РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 733–747

К 100-ЛЕТИЮ
В.И. ТИХОНОВА

УДК 621.391.2

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВОС-СИГНАЛОВ В ПЕРСПЕКТИВНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

© 2021 г. М. С. Ярлыков[a], *, С. М. Ярлыкова[b], **

[a] Редакция журнала "Радиотехника и электроника",
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

[b] Институт кибернетики Российского технологического университета МИРЭА,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

**E-mail: yarlykova@mirea.ru

Поступила в редакцию 18.12.2020 г.
После доработки 18.12.2020 г.
Принята к публикации 11.01.2021 г.

Разработаны субоптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов, предназначенных для применения в современных и перспективных глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Евросоюз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай). Постановка задачи выполнена применительно к векторному дискретно-непрерывному марковскому случайному процессу для случая, когда его непрерывная часть представляет собой векторный диффузионный марковский процесс, а дискретная часть характеризуется простой цепью Маркова на несколько положений. Принято, что полезные ВОС-сигналы наблюдаются на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Получены аналитические соотношения для субоптимальной оценки и матрицы ковариаций субоптимальных ошибок оценивания выборки вектора непрерывных параметров. Представлены структурные схемы тех модулей субоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС, которые отличаются от соответствующих модулей квазиоптимальной системы. Результаты работы полностью применимы в случаях шумоподобных сигналов современных ГНСС, у которых ВОС-сигналы пока не используются.

DOI: 10.31857/S0033849421080106

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением [1], в которой путем решения задачи синтеза были получены аналитические соотношения для оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки навигационных шумоподобных сигналов (ШПС) и, в частности, быстро развивающихся ВОС-сигналов (binary offset carrier modulated signals), перспективных глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай) [2–4].

При практической реализации синтезированных квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов с учетом области применения и круга решаемых задач на них, как правило, накладываются дополнительные ограничения и приближения. В результате на практике применяются субоптимальные (более простые) алгоритмы.

Для определенности рассуждений в работе всюду при конкретизации положений полагаем, что навигационная аппаратура пользователей (НАП) установлена на высокодинамичном подвижном объекте, в частности летательном аппарате (ЛА), таком как самолет, вертолет, беспилотный ЛА и т.д.

Определение местоположения и динамики перемещения подвижного объекта с использованием НАП в ГНСС основывается на псевдодальномерном беззапросном методе, при котором требуется одновременная видимость минимум четырех навигационных космических аппаратов (НКА) [5, 6].

Чтобы на основе измеренных псевдодальностей вычислить прямоугольные координаты пользователя (например, в системе ПЗ-90 или WGS-84), в НАП, кроме того, необходимо для каждого НКА иметь сведения об эфемеридах, альманахе, поправках к бортовой шкале времени (ШВ) и т.д., полученные с помощью принятой навигационной служебной информации (СИ).

В соответствии с этим при формировании субоптимальных алгоритмов приема и обработки BOC-сигналов в ГНСС аналогично [1] полагаем, что принимаемый НАП полезный радиосигнал от j-го НКА ($j=\overline{1,J}$) является нелинейной функцией от векторного дискретно-непрерывного процесса (ДНП) [1–4]. Векторный ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\Theta_j(t)]^T$ (T – символ транспонирования) имеет непрерывную часть, представляющую собой векторный диффузионный марковский случайный процесс $\mathbf{X}(t)$ (или его выборку), и дискретную часть в виде дискретного процесса (ДП) $\Theta_j(t)$, который содержит навигационную СИ от j-го НКА, $j=\overline{1,J}$, и аппроксимирован простой цепью Маркова на M положений. В принимаемом от j-го НКА BOC-сигнале ДП $\Theta_j(t)$ является манипулируемой фазой.

Компоненты векторного непрерывного процесса (НП) $\mathbf{X}(t)$, как правило, характеризуют запаздывание принимаемого радиосигнала (содержащее информацию о пространственном положении и динамике перемещения НАП), его фазу, доплеровский сдвиг частоты и т.д. [7].

В [1] задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки BOC-сигналов решена методами марковской теории оценивания (МТО) случайных процессов [8–11].

Как известно, у навигационных, в том числе и у BOC-сигналов, время корреляции компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$ много больше длительности такта цепи Маркова, характеризующей ДП $\Theta_j(t)$ ($j=\overline{1,J}$) [4, 10, 11]. В силу этого в [1] вектор НП $\mathbf{X}(t)$ в пределах каждого тактового интервала принимаемого радиосигнала был аппроксимирован векторным квазислучайным процессом, что позволило при решении задачи синтеза применить метод поэтапного решения уравнения Стратоновича [10, 12].

По этой же причине в [1] при разложении совместной апостериорной плотности вероятности (АПВ) векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ в задаче синтеза был использован метод с обратными связями по ДП $\Theta_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$ [10, 11].

При получении субоптимальных алгоритмов каждый многомерный дискриминатор в структуре НАП разрабатывается применительно к частному пространству состояний, которое соответствует принимаемому от j-го НКА BOC-сигналу

$$s_j(t)=s_j\left[t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_j(t)\right], \tag{1}$$

где $\mathbf{Y}_j(t)$ – вектор параметров радиосигнала (ПРС), $j=\overline{1,J}$ [1, 7, 13].

Компоненты вектора ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ представляют собой параметры, от которых принимаемый сигнал $s_j(t)$ непосредственно зависит (псевдодальность пользователя, его псевдоскорость, фаза сигнала и т.п.).

Для j-го вектора ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ и вектора НП $\mathbf{X}(t)$ выполняется соотношение [1, 7, 13]:

$$\mathbf{Y}_j(t)=\mathbf{L}_j\{\mathbf{X}(t)\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{L}_j\{\mathbf{X}(t)\}$ – известная нелинейная векторная функция, вектор-столбец $\mathbf{Y}_j(t)$ имеет размер $(m\times 1)$, вектор-столбец $\mathbf{X}(t)$ имеет размер $(n\times 1)$. Число векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ равно J – числу всех одновременно видимых НКА.

Важную роль при разработке субоптимальных алгоритмов играют матрицы Якоби, характеризующие функциональные связи между компонентами вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$.

Каждая матрица Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ определяется как частная производная вектора-столбца $\mathbf{Y}_j(t)$ по вектору-столбцу $\mathbf{X}(t)$ [7, 10, 14]:

$$\mathbf{L}'_j(t)\triangleq\frac{\partial\mathbf{Y}_j(t)}{\partial\mathbf{X}(t)},\quad j=\overline{1,J}. \tag{3}$$

Видно, что каждая матрица Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ имеет размер $(m\times n)$.

Для ряда приложений в области навигации, в том числе и применительно к ГНСС, изменения элементов матриц Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$, во времени на тактовых полуинтервалах $[t_k,t_{k+1})$, где $k=0, 1, 2, \ldots$, пренебрежимо малы, и при разработке субоптимальных алгоритмов их полагаем постоянными [7, 10, 13].

Цель работы – получить аналитические соотношения для субоптимальных оценок векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ и ковариационной матрицы субоптимальных ошибок оценивания вектора НП $\mathbf{X}(t)$, а также на этой основе разработать соответствующие структурные схемы модулей, которыми субоптимальная система приема и обработки BOC-сигналов перспективных ГНСС отличается от соответствующей квазиоптимальной системы.

В иллюстрирующих примерах опираемся на sinBOC-сигналы с меандровой модуляцией типа BOC(1,1) на несущей частоте $f_{\text{Н}}=1575.42$ МГц при базовой (опорной) частоте $f_{\text{ОП}}=1.023$ МГц, которые характерны для E1OS сигналов ГНСС Galileo и для L1C сигналов ГНСС GPS применительно к спутникам нового поколения GPS III [4, 6, 15, 16].

В работе всюду каждый вектор представляет собой вектор-столбец; производная от скалярной функции по вектору-столбцу понимается как вектор-строка, а выражения вида $\left[\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{Y}^*_{jk}}\right]$ рассмат-

риваются как операторы, воздействующие на функции, расположенные после них.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть векторное наблюдение на входе приемника НАП имеет вид

$$\Xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_j(t), \ldots, \xi_J(t)]^T, \ t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \tag{4}$$

и определяется соотношением

$$\mathbf{\Xi}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{G}_\Xi(t)\mathbf{N}(t), \quad t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \ldots, s_j(t), \ldots, s_J(t)]^T \tag{6}$$

– вектор принимаемых полезных ВОС-сигналов от всей совокупности J одновременно видимых в данный момент НКА группировки ГНСС;

$$\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \ldots, n_j(t), \ldots, n_J(t)]^T$$

– вектор аддитивных независимых стандартных белых гауссовских шумов (БГШ) с известными характеристиками; J – общее число всех одновременно видимых в данный момент времени НКА, j – номер НКА.

Входящая в (5) переходная матрица $\mathbf{G}_\Xi(t)$ определяет матрицу интенсивностей помех $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t)$:

$$\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t) = \mathbf{G}_\Xi(t)\mathbf{G}_\Xi^T(t), \tag{7}$$

где матрица $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t)$ – невырожденная, т.е. $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}^{-1}(t)$ существует.

Наблюдение на входе приемника НАП от j-го НКА $\xi_j(t)$ представляет собой согласно (5) аддитивную смесь полезного сигнала и шума:

$$\xi_j(t) = s_j(t) + n_j(t), \quad t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \tag{8}$$

где $s_j(t)$ – принимаемый полезный ВОС-сигнал от j-го НКА на входе приемника НАП, характеризуемый (6); $n_j(t)$ – аддитивная флуктуационная помеха в наблюдении $\xi_j(t)$ от j-го НКА.

Флуктуационная помеха $n_j(t)$, аппроксимируемая стационарным БГШ, имеет статистические характеристики, определяемые согласно (7), которые представим в виде

$$M[n_j(t)] = 0; \quad M[n_j(t)n_j(t+\tau)] = \frac{1}{2}N_{0j}\delta|\tau|, \tag{9}$$

где N_{0j} – интенсивность j-го БГШ, $M[\cdot]$ – символ усреднения по множеству реализаций.

Полезные ВОС-сигналы на входе приемника НАП достаточно детально рассмотрены в [1].

Принятый от j-го НКА полезный ВОС-сигнал $s_j(t)$ с использованием многопозиционной фазовой манипуляции (ФМ) для передачи СИ согласно [1] описывается следующим выражением:

$$s_j(t) = A_j d_j(t - \tau_{3j})\cos\Big[(\omega_{\text{Н}j} + \Delta\omega_{Dj} + \Delta\omega_j)\times \\ \times (t - \tau_{3j}) + \Theta_j(t_k - \tau_{3j})\frac{2\pi}{M} + \varphi_j(t)\Big], \quad j = \overline{1, J}, \tag{10}$$

где A_j – амплитуда ВОС-сигнала от j-го НКА; $d_j(t)$ – модулирующая функция (МФ) ВОС-сигнала $s_j(t)$, отражающая специфику навигационных ШПС и собственно ВОС-сигналов; $\Theta_j(t_k)$ – информационный ДП, предназначенный для передачи СИ от j-го НКА; $\omega_{j\text{Н}} = 2\pi f_{j\text{Н}}$ – круговая несущая частота радиосигнала; $f_{j\text{Н}}$ – несущая частота ВОС-сигнала; $\varphi_j(t)$ – фаза радиосигнала; τ_{3j} – запаздывание принимаемого радиосигнала $s_j(t)$ на трассе от j-го НКА до НАП; $\Delta\omega_{Dj}$ – доплеровский сдвиг несущей частоты принимаемого радиосигнала $s_j(t)$ на трассе от j-го НКА до НАП; $\Delta\omega_j$ – медленный сдвиг несущей частоты $\omega_{j\text{Н}}$, возникающий в канале распространения радиосигнала $s_j(t)$ и в измерительном устройстве приемника.

В формуле (10) $M = 2^n$ представляет собой показатель многопозиционности ФМ, n – целое положительное число. Так, например, при $M = 2$ ($i = \overline{1,2}$) имеем двоичную ФМ; при $M = 4$ ($i = \overline{1,4}$) – квадратурную ФМ. Начало отсчета в (10) принято равным $t_0 = 0$.

Отметим, что в (10) и далее используется более общая модель ФМ (многопозиционная ФМ на M положений) по сравнению с двоичной ФМ, которая используется в навигационных сигналах ГНСС сегодня.

Характеризующий в (10) многопозиционную ФМ ДП $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}$ применительно к j-му НКА определяется соотношением: $\vartheta_i = i - 1$, т.е. $\Theta_j(t_k) = \{i - 1\}$, где i – номер состояния ДП

$$\Theta_j(t_k), \quad i = \overline{1, M}. \tag{11}$$

У навигационных ВОС-сигналов $s_j(t)$ (10) МФ $d_j(t)$ в простейшем случае является результатом перемножения двух двоичных последовательностей: псевдослучайной последовательности (ПСП) дальномерного кода $g_j(t)$ и меандрового поднесущего колебания $r_j(t)$ (специфика ВОС-сигналов) [2–4].

Следовательно, МФ навигационного ВОС-сигнала $d_j(t)$ записывается в виде [2–4]:

$$d_j(t-t_0) = g_j(t-t_0)\, r_j(t-t_0), \tag{12}$$

где $g_j(t)$ – ПСП дальномерного кода, характеризующая навигационный ШПС применительно к j-му НКА, $r_j(t)$ – меандровое поднесущее колебание, отражающее специфику собственно ВОС-сигнала $s_j(t)$.

Каждая из последовательностей $g_j(t)$ и $r_j(t)$ состоит из чередующихся единичных видеоимпульсов соответствующей длительности, меняющих свою полярность по определенным законам согласно кодовым коэффициентам, значения которых на каждом такте равны +1 или –1.

Запаздывание τ_{3j} принимаемого радиосигнала $s_j(t)$ (10) на трассе от j-го НКА до НАП имеет вид [1, 5, 7]

$$\tau_{3j} = \tau_{Dj} + \Delta\tau_{\Sigma}, \tag{13}$$

где $\tau_{Dj}(t)$ – задержка принимаемого радиосигнала $s_j(t)$, обусловленная дальностью трассы между j-м НКА и НАП; $\Delta\tau_{\Sigma}$ – суммарная задержка сигнала $s_j(t)$, вызванная сдвигами ШВ j-го НКА и НАП; задержкой сигнала за счет неточного прогноза эфемерид; ионосферной и тропосферной задержками сигнала $s_j(t)$ и т.п.

Задержка $\tau_{Dj}(t)$ принимаемого радиосигнала $s_j(t)$, обусловленная дальностью трассы между j-м НКА и НАП, характеризуется выражением

$$\tau_{Dj}(t) = D_j(t)/c, \tag{14}$$

где $D_j(t)$ – дальность трассы между j-м НКА и НАП; c – скорость распространения радиоволн.

Таким образом, видно, что согласно (1) и (2) ВОС-сигнал $s_j(t)$ (10), принимаемый от j-го НКА, является известной нелинейной функцией векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$:

$$s_j(t) = s_j\left[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{X}(t)\right], \tag{15}$$

где $\Theta_j(t)$ – ДП, представляющий собой манипулируемую фазу сигнала $s_j(t)$, с помощью которой передается навигационная СИ, и $\mathbf{X}(t)$ – вектор НП, содержащий информацию о положении и динамике движения НАП и НКА, а также об условиях распространения радиоволн и стабильности несущей частоты.

Вектор принимаемых полезных ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t)$ (6) от всей совокупности J одновременно видимых в данный момент НКА группировки ГНСС может быть представлен в виде

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}\left[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}(t)\right], \tag{16}$$

где $\mathbf{\Theta}_k = [\Theta_{1k}, \Theta_{2k}, \ldots, \Theta_{jk}, \ldots, \Theta_{Jk}]^T$ – вектор ДП применительно ко всей совокупности J одновременно видимых НКА, $\Theta_{jk} = \Theta_j(t_k)$ – ДП принимаемого ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) от j-го НКА.

Свойства вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и его взаимосвязь с векторами ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, где $j = \overline{1, J}$, изложены в [1].

Для характеристики вектора НП $\mathbf{X}(t)$ используем типовую математическую модель (ММ) динамики объектов навигации на основе прямоугольной гринвичской системы координат, описывающую положение объекта (например, ЛА), на котором установлена НАП, в пространстве и его движение применительно к небольшим отрезкам времени [1, 7].

В соответствии с принятой ММ динамики ЛА имеем, что вектор НП $\mathbf{X}(t)$ представляет собой многокомпонентный диффузионный гауссовский марковский процесс, который в общем виде может быть описан линейным векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением [1, 7, 9, 10]:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_X(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{C}_X(t)\mathbf{U}_{\text{упр}}(t) + \mathbf{G}_X(t)\mathbf{N}_X(t),\\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0,\end{gathered} \tag{17}$$

где $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), .., x_n(t)]^T$ – вектор-столбец НП размером $(n \times 1)$; n – число компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$; $\mathbf{A}_{\mathbf{X}}(t)$ – матрица состояния размером $(n \times n)$; $\mathbf{U}_{\text{упр}}(t)$ – детерминированный вектор управления; $\mathbf{C}_X(t)$ – матрица управления; $\mathbf{N}_X(t)$ – вектор стандартных БГШ; $\mathbf{G}_X(t)$ – матрица интенсивностей шумов; $\mathbf{B}_{XX}(t) = \mathbf{G}_X(t)\mathbf{G}_X^T(t)$ – матрица коэффициентов диффузии вектора НП $\mathbf{X}(t)$.

Взаимосвязь вектора НП $\mathbf{X}(t)$ (17) и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ согласно (2), (10), (13) и (14) в типовом случае характеризуется соотношением [1, 7]:

$$\begin{gathered}\mathbf{Y}_j(t) = \mathbf{L}_j\{\mathbf{X}(t)\} =\\ = \left[l_{j1}\{\mathbf{X}(t)\}\, l_{j2}\{\mathbf{X}(t)\}\, l_{j3}\{\mathbf{X}(t)\}\, l_{j4}\{\mathbf{X}(t)\}\right]^T,\end{gathered} \tag{18}$$

где $\mathbf{Y}_j(t) = \left[y_{j1}(t) y_{j2}(t) y_{j3}(t) y_{j4}(t)\right]^T$, $j = \overline{1, J}$.

Компоненты нелинейной векторной функции $\mathbf{L}_j\{\mathbf{X}(t)\}$ в (18) равны [1, 7, 13]:

$$\begin{gathered}y_{j1}(t) = l_{j1}\{\mathbf{X}(t)\} = D_{j\text{изм}}(t) =\\ = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} + \delta D,\\ y_{j2}(t) = l_{j2}\{\mathbf{X}(t)\} = \frac{d}{dt} D_{j\text{изм}} =\\ = K_x(V_x - W_{jx}) + K_y(V_y - W_{jy}) + K_z(V_z - W_{jz}),\\ y_{j3}(t) = l_{j3}\{\mathbf{X}(t)\} = \varphi_j(t), \quad y_{j4}(t) = l_{j4}\{\mathbf{X}(t)\} = \Delta\omega_{Dj},\end{gathered} \tag{19}$$

где x_j, y_j, z_j – прямоугольные координаты j-го НКА; x, y, z – прямоугольные координаты объекта (например, ЛА), на котором установлена НАП; $D_{\text{изм}}(t)$ – измеренное значение дальности $D(t)$; δD – неизвестная постоянная на время измерения ошибка (например, за счет расхождения ШВ j-го НКА и НАП);

$$V_x(t) = \frac{d}{dt}x(t),\ \ V_y(t) = \frac{d}{dt}y(t),\ \ V_z(t) = \frac{d}{dt}z(t) \quad (20)$$

– проекции скорости объекта (например, ЛА), на котором установлена НАП;

$$W_{jx}(t) = \frac{d}{dt}x_j(t),\ \ W_{jy}(t) = \frac{d}{dt}y_j(t),\ \ W_{jz}(t) = \frac{d}{dt}z_j(t)$$

– проекции скорости j-го НКА;

$$K_x = \frac{x_j - x}{D_{\text{изм}}(t)},\ \ K_y = \frac{y_j - y}{D_{\text{изм}}(t)},\ \ K_z = \frac{z_j - z}{D_{\text{изм}}(t)}$$

– направляющие косинусы; $\varphi_j(t)$ – фаза сигнала $s_j(t)$; $\Delta\omega_{Dj}$ – доплеровский сдвиг несущей частоты сигнала $s_j(t)$.

Информационный ДП $\Theta_j(t_k)$ сигнала $s_j(t)$ согласно (11) применительно к j-му НКА записывается в виде $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}_j = \{i-1\}_j$, где i – состояние ДП $\Theta_j(t_k)$. ДП $\Theta_j(t_k)$ представляет собой простую цепь Маркова на M положений и в каждый момент времени принимает одно из значений $\vartheta_i = i-1$, где $i = \overline{1, M}$ [17].

Возможные моменты перехода ДП $\Theta_j(t_k)$ из одного состояния в другое являются дискретными и определяются выражением

$$t_k = t_0 + kT,$$

где $T = \text{const}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Длительность такта $T = t_{k+1} - t_k$ ДП $\Theta_j(t_k)$ для ГНСС типа GPS, Galileo и ГЛОНАСС равна длительности посылки СИ: $T = \tau_{\text{СИ}} = 20$ мс [5, 6].

У принимаемого сигнала $s_j(t)$ (10) моменты времени t_k возможного перехода ДП $\Theta_j(t_k)$ из одного состояния в другое в общем случае являются случайными, поскольку они зависят от случайного запаздывания принимаемого сигнала τ_{3j} (13).

На каждом тактовом полуинтервале времени $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, ДП $\Theta_j(t_k)$ остается постоянным, и он описывается следующим уравнением:

$$\frac{d\Theta_j(t_k)}{dt} = 0,\ \ \text{где}\ \ t \in [t_k, t_{k+1}),\ \ k = 0, 1, 2, \ldots. \quad (21)$$

Матрица одношаговых вероятностей перехода и вектор вероятностей начального состояния ДП $\Theta_j(t_k)$ соответственно имеют вид [10, 11, 17]:

$$\boldsymbol{\pi}(t_k) = [\pi_{il}(t_k)], \quad (22)$$

где $\pi_{il}(t_k) = P\{\Theta_j(t_k + 0) = \vartheta_l | \Theta_j(t_k - 0) = \vartheta_i\}$, $i, l = \overline{1, M}$;

$$\mathbf{P}_\Theta(t_0) = \{P_{\vartheta i}(t_0)\},\ \text{где}\ i = \overline{1, M}.$$

В начале k-го такта $[t_k, t_{k+1})$ вероятности состояний ДП $\Theta_j(t_k)$

$$P_{\vartheta i}(t_k + 0) \triangleq P(t_k + 0,\ \Theta_j(t_k + 0) = \vartheta_i)$$

определяются формулой [17]

$$P_{\vartheta i}(t_k + 0) = \sum_{m=1}^{M} \pi_{mi}(t_k) P_{\vartheta m}(t_k - 0),\ \ i = \overline{1, M}, \quad (23)$$

где $P_{\vartheta m}(t_k - 0)$ – вероятность состояния ДП $\Theta_j(t_k)$ в конце $(k-1)$-го такта $[t_{k-1}, t_k)$.

Далее применительно к ДП $\Theta_j(t_k)$ в обозначениях индекс j там, где это не затрудняет понимания, для простоты не приводится.

В [1] при решении задачи синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки векторного ДНП было применено поэтапное решение уравнения Стратоновича [10, 12].

Возможность решения уравнения Стратоновича для АПВ оцениваемых ДНП поэтапно (в два этапа) обусловлена спецификой непрерывных (17) и дискретных (21)–(23) компонент векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$, где $j = \overline{1, J}$. Использование метода поэтапного решения уравнения Стратоновича за счет обоснованного упрощения ММ вектора НП $\mathbf{X}(t)$ позволяет заметно повысить конструктивность решения задачи синтеза.

Суть такого упрощения ММ вектора НП $\mathbf{X}(t)$ заключается в аппроксимации его компонент на каждом тактовом полуинтервале времени $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, ..$ (применительно к ГНСС на длительности тактового полуинтервала для передачи СИ $\tau_{\text{СИ}} = 20$ мс) квазислучайными процессами [10, 13].

В таких случаях применяется обработка векторного наблюдения на входе приемника НАП $\Xi(t)$ (4)–(6) в два этапа. На первом этапе применительно к каждому k-му такту $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, обрабатывается только вектор НП $\mathbf{X}(t)$, так как ДП $\Theta_j(t)$ векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ при этом остается постоянным. В силу аппроксимации ММ вектора НП $\mathbf{X}(t)$ (17) векторным квазислучайным процессом на первом этапе удается найти точное решение уравнения Страто-

новича как решение нелинейной задачи оценки параметров.

На втором этапе обработка осуществляется в дискретном времени в точках $t_k + 0$ $(k = 0,1,2,\ldots)$, т.е. в точках возможной смены состояния ДП $\Theta_j(t)$, где $j = \overline{1,J}$.

При этом оценки компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$, полученные на первом этапе обработки, используются в качестве начальных значений для второго этапа обработки векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$.

Применительно к (17) в дискретные моменты времени t_k $(k = 0,1,2,\ldots)$ выборка вектора НП $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$ описывается эквивалентным линейным векторно-матричным стохастическим разностным уравнением

$$\begin{gathered}\mathbf{X}_k = \mathbf{\Phi}_{XX}(t_k,t_{k-1})\mathbf{X}_{k-1} + \\ + \mathbf{\Psi}_{XU}(t_k,t_{k-1})U_{\text{упр}k} + \mathbf{\Gamma}_X(t_k,t_{k-1})\mathbf{N}_{Xk},\end{gathered} \tag{24}$$

где $\mathbf{\Phi}_{XX}$, $\mathbf{\Psi}_{XU}$ и $\mathbf{\Gamma}_X$ – известные матрицы, $\mathbf{N}_{Xk} = \mathbf{N}_X(t_k)$ – вектор формирующих стандартных дискретных БГШ, $\mathbf{U}_{\text{упр}\,k}$ – дискретный вектор управления.

Аппроксимируя на каждом полуинтервале $[t_k,t_{k+1})$, где $k = 0,1,2,\ldots$, в принимаемом ВОС-сигнале $s_j(t)$ (15) вектор НП $\mathbf{X}(t)$ векторным квазислучайным процессом, запишем [1, 10, 12, 13]:

$$\begin{gathered}\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k),\quad t \in [t_k,t_{k+1}),\\ k = 0,1,2,\ldots,\quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0),\end{gathered} \tag{25}$$

где $\mathbf{f}(\cdot)$ – детерминированная векторная функция; $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$; $\mathbf{X}_k = \mathbf{f}(t_k,\mathbf{X}_k)$ – начальное значение вектора НП $\mathbf{X}(t)$ на k-м такте.

Функция $\mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k)$ имеет вид [1, 10, 12, 13]

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k) = \mathbf{\Phi}_{XX}(t,t_k)\mathbf{X}_k,\quad t \in [t_k,t_{k+1}), \tag{26}$$

где $\mathbf{\Phi}_{XX}(t,t_k)$ – переходная матрица состояния, входящая в (24).

В соответствии с (25) принимаемый от j-го НКА полезный ВОС-сигнал $s_j(t)$ (15) в пределах одного тактового полуинтервала принимает вид

$$\begin{gathered}s_j(t) = s\big[t,\Theta_j(t_k),\ \mathbf{f}(t_k,\mathbf{X}_k)\big],\quad t \in [t_k,t_{k+1}),\\ k = 0,1,2,\ldots,\quad j = \overline{1,J}.\end{gathered} \tag{27}$$

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ И БЛИЗКИЕ К НИМ ОЦЕНКИ ВЕКТОРНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$

Решенная в [1] задача синтеза состоит в том, чтобы на k-м такте $[t_k,t_{k+1})$, где $k = 0,1,2,\ldots$, располагая наблюдениями (5) и имея априорные сведения (11) и (17) об оцениваемом векторном ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\Theta_j(t)]^T$, с использованием метода обратных связей по ДП получить оптимальную оценку $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и оптимальные оценки $\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0)$ ДП $\Theta_j(t)$, где $j = \overline{1,J}$.

Оптимальная оценка $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$, полученная в [1], удовлетворяет критерию минимума апостериорного риска при квадратичной функции потерь. Оптимальной оценкой $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$, удовлетворяющей этому критерию, является апостериорное математическое ожидание $M_{ps}[\mathbf{X}_{k+1}]$ выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$ [9–11]:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = M_{ps}[\mathbf{X}_{k+1}] = \int\limits_{\mathbf{X}_{k+1}} \mathbf{X}_{k+1} p_{ps}(t,\mathbf{X}_{k+1})\,d\mathbf{X}_{k+1}, \tag{28}$$

где $\hat{\mathbf{X}}(t)$ – оптимальная оценка вектора НП $\mathbf{X}(t)$;

$$p_{ps}(t,\mathbf{X}_{k+1}) \triangleq p(t,\mathbf{X}_{k+1}|\mathbf{\Xi}^{t_{k+1}})$$

– АПВ выборки $\mathbf{X}_{k+1}$;

$$\mathbf{\Xi}^{t_{k+1}} = \{\mathbf{\Xi}(\tau) : \tau \in [t_0,t_{k+1}]\}$$

– реализация векторного наблюдения на входе приемника НАП $\mathbf{\Xi}(t)$ на отрезке $[t_0,t_{k+1}]$.

Если АПВ $p_{ps}(t,\mathbf{X}_{k+1})$ является унимодальной и гауссовской, то оптимальная оценка $\hat{\mathbf{X}}(t)$ согласно критерию (28) и критерию максимума АПВ совпадают [9–11], что и используем в дальнейшем.

В соответствии с [1] оптимальная оценка $\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0)$ ДП $\Theta_j(t)$, где $j = \overline{1,J}$, применительно к j-му НКА удовлетворяет критерию минимума апостериорного риска при простой функции потерь, что эквивалентно критерию максимума апостериорной вероятности (АВ) ДП $\Theta_j(t)$ [9–11]:

$$\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0) = \vartheta_i\colon \max_{\vartheta_1 \le \vartheta_i \le \vartheta_M} \{P_{ips}(t_{k+1}-0)\}, \tag{29}$$

где $P_{ips}(t_{k+1}-0)$ – АВ состояния ДП $\Theta_j(t)$ в момент времени $t = t_{k+1}-0$.

Под оценками и алгоритмами, близкими к оптимальным, понимаем квазиоптимальные и субоптимальные (еще более упрощенные) оценки и алгоритмы. Применение в ГНСС квазиоптимальных и субоптимальных алгоритмов приема и обработки навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов) существенно снижает трудности при разработке приемников НАП.

Чтобы упростить синтезированные оптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов, в [1], как обычно, был применен метод гауссовской аппроксимации и получены аналитические соотношения для квазиоптимальной оценки

$\mathbf{X}^*_{k+1}$ и квазиоптимальных оценок $\Theta^*_{j(k+1)}$ ДП $\Theta_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$, [1, 8–11].

В соответствии с методом гауссовской аппроксимации в [1] при формировании квазиоптимальных оценок векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ были приняты следующие два допущения [1, 8–11]:

1) АПВ $p_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)$ выборки оцениваемого вектора НП $\mathbf{X}_k$ является гауссовской

$$p^*_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)=N\left\{\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k,\mathbf{K}^*(t_k|t_{k+1}-0)\right\},\quad(30)$$

где $\mathbf{X}^*_k$ – квазиоптимальная оценка вектора НП $\mathbf{X}_k$;

$$\mathbf{K}^*(t_k|t_{k+1}-0)=M^*_{ps1}\left\{\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k\right]\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k\right]^T\right\}=$$
$$=\int\limits_{\mathbf{X}_k}\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k\right]\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k\right]^T p^*_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)\,d\mathbf{X}_k\quad(31)$$

– матрица апостериорных одномерных центральных моментов второго порядка (матрица ковариаций) квазиоптимальных ошибок оценивания выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в момент времени $t_{k+1}-0$; индекс “1” означает первый этап обработки; индекс * означает, что АПВ $p_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)$ аппроксимирована гауссовской кривой (30); N – символ гауссовского закона распределения.

2) для условных АВ $P_{ips}(t_k|\mathbf{X}^*_k)$ ДП $\Theta_j(t_k)$ применительно к j-му НКА, где $j=\overline{1,J}$, при достаточно высокой апостериорной точности оценивания выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ выполняются приближенные равенства:

$$P_{ips}(t_k)\approx P_{ips}(t_k|\mathbf{X}_k)\approx P_{ips}(t_k|\mathbf{X}^*_k),\quad\text{где}\quad i=\overline{1,M}.(32)$$

Если на алгоритмы накладываются только эти два ограничения, то такие алгоритмы (и соответствующие им оценки) называются квазиоптимальными.

При формировании субоптимальных оценок (и соответствующих им алгоритмов) векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\Theta_j(t)]^T$ полагаем, что дополнительно выполняется (к уже отмеченным двум) еще одно ограничение, накладываемое на динамику элементов вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, которое заключается в следующем: *матрицы Якоби* $\mathbf{L}'_j(t)$ (3), *где* $j=\overline{1,J}$, *связывающие элементы вектора НП* $\mathbf{X}(t)$ *и векторов ПРС* $\mathbf{Y}_j(t)$, *считаются постоянными на каждом такте* $[t_k,t_{k+1})$, *где* $k=0,1,2,\ldots$, [10, 11, 13].

3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВЕКТОРНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА $[\mathrm{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$

Аналитические соотношения, определяющие квазиоптимальную оценку (по критерию максимума АПВ) $\mathbf{X}^*_{k+1}$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ и квазиоптимальные оценки $\Theta^*_{j(k+1)}$ ДП $\Theta_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$, а также матрицу ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k|t_{k+1}-0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$, получены в [1] с использованием метода обратных связей по ДП. Ниже в соответствии с [1] приведем итоговые выражения этих соотношений.

3.1. Первый этап обработки

Согласно методу гауссовской аппроксимации (30)–(32) имеем, что квазиоптимальная оценка (по критерию максимума АПВ) $\mathbf{X}^*(t_k|t_{k+1}-0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, с учетом того, что

$$P_{ips}(t_{k+1}-0)\approx P_{ips}(t_{k+1}-|0\,\mathbf{X}^*_k),\ \ i=\overline{1,M},\quad(32)$$

определяется следующим соотношением [1]:

$$\mathbf{X}^*(t_k|t_{k+1}-0)=\mathbf{X}^*(t_k)+\mathbf{K}^*(t_k|t_{k+1}-0)\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{M}P_{ips}(t_{k+1}-0)\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}^*(t_k)),\quad(33)$$

где

$$\Phi'_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))\triangleq\left[\frac{\partial\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T=$$
$$=\int\limits_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}^*(t_k))}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T d\tau\quad(34)$$

– первая производная по вектору $\mathbf{X}^*(t_k)$ парциального (i-го) логарифма функционала правдоподобия (ЛФП) $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$, представляющая собой вектор-столбец размером $(n\times1)$;

$$\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)=\int\limits_{t_k}^{t}F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}_k)d\tau\quad(35)$$

– парциальный (i-й) ЛФП (т.е. ЛФП, соответствующий i-му значению компонент вектора ДП $\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\}$, где $i=\overline{1,M}$), применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА;

$$F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)=\frac{d\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)}{dt}$$

– производная по времени парциального (i-го) ЛФП применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА [1, 10, 17].

Отметим, что принятое в работе обозначение типа $\mathbf{X}^*(t_k|t_{k+1}-0)$ соответствует тому, что оценка формируется на момент времени t_k по наблюдению $\mathbf{\Xi}(t)$ до момента времени $t=t_{k+1}-0$.

В соответствии с (32) имеем в (33), что условная АВ ДП $\Theta_j(t)$ в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, равна

$$P_{ips}(t_{k+1}-0|\mathbf{X}^*(t_k))\approx P_{ips}(t_{k+1}-0),\ \text{где}\ i=\overline{1,M}. \quad (36)$$

Производная по времени от парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ (т.е. ЛФП, соответствующего i-му значению компонент вектора ДП $\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\}$, где $i=\overline{1,M}$) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ (9) и (26) от всех одновременно видимых J НКА в соответствии с (25) характеризуется следующим выражением [1, 9–11]:

$$\begin{aligned}F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)&\triangleq F_\Sigma\left[t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k)\right]=\\&=\mathbf{S}^T\left(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k\right)\times\\&\times\mathbf{B}_{\Xi\Xi}^{-1}\left[\mathbf{\Xi}(t)-\frac{1}{2}\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)\right],\end{aligned} \quad (37)$$

где $i=\overline{1,M}$; $\mathbf{\Theta}_k=[\Theta_{1k},\Theta_{2k},\ldots,\Theta_{jk},\ldots\Theta_{Jk}]^T$ – вектор ДП применительно ко всей совокупности J одновременно видимых НКА.

Наряду с производной по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$, которая характеризуется выражением (37), в алгоритмах также используется производная по времени ЛФП $F_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ (26) от всех одновременно видимых J НКА, которая имеет вид [1, 10, 13]:

$$\begin{aligned}F_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)&=F_\Sigma\left[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k)\right]=\\&=\mathbf{S}^T\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)\mathbf{B}_{\Xi\Xi}^{-1}\left[\mathbf{\Xi}(t)-\frac{1}{2}\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)\right],\end{aligned} \quad (38)$$

где

$$F_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)=\frac{d\Phi_\Sigma(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)}{dt}$$

– производная по времени ЛФП $\Phi_\Sigma(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА [1, 10, 17].

Матрица ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k|t_{k+1}-0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, определяется следующей формулой [1]:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^*(t_k|t_{k+1}-0)=&\Bigg[\left[\mathbf{K}^*(t_k)\right]^{-1}-\sum_{i=1}^{M}P_{ips}(t_{k+1}-0|\mathbf{X}_k^*)\times\\&\times\Bigg\{\Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k^*)-\Bigg[\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k^*)-\\&-\sum_{g=1}^{M}P_{gps}(t_{k+1}-0|\mathbf{X}_k^*)\Phi'_{\Sigma g}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k^*)\Bigg]\times\\&\times\left[\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k^*)\right]^T\Bigg\}\Bigg]^{-1},\end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}\text{где}\quad\Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))&\triangleq\frac{\partial^2\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))}{(\partial\mathbf{X}^*(t_k))^2}=\\&=\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T\frac{\partial\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}=\\&=\int_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T\left[\frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}^*(t_k))}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T d\tau\end{aligned} \quad (40)$$

– вторая производная по вектору $\mathbf{X}^*(t_k)$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$, представляющая собой матрицу размером $(n\times n)$.

Решение о квазиоптимальной оценке ДП $\Theta^*_{j(k+1)}$ на полуинтервале $[t_k,t_{k+1})$, принимается на основе (29) с учетом (32) в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$, согласно следующему правилу [1, 10, 11]:

$$\Theta^*_{j(k+1)}=\vartheta_i:\max_{\vartheta_1\le\vartheta_i\le\vartheta_M}\{P_{ips}(t_{k+1}-0)\}, \quad (41)$$

где $P_{ips}(t_{k+1}-0)$ – АВ-состояния ДП $\Theta_j(t)$ применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15) в момент времени $t=t_{k+1}-0$.

Квазиоптимальная оценка ДП $\Theta^*_{j(k+1)}$ на k-м такте применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15) получена в [1] с использованием приближения первого порядка (32).

3.2. Второй этап обработки

Обработка информации на втором этапе k-го такта производится в дискретном времени в точке перехода от одного такта к следующему, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}+0$, где $k=0,1,2,\ldots$.

При этом на втором этапе обработки учитывается как априорное изменение на k-м такте вектора НП от $\mathbf{X}_k$ до $\mathbf{X}_{k+1}$ как квазислучайного процесса согласно (25) и (26), так и возможная смена со-

стояния ДП $\Theta_j(t)$ в момент времени $t = t^{k+1} + 0$, где $k = 0,1,2,\ldots$, в соответствии с (23) [1].

Следуя [1], приведем соотношения для квазиоптимальной оценки выборки вектора НП $\mathbf{X}^*_{k+1}$ и для матрицы ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_{k+1}+0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_{k+1}$ на втором этапе обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}+0$, $k = 0,1,2,\ldots$, при условии, что $p^*_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)$ (30) аппроксимирована гауссовской кривой.

Учитывая, что вектор НП $\mathbf{X}(t)$ на каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ аппроксимирован векторным квазислучайным процессом (25) и (26), соотношение для квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*(t_{k+1}+0)$ на втором этапе обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}+0$, имеет вид [1, 10, 13]

$$\mathbf{X}^*(t_{k+1}+0) = \mathbf{\Phi}_{XX}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*(t_k\,|t_{k+1}-0), \qquad (42)$$

где квазиоптимальная оценка $\mathbf{X}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)$ вычисляется в конце первого этапа обработки в соответствии с (33), а переходная матрица состояния $\mathbf{\Phi}_{XX}(t_{k+1},t_k)$ имеет размер $(n\times n)$ и определяется согласно (24).

Матрица ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_{k+1}+0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_{k+1}$ на втором этапе обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}+0$ $(k = 0,1,2,\ldots)$, в соответствии с (37) и (39) при учете (24)–(26) характеризуется следующим выражением [1, 10, 13]:

$$\begin{aligned}&\mathbf{K}^*(t_{k+1}+0) = \\ &= \mathbf{\Phi}_{XX}(t_{k+1},t_k)\mathbf{K}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)\mathbf{\Phi}^T_{XX}(t_{k+1},t_k).\end{aligned} \qquad (43)$$

Кроме того, на втором этапе обработки на k-м такте с учетом квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*_{k+1}$ (42) производится формирование начальных значений АВ ДП $\Theta_j(t)$ для первого этапа обработки применительно к следующему ($(k+1)$-му) такту, т.е. вычисляются значения $P_{ips}(t_{k+1}+0)$.

Отметим, что в [1] при получении аналитических соотношений для квазиоптимальных оценок векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\Theta_j(t)]^T$ и ковариационной матрицы квазиоптимальных ошибок оценивания вектора НП $\mathbf{X}(t)$ особенностями, учитывающими специфику навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов), являлись следующие два фактора.

1. В алгоритмах при разложении совместной АПВ $p_{ps}(t,\Theta_j,\mathbf{X})$ векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ был применен метод с обратными связями по ДП $\Theta_j(t)$, где $j = \overline{1,J}$.

2. Для вычисления АПВ $p_{ps1}(t,\mathbf{X})$ было использовано не уравнение Стратоновича для совместной АПВ $p_{ps1}(t,\Theta_{jk},\mathbf{X}_k)$, а его решение. Это особенно значимо в случае применения навигационных ШПС (в частности, ВОС-сигналов), для которых характерно малое отношение сигнал/шум на входе приемника НАП, и при обработке принимаемого ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) необходимо накопление определенного числа элементарных посылок ПСП дальномерного кода $g_j(t)$ (12).

4. СУБОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВЕКТОРНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА $[\mathrm{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$

При получении субоптимальных алгоритмов приема и обработки навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов) необходимо учитывать то обстоятельство, что приемник НАП является многоканальным и состоит из J каналов, где J – число всех одновременно видимых НКА.

При этом каждый канал обработки радиосигналов функционирует применительно к своему принимаемому сигналу $s_j(t)$ (10) и, следовательно, к своему вектору ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ (18), соответствующему j-му НКА.

По этой причине, переходя от квазиоптимальных алгоритмов (33) и (39) к субоптимальным, следует отразить факт взаимосвязи компонент векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ и компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$, что характеризуется зависимостями согласно (18)–(20).

Кроме того, при получении аналитических соотношений субоптимальных алгоритмов с целью их упрощения учитывается ограничение, накладываемое на динамику компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, состоящее в том, что матрицы Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ (3), $j = \overline{1,J}$, считаются постоянными на каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0,1,2,\ldots$

В качестве исходных рассмотрим соотношения для квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)$ (33) и матрицы ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)$ (39).

Из (33) и (39) видно, что при переходе от квазиоптимальных алгоритмов к субоптимальным подвергаются преобразованиям, обусловленным взаимосвязями компонент векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ и компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$, первая $\Phi'_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$ (34) и вторая $\Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$ (40) производные по вектору $\mathbf{X}^*(t_k)$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$.

Первая производная $\Phi'_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$ (34) и вторая производная $\Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$ (40) получены применительно к совокупности принимаемых ВОС-

сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА.

Производная по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ (35) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (6) от всех одновременно видимых J НКА в соответствии с (25) характеризуется выражением (37).

При рассмотрении зависимостей производных $\Phi'_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ и $\Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ от векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, $j=\overline{1,J}$, в этих выражениях следует переходить к использованию производной по времени ЛФП $F_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk})$ и производной по времени парциального (i-го) ЛФП

$$F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk}) \triangleq F_j(t,\Theta_j(t_k)=\{\vartheta_i\},\mathbf{Y}_{jk})$$

применительно к какому-либо одному ВОС-сигналу

$$s_j(t)=s_j\left[t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_j(t)\right],$$

принимаемому от j-го НКА, а не от всей совокупности принимаемых сигналов от J НКА.

Производная по времени ЛФП $F_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу $s_j(t) = s_j\left[t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_j(t)\right]$, принимаемому от j-го НКА, характеризуется следующим выражением [1, 10, 13]:

$$F_j(t,\mathbf{Y}_{jk})=\frac{2}{N_{0j}}\left[\xi_j(t)s_j(t,\mathbf{Y}_{jk})-\frac{1}{2}s_j^2(t,\mathbf{Y}_{jk})\right]. \quad (44)$$

Производная по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу $s_{ji}(t)=s_j\left[t,\Theta_j(t_k)=\{\vartheta_i\},\mathbf{Y}_j(t)\right]$, принимаемому от j-го НКА, записывается в виде [1, 10, 13]:

$$F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk})=\frac{2}{N_{0j}}\left[\xi_j(t)s_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk})-\frac{1}{2}s_{ji}^2(t,\mathbf{Y}_{jk})\right], \quad i=\overline{1,M}. \quad (45)$$

Формула связи между производной по времени ЛФП $F_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА и производной по времени ЛФП $F_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу $s_j\left[t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_j(t)\right]$, принимаемому от j-го НКА, определяется соотношением [1, 10, 13]:

$$F_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)=\sum_{j=1}^{J}F_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk}). \quad (46)$$

Соответствующая формула связи между производной по времени от парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА и производной по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу

$$s_{ji}(t)=s_j\left[t,\Theta_j(t_k)=\{\vartheta_i\},\mathbf{Y}_j(t)\right],$$

принимаемому от j-го НКА, имеет вид

$$F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)=\sum_{j=1}^{J}F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk}), \quad \text{где} \quad i=\overline{1,M}. \quad (47)$$

Формулы связи, аналогичные (46) и (47), для самих ЛФП могут быть представлены в виде

$$\Phi_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)=\sum_{j=1}^{J}\Phi_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk}), \quad (48)$$

где $\Phi_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)$ – ЛФП применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА;

$$\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)=\sum_{j=1}^{J}\Phi_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk}), \quad (49)$$

где $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ – парциальный (i-й) ЛФП применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА.

Как следует из рассмотрения (33) и (39), чтобы согласно (34) и (40) найти первую $\Phi'_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$ и вторую $\Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$ производные, необходимо знать

$$\frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}^*(t_k))}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}$$

и, следовательно, с учетом (47) требуется получить

$$\frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial\mathbf{X}(t)},$$

где $F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))$ определяется формулой (45).

Видно, что

$$\frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial\mathbf{X}(t)}=\frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial\mathbf{Y}_j(t)}\frac{\partial\mathbf{Y}_j(t)}{\partial\mathbf{X}(t)}, \quad (50)$$

где $\mathbf{Y}_j(t)=\left[y_{j1}(t),y_{j2}(t),\ldots,y_{jm}(t)\right]^T$ – вектор-столбец размером $(m\times1)$; $\mathbf{X}(t)=[x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)]^T$ – вектор-столбец размером $(n\times1)$;

$$\mathbf{L}'_j(t)\triangleq\frac{\partial\mathbf{Y}_j(t)}{\partial\mathbf{X}(t)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_{j1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{j1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_{j1}}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_{j2}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{j2}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_{j2}}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & & \ldots\\ \frac{\partial y_{jm}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{jm}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_{jm}}{\partial x_n}\end{bmatrix} \quad (51)$$

– матрица Якоби размером $(m\times n)$.

С учетом (51) производная (50) принимает вид

$$\frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{X}(t)} = \frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{Y}_j(t)}\mathbf{L}'_j(t), \quad j=\overline{1,J},\ \ i=\overline{1,M}. \tag{52}$$

4.1. Разностное уравнение для субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0)$

Субоптимальная оценка выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, определяется как

$$\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0) = \int\limits_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p^*_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)\,d\mathbf{X}_k = \int\limits_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p^*(t,\mathbf{X}_{k+1}|\,\Xi^{t_{k+1}-0})\,d\mathbf{X}_k.$$

На основании (33)–(35) с учетом (36) субоптимальная оценка $\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0)$ характеризуется следующим разностным уравнением:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0) = \tilde{\mathbf{X}}_k + \tilde{\mathbf{K}}(t_k|t_{k+1}-0)\times \times\sum_{i=1}^{M} P_{ips}(t_{k+1}-0)\,\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k), \tag{53}$$

где $\tilde{\mathbf{X}}_k = \tilde{\mathbf{X}}(t_k)$ – субоптимальная оценка выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в момент времени t_k; $\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ – первая производная, характеризуемая согласно (34); $j=\overline{1,J}$; $i=\overline{1,M}$; $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$.

Первая производная $\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ представляет собой вектор-столбец размером $(n\times 1)$.

Далее найдем аналитическое соотношение, определяющее первую производную по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА.

Следуя формуле связи (49), сначала получим соотношение, характеризующее $\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к ВОС-сигналу

$$s_{ji}(t) = s_j\left[t,\Theta_j(t_k)=\{\vartheta_i\},\mathbf{Y}_j(t)\right],$$

принимаемому от j-го НКА, где $j=\overline{1,J}$.

Производная $\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ с учетом (52) может быть представлена в виде

$$\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \int\limits_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T d\tau = \int\limits_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}'_j(\tau)\right]^T d\tau, \tag{54}$$

где $\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}=\tilde{\mathbf{Y}}_j(t_k)$ – субоптимальная оценка выборки вектора ПРС $\mathbf{Y}_{jk}$ в соответствии с (18) и (19), $\mathbf{L}'_j(t)$ – матрица Якоби (51), $j=\overline{1,J}$.

Используя правило транспонирования произведения матриц, можно представить производную (54) следующим образом:

$$\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \int\limits_{t_k}^{t}[\mathbf{L}'_j(\tau)]^T\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau. \tag{55}$$

Как отмечали, при разработке субоптимальных алгоритмов полагаем, что выполнено ограничение, накладываемое на матрицы Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ (51), об их постоянстве во времени на каждом тактовом полуинтервале, т.е.

$$\mathbf{L}'_j(t)=\mathbf{L}'_j=\text{const},\quad t\in[t_k,t_{k+1}),\quad k=0,1,2,\ldots \tag{56}$$

С учетом ограничения (56) производная $\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ принимает вид

$$\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = [\mathbf{L}'_j]^T\int\limits_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau, \tag{57}$$

где $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$

Первые производные $\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ и $\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ на основании формулы (49) взаимосвязаны следующим образом

$$\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \sum_{j=1}^{J}\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k). \tag{58}$$

Подставив (57) в соотношение (58), находим, что первая производная парциального (i-го) ЛФП $\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (34) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА характеризуется следующей итоговой формулой:

$$\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \sum_{j=1}^{J}[\mathbf{L}'_j]^T\int\limits_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau, \tag{59}$$

где $F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется в соответствии с (45).

Таким образом, разностное уравнение для субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0)$ выборки вектора

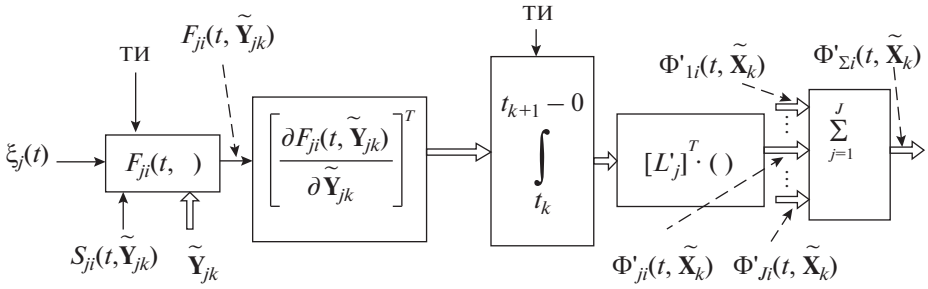

Рис. 1. Структурная схема модуля формирования первой производной $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$.

НП $\mathbf{X}_k$ согласно (53) и с учетом (36), (56) и (59) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1} - 0$, применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА принимает вид

$$\tilde{\mathbf{X}}(t_k | t_{k+1} - 0) = \tilde{\mathbf{X}}_k + \tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0) \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{M} P_{i\,ps}(t_{k+1} - 0) \left[\sum_{j=1}^{J} [\mathbf{L}'_j]^T \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} \left[\frac{\partial F_{ji}(\tau, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}} \right]^T d\tau \right], \quad (60)$$

где $F_{ji}(\tau, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется согласно (45); матрица Якоби $\mathbf{L}'_j$ характеризуется в соответствии с (51) и (56); $j = \overline{1, J}$, $i = \overline{1, M}$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Из сопоставления (33), (53) и (60) видно, что разностные уравнения для квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$ и субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ различаются соотношениями, определяющими производные $\Phi'_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*_k)$ (34) и $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (59) .

При формировании субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ производная $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ вычисляется по менее точной, но более простой формуле (59), чем при вычислении квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$.

Структурная схема модуля формирования первой производной $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ субоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов, выполненная в соответствии с алгоритмами (45), (56) и (59), представлена на рис. 1, где обозначено ТИ – тактовые импульсы.

На вход модуля формирования первой производной $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ поступают сигнал $\xi_j(t)$ (8) от j-го НКА, представляющий собой аддитивную смесь полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) и шума $n_j(t)$ (9), а также опорный ВОС-сигнал $\mathrm{S}_{ji}(t, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$. На выходной сумматор модуля поступает как сформированный сигнал первой производной $\Phi'_{ji}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, так и сигналы первых производных $\Phi'_{li}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, $l \neq j$, $l = \overline{1, J}$, поступающие с других модулей. С выхода модуля снимается результирующий сигнал первой производной $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$. Векторные связи на рис. 1 показаны двойными линиями.

4.2. Разностное уравнение для матрицы ковариаций субоптимальных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$

Матрица ковариаций (матрица апостериорных одномерных центральных моментов второго порядка) субоптимальных ошибок оценивания выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1} - 0$, определяется как

$$\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0) = M^*_{ps1} \left\{ [\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k][\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k]^T \right\} =$$
$$= \int_{\mathbf{X}_k} [\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k][\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k]^T \, p^*_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) \, d\mathbf{X}_k =$$
$$= \int_{\mathbf{X}_k} [\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k][\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k]^T \, p^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | \mathbf{\Xi}^{t_{k+1}-0}) \, d\mathbf{X}_k.$$

На основании (39) и (40) с учетом (36) матрица ковариаций субоптимальных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ с учетом (36) и (56) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1} - 0$, применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k]$ (6) и (16) от всех одновременно видимых J НКА характеризуется следующим разностным уравнением:

$$\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0) = \Bigg[[\tilde{\mathbf{K}}(t_k)]^{-1} - \sum_{i=1}^{M} P_{ips}(t_{k+1} - 0) \times$$
$$\times \Bigg\{ \Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1} - 0, \tilde{\mathbf{X}}_k) - \Bigg[\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1} - 0, \tilde{\mathbf{X}}_k) -$$
$$- \sum_{g=1}^{M} P_{gps}(t_{k+1} - 0) \Phi'_{\Sigma g}(t_{k+1} - 0, \tilde{\mathbf{X}}_k) \Bigg] \times \quad (61)$$
$$\times \left[\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1} - 0, \tilde{\mathbf{X}}_k) \right]^T \Bigg\} \Bigg]^{-1},$$

где $\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ – первая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (35) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, определяется соотношением (34); $\Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ – вторая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (35) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, определяется соотношением (40); $j=\overline{1,J}$; $i=\overline{1,M}$; $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$. Вторая производная $\Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ представляет собой матрицу размером $(n\times n)$.

Первая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА вычисляется по формуле (59).

Далее найдем аналитическое соотношение, определяющее вторую производную по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА.

Следуя формуле связи (49), для вторых производных можно записать

$$\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\sum_{j=1}^{J}\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k), \tag{62}$$

где $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ – вторая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15).

Вторая производная $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ с учетом (40) может быть вычислена по формуле

$$\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}. \tag{63}$$

Применительно к (63) в соответствии с (50) выполняется следующее соотношение:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T=\left[\mathbf{L}'_j\right]^T\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T, \tag{64}$$

где в силу принятого ограничения (56) матрица Якоби имеет вид

$$\mathbf{L}'_j\triangleq\frac{\partial\mathbf{Y}_j}{\partial\mathbf{X}}=\text{const}\quad\text{при}\quad t\in[t_k,t_{k+1}),\quad k=0,1,2,\ldots$$

Первая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15) согласно (35) и (52) с учетом (56) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}=\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}'_j. \tag{65}$$

Подставив (64) и (65) в (63), окончательно получим, что вторая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15) характеризуется следующим соотношением:

$$\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\left[\mathbf{L}'_j\right]^T\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}'_j, \tag{66}$$

где $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$.

На основании (62) с учетом (66) находим, что вторая производная парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (40) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА равна:

$$\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\sum_{j=1}^{J}\left[\mathbf{L}'_j\right]^T\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}'_j, \tag{67}$$

где по аналогии с (35)

$$\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})=\int_{t_k}^{t}F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})d\tau \tag{68}$$

– парциальный (i-й) ЛФП применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15); $F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется в соответствии с (45).

Согласно (68) можно записать, что

$$\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}=\int_{t_k}^{t}\frac{\partial F_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}d\tau. \tag{69}$$

Тогда на основании (67) с учетом (69) имеем, что вторая производная парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (40) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА характеризуется следующей итоговой формулой:

$$\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\\=\sum_{j=1}^{J}\left[\mathbf{L}'_j\right]^T\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T\left[\int_{t_k}^{t}\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}d\tau\right]\mathbf{L}'_j, \tag{70}$$

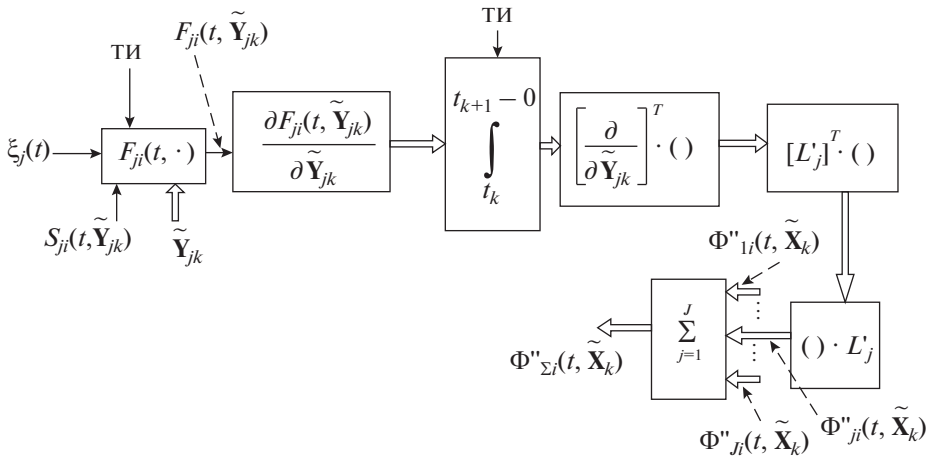

Рис. 2. Структурная схема модуля формирования второй производной $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$.

где $F_{ji}(\tau, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется в соответствии с (45); $j = \overline{1, J}$, $i = \overline{1, M}$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, разностное уравнение для матрицы ковариаций субоптимальных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ с учетом (36) и (56) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1} - 0$, применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k]$ (6) и (16) от всех одновременно видимых J НКА имеет вид (61), где первая $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ и вторая $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ производные определяются итоговыми формулами (59) и (70) соответственно.

Из сопоставления (39) и (61) видно, что разностные уравнения для матриц ковариаций квазиоптимальных оценок ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$ и субоптимальных оценок ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ различаются соотношениями, определяющими первые производные $\Phi'_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*_k)$ (34) и $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (59) и вторые производные $\Phi''_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*_k)$ (40) и $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (70).

При вычислении матрицы ковариаций субоптимальных оценок ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ первая производная $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (59) и вторая производная $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (70) вычисляются по менее точным, но более простым формулам, чем при вычислении матрицы ковариаций квазиоптимальных оценок ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$.

Структурная схема модуля формирования второй производной $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ субоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов, выполненная в соответствии с алгоритмами (45), (56) и (70), представлена на рис. 2.

На вход модуля формирования второй производной $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ поступают сигнал $\xi_j(t)$ (8) от j-го НКА, представляющий собой аддитивную смесь полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) и шума $n_j(t)$ (9), а также опорный ВОС-сигнал $\mathrm{S}_{ji}(t, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$. На выходной сумматор модуля поступает как сформированный сигнал второй производной $\Phi''_{ji}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, так и сигналы вторых производных $\Phi''_{li}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, $l \neq j$, $l = \overline{1, J}$, поступающие с других модулей. С выхода модуля снимается результирующий сигнал второй производной $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$. Векторные связи на рис. 2 показаны двойными линиями.

Все соотношения субоптимальных алгоритмов для вычисления оценок ДП $\tilde{\Theta}_{j(k+1)}$, $j = \overline{1, J}$, остаются теми же, что и при квазиоптимальных алгоритмах [1, формула (79)]. В случае субоптимальных алгоритмов обработка сигналов на втором этапе на каждом такте производится по тем же алгоритмам, что при квазиоптимальных алгоритмах [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены прием и обработка навигационных ШПС и, в частности, быстро развивающихся ВОС-сигналов (меандровых ШПС), которые предназначены для применения в современных и перспективных ГНСС, таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай).

Данная статья является продолжением [1], в которой на базе МТО дискретно-непрерывных случайных процессов с использованием метода поэтапного решения уравнения Стратоновича и метода обратных связей по ДП были синтезированы аналитические соотношения оптимальных

и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС. В представленной работе получены более простые аналитические соотношения – субоптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС, что необходимо для практической реализации.

При переходе от квазиоптимальных алгоритмов к субоптимальным учтено то, что в многоканальном приемнике НАП, установленном, например, на ЛА, каждый канал обработки радиосигналов функционирует применительно к своему принимаемому от j-го НКА сигналу $s_j(t)$ и к своему вектору ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, соответствующему j-му НКА, где $j = \overline{1,J}$ (J – число всех одновременно видимых НКА).

Кроме того, при получении аналитических соотношений субоптимальных алгоритмов с целью их упрощения на динамику компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ наложено ограничение, состоящее в том, что матрицы Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$, где $j = \overline{1,J}$, (51) были приняты постоянными на каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ (56).

Основной научный результат работы состоит в том, что получены аналитические выражения для субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ и матрицы ковариаций субоптимальных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$.

Результаты работы также полностью применимы в случаях ШПС современных ГНСС, у которых ВОС-сигналы пока не используются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ярлыков М.С.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 1. С. 39.
2. *Betz J.W.* // Proc. 1999 National Technical Meeting of the Institute of Navigation (ION – NTM'99), San Diego. 25–27 Jan. Manassas: 1999, P. 639.
3. *Betz J.W.* // Navigation. J. ION. 2001. V. 48. № 4. P. 227.
4. *Ярлыков М.С.* Меандровые шумоподобные сигналы (ВОС-сигналы) и их разновидности в спутниковых радионавигационных системах. М.: Радиотехника, 2017.
5. *Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др.* Сетевые спутниковые радионавигационные системы. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1993.
6. *Соловьев Ю.А.* Системы спутниковой навигации. М.: Эко-Трендз, 2000.
7. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
8. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
9. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
10. *Ярлыков М.С., Миронов М.А.* Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
11. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1991.
12. *Ярлыков М.С., Шишкин В.Ю.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 2. С. 260.
13. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 8. С. 933.
14. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
15. *Betz J.W., Blanco M.A., Cahn Ch.R. et al.* // Proc. 19th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2006). Fort Worth. 26–29 Sep. 2006. Manassas: ION, 200 P. 2080.
16. *Wallner S., Hein G.W., Avila-Rodriguez J.-A.* // Proc. European Space Agency, Navitec 2006, Noordwijk, the Netherlands, Dec. 2006. CD ROM.
17. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1982.