ &\times \cos \psi \sin \Phi + \varepsilon J_2 \cos x_0 \sin \psi \times \\ &\times \cos \Phi + \varepsilon J_1 \sin x_0 \sin \psi \}. \end{aligned}$$

Выделим в правой части данного соотношения постоянную составляющую

$$\beta - M_0 [J_0 \sin x_0 + \varepsilon J_1 \cos(x_0 - \psi)] = 0, \quad (11)$$

где  $M_0 = F(0)$ .

В результате оставшиеся переменные характеризуются соотношениями

$$-dx_1 \sin \Phi = F(p) (A \cos \Phi - B \sin \Phi), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -2J_1 \cos x_0 - \varepsilon (J_0 - J_2) \sin(x_0 - \psi), \\ B &= \varepsilon (J_0 + J_2) \cos(x_0 - \psi). \end{aligned}$$

Запишем передаточную функцию фильтра в комплексной форме

$$F(p) = M \exp(ip), \quad (13)$$

где  $M = |F(p)|$ ,  $P = \arg F(p)$ .

В результате из (12) с учетом (13) находим

$$\begin{aligned} -\frac{dx_1}{M} \sin \Phi &= A \cos(\Phi + P) - B \sin(\Phi + P) = \\ &= A(\cos \Phi \cos P - \sin \Phi \sin P) - \\ &- B(\sin \Phi \cos P + \cos \Phi \sin P) = \\ &= (A \cos P - B \sin P) \cos \Phi - \\ &- (A \sin P + B \cos P) \sin \Phi. \end{aligned}$$

После гармонического баланса по  $\sin \Phi$  и  $\cos \Phi$  получим два уравнения относительно величин  $\cos P$  и  $\sin P$ :

$$\begin{aligned} A \cos P - B \sin P &= 0, \\ B \cos P + A \sin P &= \frac{dx_1}{M}. \end{aligned} \quad (18)$$

Определитель  $\Delta$  системы уравнений (14) имеет вид

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = A^2 + B^2.$$

В результате решения системы уравнений (14) находим искомые величины  $\cos P$  и  $\sin P$  в виде

$$\cos P = \Delta_1 / \Delta; \quad \sin P = \Delta_2 / \Delta. \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & -B \\ \frac{dx_1}{M} & -A \end{vmatrix} = B \frac{dx_1}{M} = \frac{dx_1}{M} \varepsilon (J_0 + J_2) \cos(x_0 - \psi), \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & \frac{dx_1}{M} \end{vmatrix} = A \frac{dx_1}{M} = \frac{dx_1}{M} \varepsilon (J_0 - J_2) \times \\ &\times \sin(\psi - x_0) - 2J_1 \cos x_0. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\sin^2 P + \cos^2 P = \frac{\Delta_1^2}{\Delta^2} + \frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} = 1.$$

Отсюда имеем

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = \frac{dx_1}{M} (A^2 + B^2) = \left( \frac{dx_1}{M} \right)^2 \Delta = \Delta^2.$$

Таким образом, эквивалентная запись определителя имеет вид

$$\Delta = \left( \frac{dx_1}{M} \right)^2.$$

Поэтому окончательно получим

$$\begin{aligned} \cos P &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{M^2}{(dx_1)^2} \frac{dx_1}{M} B = \frac{M}{dx_1} B, \\ \sin P &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{M^2}{(dx_1)^2} \frac{dx_1}{M} A = \frac{M}{dx_1} A, \end{aligned}$$

или в другой форме –

$$dx_1 \cos P = \varepsilon M (J_0 + J_2) \cos(\psi - x_0), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} dx_1 \sin P &= \\ &= M [\varepsilon (J_0 - J_2) \sin(\psi - x_0) - 2J_1 \cos x_0], \end{aligned} \quad (17)$$

где  $J_0 = J_0(x_1)$ ,  $J_1 = J_1(x_1)$ ,  $J_2 = J_2(x_1)$ .

Полученные соотношения (11), (16), (17) совпадают с соответствующими уравнениями (7)–(9), приведенными в [18] без вывода, теперь по приведенному процессу их вывода можно судить о степени приближенности найденных соотношений.

При  $J_2 = J_2(x_1) = 0$  по (16), (17) следует частный случай, полученный ранее.

## 2.2. Соотношения для параметров $x_0$ , $x_1$ , $\psi$ предполагаемого решения дифференциального уравнения

По (16) и (17) может быть найдена система уравнений относительно величин  $\cos \psi$  и  $\sin \psi$ , имеющая вид

$$\begin{aligned} \cos x_0 \cos \psi + \sin x_0 \sin \psi &= c_1, \\ -\sin x_0 \cos \psi + \cos x_0 \sin \psi &= c_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где

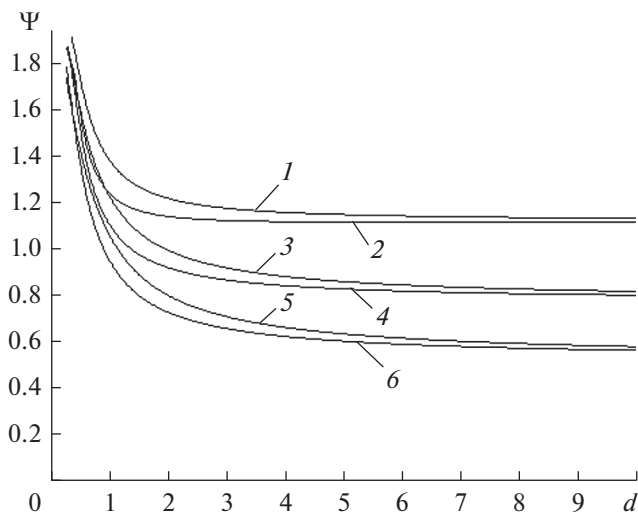
$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{dx_1}{\varepsilon M (J_0 + J_2)} \cos P, \\ c_2 &= \frac{dx_1}{\varepsilon M (J_0 - J_2)} \sin P - \frac{2 \cos x_0}{\varepsilon (J_0 - J_2)} J_1. \end{aligned}$$

Определитель системы (18) равен единице, поэтому

$$\cos \psi = \Delta_1, \quad \sin \psi = \Delta_2, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{dx_1}{\varepsilon M (J_0^2 - J_2^2)} [J_0 \cos(P + x_0) - J_2 \cos(P - x_0)] - \\ &- \frac{J_1}{\varepsilon (J_0 - J_2)} \sin 2x_0 = \gamma_1 F_1, \quad \Delta_2 = \frac{dx_1}{\varepsilon M (J_0^2 - J_2^2)} \times \\ &\times [J_0 \sin(x_0 + P) - J_2 \sin(x_0 - P)] + \\ &+ \frac{2J_1}{\varepsilon (J_0 - J_2)} \cos^2 2x_0 = \gamma_1 F_2, \quad \gamma_1 = \frac{dx_1}{\varepsilon M (J_0^2 - J_2^2)}, \\ F_1 &= d [J_0 \cos(P + x_0) - J_2 \cos(P - x_0)] - \\ &- \frac{1}{2} \frac{2}{x_1} J_1 M (J_0 + J_2) \sin 2x_0, \\ F_2 &= d [J_0 \cos(P + x_0) + J_2 \cos(P - x_0)] - \\ &- \frac{2}{x_1} J_1 M (J_0 + J_2) \cos^2 2x_0. \end{aligned}$$



**Рис. 12.** Зависимость фазового угла  $\psi$  от относительной разности частот  $d$  помехи и сигнала при  $\epsilon = 0.5$ ;  $a = 0.8$ ;  $\Omega\tau = 6.25$  ( $\tau$  – постоянная времени фильтра) и различных  $\beta = 0.9$  (1, 2); 0.7 (3, 4); 0.5 (5, 6) в случае невырожденного (1, 3, 5) и вырожденного фильтров (2, 4, 6).

При малых значениях амплитуды  $x_1$  функция  $J_2(x_1) \approx 0$ , поэтому в этом случае из (19) находим

$$\Delta_1 = \frac{x_1}{\epsilon M J_0} \times \left[ d \cos(P + x_0) - \frac{1}{2} \frac{J_1 M \sin 2x_0}{x_1} \right] = \gamma_{10} F_{10}, \quad (20)$$

$$\Delta_1 = \frac{x_1}{\epsilon M J_0} \times \left[ d \cos(P + x_0) - \frac{2}{x_1} J_1 M \cos^2 x_0 \right] = \gamma_{20} F_{20}. \quad (21)$$

Далее из (17) находим

$$\sin(\psi - x_0) = \frac{1}{\epsilon M (J_0 - J_2)} \times \left( \frac{dx_1}{M} \sin P + 2J_1 \cos x_0 \right) = G.$$

Тогда

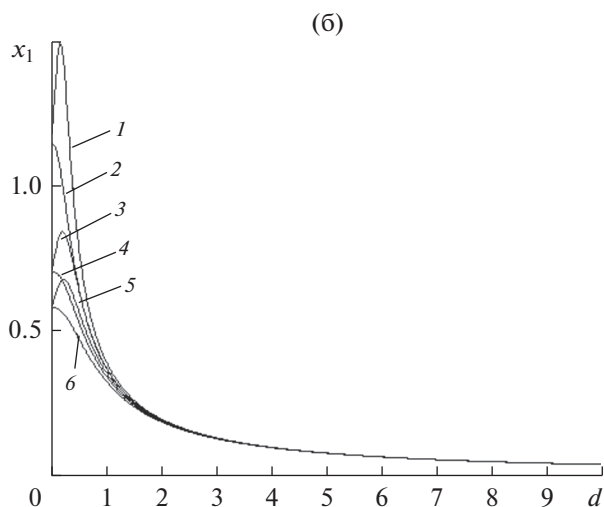
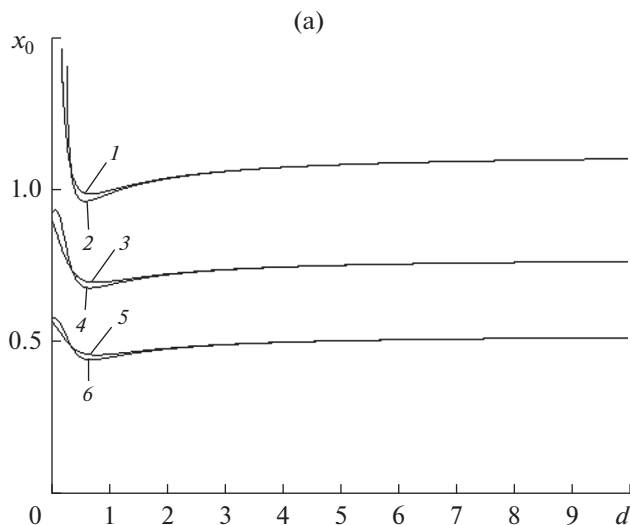
$$\psi = \begin{cases} x_0 + \varphi, & \text{при } d > 0, \beta > 0, \\ x_0 - \varphi + \pi, & \text{при } d < 0, \beta > 0; \end{cases} \quad (22)$$

где  $\varphi = \arcsin G$ .

Графики зависимости  $\psi = f(d)$  представлены на рис. 12 при  $\epsilon = 0.5$ ,  $a = 0.8$ ;  $\alpha_0^{-2} = 6.25$ , при невырожденном и вырожденном фильтре для  $\beta = 0.9$ , 0.7 и 0.5.

Соотношение для постоянной составляющей  $x_0$  находится по (11) с учетом (16) и имеет вид

$$\sin x_0 = \frac{1}{J_0} \left[ \frac{\beta}{M_0} - J_1 \frac{dx_1 \cos P}{M (J_0 + J_2)} \right]. \quad (23)$$



**Рис. 13.** Зависимость постоянной составляющей  $x_0$  (а) и амплитуды первой гармоники  $x_1$  (б) от относительной разности частот  $d$  помехи и сигнала при  $\epsilon = 0.5$ ;  $a = 0.8$ ;  $\Omega\tau = 6.25$  и различных  $\beta = 0.9$  (1, 2); 0.7 (3, 4); 0.5 (5, 6) в случае невырожденного (1, 3, 5) и вырожденного фильтров (2, 4, 6).

Графики зависимости  $x_0 = f(d)$  изображены на рис. 13а при  $\epsilon = 0.5$ ;  $a = 0.8$ ;  $\alpha_0^{-2} = 6.25$  при невырожденном и вырожденном фильтре для  $\beta = 0.9$ , 0.7 и 0.5.

Остается найти зависимость амплитуды  $x_1$  первой гармоники предполагаемого решения от параметров ФАП и отстройки  $d$ . По (19) находим неявную зависимость

$$x_1^2 = \frac{(\epsilon M)^2 (J_0^2 - J_2^2)^2}{d^2 (F_1^2 + F_2^2)^2}. \quad (24)$$



При больших отстройках  $d$  находим

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon J_0^2}{d^2 + [2J_1/x_1]^2 \cos x_0} \approx \frac{\varepsilon^2}{d^2 + 1 - \beta^2}. \quad (25)$$

Графики зависимости  $x_1 = f(d)$  представлены на рис. 13б при тех же параметрах, что и на рис. 13а.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, определяющая роль в создании теории ФАП под воздействием помех принадлежит В.И. Тихонову и его ближайшим ученикам. Были созданы не только методы анализа стохастической ФАП, но и ее синтеза на основе нелинейной теории оптимальной фильтрации Р.Л. Стратоновича [19] (научным руководителем Р.Л. Стратоновича на раннем этапе его творчества был В.И. Тихонов).

Следует также отметить заметный вклад В.И. Тихонова в исследование теории выбросов случайных процессов [20] и теории передачи сообщений [21].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В.И. // Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20. № 9. С. 1188.
2. Тихонов В.И. // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 3. С. 301.
3. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И. // Автоматика и телемеханика 1965. Т. 26. № 9. С. 1563.
4. Шахтарин Б.И. // РЭ. 1968. Т. 13. № 2. С. 247.
5. Чельшев К.Б. // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24. № 7. С. 942.
6. Тихонов В.И., Чельшев К.Б. // РЭ. 1963. Т. 8. № 2. С. 331.
7. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
8. Шахтарин Б.И., Щепкин Ю.Н. Электросвязь. 1966. № 9. С. 18.
9. Тихонов В.И., Журавлев А.Г. Радиотехника. 1962. Т. 17. № 9. С. 40.
10. Тихонов В.И. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1972. Т. 15. № 4. С. 413.
11. Журавлев А.Г. // Радиотехника. 1963. Т. 18. № 9. С. 38.
12. Шахтарин Б.И. // РЭ. 2012. Т. 57. № 6. С. 649.
13. Шахтарин Б.И. // РЭ. 2012. Т. 57. № 8. С. 858.
14. Ярлыков М.С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
15. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Горячая линия – Телеком, 2015.
16. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
17. Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998.
18. Karsi M.F., Lindsey W.C. // IEEE Trans. 2000. V. 48. № 5. P. 886.
19. Шахтарин Б.И. // РЭ. 2006. Т. 51. № 11. С. 1324.
20. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
21. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975.