

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

УДК 535

**ОБОСНОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОФИЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ
ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ СИНТЕЗА
СЛОИСТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ**

© 2021 г. Ю. И. Худак^а, *, Д. В. Парфенов^а

^аМИРЭА – Российский технологический университет,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

*E-mail: hudak@mirea.ru

Поступила в редакцию 16.09.2020 г.

После доработки 22.04.2021 г.

Принята к публикации 27.04.2021 г.

Дополнена постановка задачи синтеза слоистых диэлектрических фильтров, рассмотренная в предыдущих работах авторов и основанная на идеях П.Л. Чебышева. Включены принципиальные для таких задач ограничения на допустимые для синтеза материалы слоев. Развита математическая аппаратура, позволившая существенно упростить классический подход и вычислительные процедуры для подобных задач с сохранением математической эквивалентности получаемых результатов.

DOI: 10.31857/S0033849421090060

Впервые обоснован максимально широкий подход к теории слоистых сред для случая кусочно-непрерывной зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей. Показано, что предлагаемая постановка задачи синтеза приводит к значительно более экономному по сравнению с ранее известными вычислительным процедурам, сохраняя неизменными все другие важнейшие ограничения задачи синтеза.

**1. БАЗОВЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ
СИНТЕЗА СЛОИСТЫХ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ**

Теория синтеза слоистых диэлектрических фильтров (СДФ) составляет существенный раздел фундаментальной радиоэлектроники, так как в ее современных приложениях, а также в оптике практически нет ни одного общезначимого устройства, которое бы не имело в своем составе некоторого, обычно достаточно большого, количества фильтров.

Построению СДФ посвящена обширная литература (см., например, [1–13]). Обычно математическая постановка задачи синтеза использует сильно нелинейный по основным параметрам задачи функционал качества синтезируемой системы:

$$\Phi_R \stackrel{\text{def}}{=} \|R(\kappa) - \tilde{R}(\kappa)\|_{\mathbb{L}[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]}$$

$$\text{или } \Phi_T \stackrel{\text{def}}{=} \|T(\kappa) - \tilde{T}(\kappa)\|_{\mathbb{L}[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]},$$

где κ – волновое число, $R(\kappa)$ или $T(\kappa)$ – энергетические коэффициенты соответственно отражения и пропускания слоистой диэлектрической системы (СДС), реализующей фильтр.

Желаемое поведение энергетического коэффициента отражения или пропускания в заданной полосе волновых чисел $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ задается спектральными характеристиками этого фильтра $\tilde{R}(\kappa)$ или $\tilde{T}(\kappa)$, достаточно условно изображенными на рис. 1а и 1б. Функции типа $\tilde{R}(\kappa)$, $\tilde{T}(\kappa)$ в данной работе будем называть идеалами для соответствующих физически реализуемых конкретным фильтром спектральных характеристик.

Качество проектируемой системы оценивается величиной разности между функциями $R(\kappa)$ и $\tilde{R}(\kappa)$ [или $T(\kappa)$ и $\tilde{T}(\kappa)$] по норме линейного нормированного пространства $\mathbb{L}[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$.

В данной работе, как и в [3] в качестве пространства сравнения с идеальными спектральными характеристиками фильтра $\tilde{R}(\kappa)$ [$\tilde{T}(\kappa)$] выбрано пространство $\mathbb{C}[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ всех непрерывных на фиксированном отрезке $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ функций с нормой

$$f(\kappa)_{\mathbb{C}[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]} = \max_{\mathcal{H}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{H}_2} |f(\kappa)|.$$

Рассмотренная в [3] математическая постановка задачи оптимального синтеза СДФ в смысле П.Л. Чебышева состоит в том, чтобы для задан-

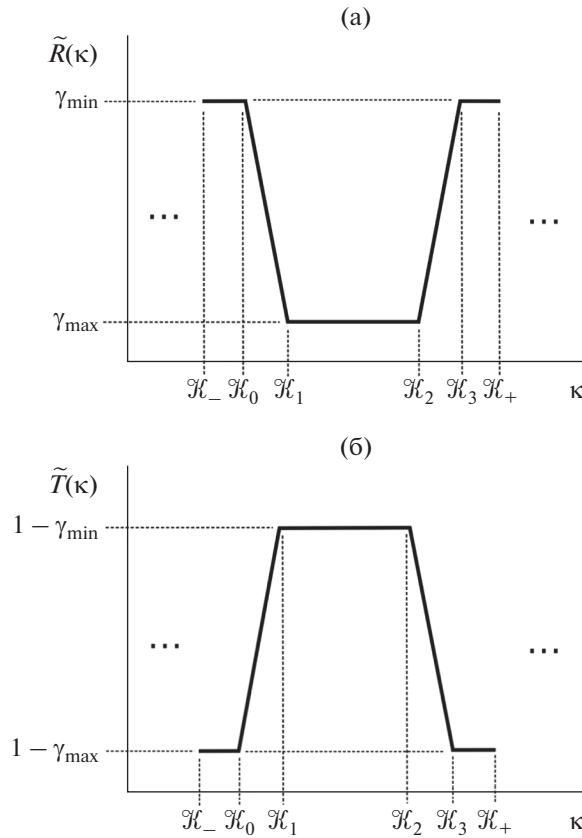


Рис. 1. Идеал $\tilde{R}(\kappa)$ (а) и $\tilde{T}(\kappa)$ (б) для энергетического коэффициента отражения $R(\kappa)$ и $T(\kappa)$ соответственно полосового фильтра для интервала волновых чисел $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ с учетом переходных областей.

ного интервала волновых чисел $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ и заданного идеала энергетического коэффициента отражения $\tilde{R}(\kappa)$ минимизировать функционал:

$$\max_{\mathcal{H}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{H}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)|_{\bar{p}, \bar{v}} \rightarrow \min, \quad (1)$$

где электрические толщины \bar{v} и импедансы \bar{p} всех слоев СДС.

По многим теоретическим и особенно практическим соображениям полезно дополнить постановку задачи синтеза в смысле П.Л. Чебышева, наложив дополнительные ограничения на электродинамические параметры задачи \bar{p} и записав математическую постановку задачи в виде

$$\max_{\mathcal{H}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{H}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)|_{\bar{p}, \bar{v}} \rightarrow \min \text{ при} \quad (2)$$

$$\bar{v} \subset \mathcal{N}_N \text{ и } \bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N,$$

где электрические толщины \bar{v} есть элементы пространства всех возможных электрических толщин \mathcal{N}_N , а импедансы \bar{p} слоев СДС есть элементы заданного параллелепипеда \mathbf{P}_N из пространства всех возможных импедансов \mathcal{P}_N материалов сло-

истых систем. С учетом реализуемости на практике импедансы материалов слоев удовлетворяют двойному неравенству: $\hat{p} \leq p_j \leq \check{p}$, $j = 1, 2, \dots, N$, где p_j – импедансы слоев, а N – порядок фильтра. Такую постановку задачи синтеза СДФ естественно называть задачей оптимизации в смысле П.Л. Чебышева с ограничениями.

Определение. Идеал фильтра $\tilde{R}(\kappa)$ [$\tilde{T}(\kappa)$] будем называть правильным на заданном интервале волновых чисел $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$, если он может быть на этом интервале сколь угодно точно равномерно приближен $R(\kappa)$ [$T(\kappa)$], реализуемыми СДС в классе рассматриваемых. Это естественное требование корректности идеальных характеристик формализуется в виде предположения о том, что $\tilde{R}(\kappa)$ [$\tilde{T}(\kappa)$] принадлежит замыканию в метрике $\mathbb{C}[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ множества всех возможных коэффициентов отражения (пропускания) СДС рассматриваемого класса.

Тогда, как будет показано далее, вычислительная сложность функционала качества определяется

дробно-рациональной структурой энергетического коэффициента отражения от любой СДС данного класса и может быть существенно уменьшена при помощи эффективной процедуры построения идеала не для сложных коэффициентов отражения или пропускания $R(\kappa)$ [$T(\kappa)$], а для квадратных профилирующих функций, введенных в [1, 2, 14], что существенно упрощает анализ и решение соответствующих оптимизационных задач.

По сравнению с работами [1, 2, 14], в постановку задачи синтеза в данной работе включены принципиальные ограничения на допустимые для задачи синтеза параметры материалов слоев. Проведен представляющий самостоятельный интерес анализ прямой задачи об описании всех возможных в СДС с кусочно-непрерывными физическими параметрами плоских электромагнитных полей с плоскостями постоянной фазы, параллельными слоям СДС. Ранее в [1, 2, 14] подобный анализ был проведен только для сред с кусочно-постоянными параметрами.

В этой части работы особенно важен факт доказательства основного энергетического тождества для СДС без потерь (17) (см. [1, 2, 14]), в отличие от обычно постулируемой формы закона сохранения энергии¹:

$$R(\kappa) + T(\kappa) \equiv 1. \quad (3)$$

Замечание. Доказанное в работе основное энергетическое тождество для СДС без потерь (17), эквивалентное в своей основе тождеству (3), показывает, что все спектральные характеристики слоистых диэлектрических систем с кусочно-непрерывными параметрами $\epsilon(x) > 0$, $\mu(x) > 0$ от координаты x , отсчитываемой от поверхности покрытия вглубь слоя, определяются исключительно величинами скачков функций $\epsilon(x_j)$, $\mu(x_j)$ в точках x_j разрывов этих функций и совершенно не зависят от “непрерывного” поведения этих функций между точками разрыва.

Более детально вычислительные аспекты предлагаемого подхода к задачам синтеза полосовых фильтров будут рассмотрены в наших следующих работах.

2. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть часть пространства \mathbb{R}^3 между двумя параллельными плоскостями π и π' , расстояние между которыми d , $d > 0$, заполнена диэлектрической средой, параметры которой – диэлектрическая и магнитная проницаемости – являются

кусочно-непрерывными функциями от координаты x оси Ox декартовой системы координат, направленной по нормали от π к π' . Начало координат находится на плоскости π :

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon(x) \quad \text{и} \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu(x), \quad 0 \leq x \leq d,$$

с конечным, общим для обеих функций, числом точек разрыва первого рода, которые будем обозначать $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_N = d$, не заботясь о том, какая из двух функций, $\epsilon(x)$ или $\mu(x)$, терпит разрыв в точке a_j . Интервалы непрерывности обеих функций $\epsilon(x)$ и $\mu(x)$ будем обозначать

$$\Delta_j \stackrel{\text{def}}{=} (a_{j-1}, a_j), \quad (j = 1, \dots, N).$$

Пусть полупространство \mathbb{R}_-^3 слева от π заполнено однородной средой с диэлектрической ϵ_- и магнитной μ_- проницаемостями, а полупространство \mathbb{R}_+^3 справа от π' – однородной средой с проницаемостями ϵ_+ и μ_+ .

Прямая задача о распространении плоских электромагнитных волн в пространстве \mathbb{R}^3 , заполненном слоистым диэлектриком, состоит в описании класса всех возможных плоских электромагнитных полей в определенной выше СДС: требуется, во-первых, указать количество свободных параметров, определяющих все возможные в указанной системе электромагнитные поля, и, во-вторых, определить коэффициенты отражения и пропускания от СДС $[0, d]$ слева и справа от нее.

Известно (см., например, [9]), что комплексные амплитуды векторов электрической и магнитной напряженностей

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} u(x)\vec{y}_0 \quad \text{и} \quad \vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} v(x)\vec{z}_0$$

плоского электромагнитного поля (зависимость от времени – $\exp(-i\omega t)$) с волновым вектором \vec{k} , параллельным оси Ox внутри каждого интервала непрерывности Δ_j функций $\epsilon(x)$ и $\mu(x)$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, записанной в матричной форме, которые получаются для плоских волн из общих уравнений Максвелла:

$$\vec{u}'_j = \mathbf{P}_j(x)\vec{u}_j(x), \quad \text{где} \quad \vec{u}_j = \begin{pmatrix} u_j(x) \\ v_j(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_j(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\kappa\mu_j(x) \\ i\kappa\epsilon_j(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Кроме того, на каждой плоскости π_j : $x = a_j$ разрыва коэффициентов $\epsilon(x)$ или $\mu(x)$ должны выполняться вытекающие из уравнений Максвелла электродинамические граничные условия, совпа-

¹ Распространение результатов данной работы на анализ, например “наклонного” распространения плоских волн в СДС, как в [15] не представляет трудностей.

дающие в нашем случае с условиями непрерывности амплитуд электрического и магнитного полей:

$$\bar{u}(a_j - 0) = \bar{u}(a_j + 0): \begin{matrix} u(a_j - 0) = u(a_j + 0) \\ v(a_j - 0) = v(a_j + 0) \end{matrix}, \quad (5)$$

где $(a_j - 0)$ и $(a_j + 0)$ – пределы слева и справа в точках разрыва $a_j, j = 0, 1, 2, \dots, N$, коэффициентов $\epsilon(x)$ или $\mu(x)$ уравнений Максвелла.

Всевозможные плоские электромагнитные поля рассматриваемого выше типа слева и справа от СДС $[0, d]$ (в полупространствах \mathbb{R}_\mp^3) определяются уравнением (4) с постоянными коэффициентами ϵ_-, μ_- слева от плоскости π и ϵ_+, μ_+ – справа от π' .

Поэтому в полупространствах \mathbb{R}_\mp^3 общее решение системы (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}_\mp(x - x_0^\mp) = & C_0^\mp \begin{pmatrix} 1 \\ p_\mp \end{pmatrix} \exp(i\kappa n_\mp(x - x_0^\mp)) + \\ & + C_1^\mp \begin{pmatrix} 1 \\ -p_\mp \end{pmatrix} \exp(-i\kappa n_\mp(x - x_0^\mp)), \end{aligned}$$

где величины, помеченные индексами минус и 0, относятся к плоской волне, распространяющейся в \mathbb{R}_-^3 к плоскости π , а с индексами минус и 1 соответствуют плоской волне, распространяющейся в \mathbb{R}_-^3 от плоскости π^2 .

Аналогично этому в (4) все величины, помеченные индексами + и 0, относятся к плоской волне, распространяющейся в \mathbb{R}_+^3 от плоскости π' , а с индексами + и 1 соответствуют плоской волне, распространяющейся в \mathbb{R}_+^3 к плоскости π' .

Замечание. Вектор Пойнтинга $\vec{W} = [\vec{E}, \vec{H}^*]$ для волны в \mathbb{R}_-^3 , распространяющейся к плоскости π , равен $p_- |C_0^-|^2 \vec{x}_0$, а для распространяющейся от π , равен $-p_- |C_1^-|^2 \vec{x}_0$. Аналогично, вектор Пойнтинга для волны в \mathbb{R}_+^3 , распространяющейся к плоскости π' , равен $-p_+ |C_1^+|^2 \vec{x}_0$, а для распространяющейся от π' равен $p_+ |C_0^+|^2 \vec{x}_0$.

² В физической литературе для волны, распространяющейся к какой-либо плоскости, обычно применяется термин “падающая” (на эту плоскость) волна, а для волны, распространяющейся от плоскости – термин “отраженная” (от этой плоскости) волна.

Общее решение уравнений (4) в \mathbb{R}_\mp^3 в векторно-матричной записи имеет вид

$$\bar{u}_\mp(x - x_0^\mp) = \mathbf{B}_\mp \mathbf{S}_\mp (x - x_0^\mp) \bar{\mathbf{C}}_\mp, \quad \bar{\mathbf{C}}_\mp = \begin{pmatrix} C_0^\mp \\ C_1^\mp \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $x_0^- = 0, x_0^+ = d$. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\mp &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_\mp & -p_\mp \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_\mp(x - x_0^\mp) &= \\ &= \begin{pmatrix} \exp(i\kappa n_\mp(x - x_0^\mp)) & 0 \\ 0 & \exp(-i\kappa n_\mp(x - x_0^\mp)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

В (6) и (7) введены обозначения: λ_s^\mp – собственные значения и $\vec{l}_s^\mp, (s = 0, 1)$ – собственные векторы матриц \mathbf{P}_\mp для полупространств \mathbb{R}_\mp^3 , имеют вид

$$\lambda_s^\mp = (-1)^s i\kappa n_\mp, \quad \vec{l}_s^\mp = \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^s p_\mp \end{pmatrix}, \quad (s = 0, 1),$$

где $n_\mp = (\epsilon_\mp \mu_\mp)^{1/2}, p_\mp = \left(\frac{\epsilon_\mp}{\mu_\mp}\right)^{1/2}$. Таким образом, в соответствии с (5) на плоскостях π и π' справедливы равенства $\mathbf{B}_- \bar{\mathbf{C}}_- = \bar{u}_1(0)$ и $\bar{u}_N(d) = \mathbf{B}_+ \bar{\mathbf{C}}_+$.

3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Лемма. Матрицы \mathbf{B}_\mp обладают свойством:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\mp^* \mathbf{J}_0 \mathbf{B}_\mp &= 2p_\mp \mathbf{J}_1, \quad \text{где } \mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{J}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \text{матрицы Паули.} \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство леммы проводится перемножением нужных матриц.

Для произвольного решения $\bar{u}(x)$ (4) рассмотрим квадратичную форму:

$$\begin{aligned} (\bar{u}^* \mathbf{J}_0 \bar{u})(x) &\equiv u(x) v^*(x) + u^*(x) v(x) \equiv \\ &\equiv 2 \operatorname{Re}[u(x) v^*(x)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Лемма (основная). Для произвольного решения $\bar{u}(x)$ системы уравнений (4) на всяком интервале непрерывности ее коэффициентов $\Delta_j, j = 1, \dots, N$, квадратичная форма (9) сохраняет постоянное значение:

$$(\bar{u}^* \mathbf{J}_0 \bar{u})(x) \equiv \text{const}. \quad (10)$$

Доказательство. Производная от квадратичной формы (7) с учетом уравнений (4) тождественно равна нулю на всяком интервале непрерывности Δ_j

коэффициентов системы уравнений (4) в силу тождества:

$$\mathbf{P}^*(x)\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_0\mathbf{P}(x) \equiv 0.$$

4. АМПЛИТУДНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Для решения прямой задачи используем представление решения (4) с начальным условием $\bar{u}_j(a_j) = \bar{u}_j^{(0)}$ на всяком интервале $\Delta_j, j = 1, 2, \dots, N$:

$$\bar{u}_j(x) = \mathbf{M}_j(x)\bar{C}_j, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{M}_j(x) = \begin{pmatrix} m_{00}(x) & m_{01}(x) \\ m_{10}(x) & m_{11}(x) \end{pmatrix}$$

— фундаментальная матрица, столбцы которой \bar{m}_0 и \bar{m}_1 образуют фундаментальную систему решений (4) на Δ_j ,

$$\bar{C}_j = \begin{pmatrix} C_0^{(j)} \\ C_1^{(j)} \end{pmatrix}$$

— постоянный на $\Delta_j, j = 1, 2, \dots, N$ вектор коэффициентов — комплексных амплитуд “волн” \bar{m}_0 и \bar{m}_1 .

Чтобы получить представление (11), достаточно решить матричное дифференциальное уравнение

$$\mathbf{M}'_j = \mathbf{P}_j(x)\mathbf{M}_j(x) \quad (12)$$

с начальным условием:

$$\mathbf{M}_j(a_j) = \mathbf{M}_j^0, \quad \det(\mathbf{M}_j^0) \neq 0. \quad (13)$$

Далее рассмотрим два разных представления фундаментальных матриц $\mathbf{M}_j(x)$ в (12), $j = 1, 2, \dots, N$, отвечающих разным начальным условиям (13). Во-первых, будем говорить про “тригонометрическое” представление (t -представление)³, когда $\mathbf{M}_j(a_j) = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} — единичная матрица, и, во-вторых, про “экспоненциальное” представление (e -представление), когда

$$\mathbf{M}_j(a_j) = \mathbf{V}_j, \quad \text{где } \mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_j(a_j) & -p_j(a_j) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

а $p_j(a_j)$ — величина импеданса в правом конце $\Delta_j, j = 1, 2, \dots, N$.

³ Фундаментальная матрица для t -представления была названа Абеде характеристической матрицей j -го слоя [9, с. 85].

В силу тождества (10) и нужного начального условия (13) на интервале Δ_j :

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{M}^{(t)})^* \mathbf{J}_0 \mathbf{M}^{(t)})(x) \equiv \mathbf{J} \\ & \text{в } t\text{-представлении,} \\ & ((\mathbf{M}^{(e)})^* \mathbf{J}_0 \mathbf{M}^{(e)})(x) \equiv 2p(a_j) \mathbf{J}_1 \\ & \text{в } e\text{-представлении.} \end{aligned} \quad (15)$$

Из этих тождеств следует невырожденность матриц $\mathbf{M}_j^{(e)}(x), \mathbf{M}_j^{(t)}(x)$ для всякого x из $\Delta_j, j = 1, 2, \dots, N$, а также выражения для постоянных векторов \bar{C}_j :

$$\begin{aligned} \bar{C}_j^{(t)} &= \bar{u}_j^{(0)} \quad \text{в } t\text{-представлении,} \\ \bar{C}_j^{(e)} &= \mathbf{B}_j^{-1} \bar{u}_j^{(0)} \quad \text{в } e\text{-представлении.} \end{aligned} \quad (16)$$

Представления (15) аналогичны представлению (8) для всякого x из Δ_j .

Используя первое из тождеств (13) и непрерывность электромагнитного поля в каждой точке разрыва коэффициентов уравнений (4), получим основное энергетическое тождество, показывающее сохранение направления и величины потока энергии электромагнитного поля слева от СДС $[0, d]$ и справа от нее:

$$p_- (|C_0^-|^2 - |C_1^-|^2) \equiv p_+ (|C_0^+|^2 - |C_1^+|^2). \quad (17)$$

Из последнего тождества видно, что решение прямой задачи для \mathbb{R}^3 зависит от двух произвольных постоянных, в качестве которых можно взять \bar{C}_- или \bar{C}_+ .

При интерпретации решения прямой задачи как задачи о распространении плоской электромагнитной волны через слоистую систему \mathbb{R}^3 слева направо удобно выбрать произвольные постоянные в виде

$$C_0^+ = 1, \quad C_1^+ = 0, \quad (18)$$

где второе условие — отсутствие отражения на $+\infty$, а первое — нормировка “по прохождению” волны, прошедшей через СДС $[0, d]$ с кусочно-непрерывными параметрами.

С учетом указанного выбора свободных параметров тождество (17) примет вид

$$|C_0^-|^2 - |C_1^-|^2 \equiv \theta, \quad (19)$$

где $\theta = p_+/p_-$, из которого вытекает ряд важных следствий для рассматриваемых полей: $|C_0^-|^2 = |C_1^-|^2 + \theta \geq \theta$, т.е. оценка величины $|C_0^-|^2$ снизу: $|C_0^-|^2 \geq \theta > 0$, в силу которой для всех k обязательна конечность энергетических коэффициентов

отражения слева от СДС и пропускания справа от СДС с кусочно-непрерывными физическими параметрами:

$$R_{-}(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|C_{1}^{-}(\kappa)|^2}{|C_{0}^{-}(\kappa)|^2}, \quad T_{+}(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\theta}{|C_{0}^{-}(\kappa)|^2}, \quad (20)$$

и, как следствие этого и (17), оказывается обоснованным тождество (3).

Подстановка решений (12) в условия непрерывности (5) приводит к основной системе уравнений (см. [1, 2, 14]) относительно амплитуд

прямой и обратной волн $\vec{C}_j = \begin{pmatrix} C_0^{(j)} \\ C_1^{(j)} \end{pmatrix}$ в j -м слое ($j = 0, 1, \dots, N + 1$):

$$\mathbf{M}_j \vec{C}_j = \mathbf{M}_{j+1} \vec{C}_{j+1},$$

где $j = 0$ отвечает индексу минус, а $j = N + 1$ индексу плюс в предыдущем тексте.

Определение. При распространении волны слева направо будем называть профилирующими функциями следующие функции от волнового числа κ :

$$F_0(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} |C_0^{-}(\kappa)|^2 \quad \text{и} \quad F_1(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} |C_1^{-}(\kappa)|^2.$$

Эти функции, а также аналогичные им при распространении волны справа налево, являются функционалами от кусочно-непрерывных параметров СДС $[0, d]$. В силу (17), будет справедливо тождество

$$F_0(\kappa) - F_1(\kappa) = \theta, \quad \text{где} \quad \theta = \frac{p_{+}}{p_{-}},$$

$$R_{-}(\kappa) = \frac{F_1(\kappa)}{F_0(\kappa)}, \quad T_{+}(\kappa) = \frac{\theta}{F_0(\kappa)}.$$

Замечание. При интерпретации решения прямой задачи, как задачи о распространении плоской электромагнитной волны через слоистую систему справа налево, удобно выбрать произвольные постоянные в (14) в виде $C_0^{-} = 0$, $C_1^{-} = 1$, где первое условие означает отсутствие отражения на $-\infty$, а второе – нормировку “по прохождению” волны, прошедшей через кусочно-непрерывную СДС.

С учетом указанного выбора свободных параметров и изменения знаков тождество (17) примет вид

$$|C_1^{+}|^2 - |C_0^{+}|^2 \equiv \theta^{-1}, \quad (21)$$

из которого, как и выше, вытекает ряд следствий для рассматриваемых полей: $|C_1^{+}|^2 = |C_0^{+}|^2 + \theta^{-1} \geq \theta^{-1}$, т.е. оценка величины $|C_1^{+}|^2$ снизу: $|C_1^{+}|^2 \geq \theta^{-1} > 0$, в си-

лу которой для всех κ следует не обращение в нуль: $|C_1^{+}|^2 > 0$, и вытекающая из этого факта конечность энергетических коэффициентов отражения справа от СДС и пропускания слева от СДС с кусочно-непрерывными физическими параметрами:

$$R_{+}(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|C_0^{+}(\kappa)|^2}{|C_1^{+}(\kappa)|^2}, \quad T_{-}(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\theta^{-1}}{|C_1^{+}(\kappa)|^2},$$

Следствием этих обозначений и (17) выступает обоснование тождества (2), которое, как и при распространении волны слева направо, позволяет в случае правильных идеалов для коэффициентов отражения (пропускания) обосновать переход от стандартных постановок задач синтеза к их эффективным постановкам.

5. ОБОСНОВАНИЕ ПЕРЕХОДА К ЭФФЕКТИВНЫМ ПОСТАНОВКАМ ЗАДАЧ СИНТЕЗА

Лемма. Если идеальные спектральные характеристики $\tilde{R}(\kappa)$ и $\tilde{T}(\kappa)$ связаны между собой соотношением $\tilde{R}(\kappa) + \tilde{T}(\kappa) \equiv 1$, то оба идеала могут быть правильными только одновременно.

Лемма. Если хотя бы один из идеалов $\tilde{R}_{-}(\kappa)$ или $\tilde{T}_{+}(\kappa)$ имеет представление

$$\tilde{R}_{-}(\kappa) = \frac{\tilde{F}_1(\kappa)}{\tilde{F}_0(\kappa)} \left[\tilde{T}_{+}(\kappa) = \frac{\theta}{\tilde{F}_0(\kappa)} \right],$$

где $\tilde{F}_1(\kappa)$ – идеал для профилирующей функции $F_1(\kappa)$, а $\tilde{F}_0(\kappa)$ – идеал для профилирующей функции $F_0(\kappa)$, то правильность любого из идеалов $\tilde{R}_{-}(\kappa)$, $\tilde{T}_{+}(\kappa)$, $\tilde{F}_0(\kappa)$ или $\tilde{F}_1(\kappa)$ влечет правильность остальных идеалов из перечисленных.

Формулы пересчета идеала для стандартного коэффициента отражения $\tilde{R}_{-}(\kappa)$ в идеалы для профилирующих функций $\tilde{F}_1(\kappa)$ и $\tilde{F}_0(\kappa)$ таковы:

$$\tilde{R}_{-}(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{F}_1(\kappa)}{\tilde{F}_0(\kappa)}, \quad \tilde{F}_0(\kappa) - \tilde{F}_1(\kappa) = \theta. \quad (22)$$

Из первой формулы следует $\tilde{F}_1(\kappa) = \tilde{R}_{-}(\kappa) \tilde{F}_0(\kappa)$ и, подставляя это соотношение во вторую формулу, получаем

$$\tilde{F}_0(\kappa) = \frac{\theta}{1 - \tilde{R}_{-}(\kappa)} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_1(\kappa) = \frac{\tilde{R}_{-}(\kappa)}{1 - \tilde{R}_{-}(\kappa)} \theta.$$

В приведенных формулах для оценки точности замены на интервале $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ исходного неравенства $|\mathcal{R}(\kappa) - \tilde{R}_{-}(\kappa)| < \varepsilon$ на $|F_1(\kappa) - \tilde{F}_1(\kappa)| < \delta(\varepsilon)$,

нужно использовать модуль непрерывности функции

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{x + \theta},$$

производная которой на $(0, +\infty)$ монотонно спадает от $y'(0) = \theta^{-1}$ до нуля, с заменой ее аргумента x на $F_1(\kappa)$, а ее значений y на $R(\kappa)$.

6. ЗАПИСЬ УПРОЩЕННОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ПО П.Л. ЧЕБЫШЕВУ

Задача оптимального синтеза СДФ в смысле П.Л. Чебышева (1) для энергетического коэффициента отражения в силу тождества (3) полностью эквивалентна такой же задаче для энергетического коэффициента пропускания, если $\tilde{T}(\kappa) = 1 - \tilde{R}(\kappa)$. Аналогично, в силу (17) эквивалентны между собой задачи оптимального синтеза для каждой из профилирующих функций $F_0(\kappa), F_1(\kappa)$.

Тождество

$$\begin{aligned} |R_-(\kappa) - \tilde{R}_-(\kappa)| &\equiv |T_+(\kappa) - \tilde{T}_+(\kappa)| \equiv \\ &\equiv \frac{\theta}{F_0(\kappa)\tilde{F}_0(\kappa)} |F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)| \end{aligned} \quad (23)$$

позволяет дать простую двухстороннюю оценку для функционала задачи (1) через аналогичные функционалы для профилирующих функций:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\alpha\beta} |F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)| &\leq |R_-(\kappa) - \tilde{R}_-(\kappa)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\theta} |F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)|, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\theta \leq F_0(\kappa) \leq \alpha$, $\theta \leq \tilde{F}_0(\kappa) \leq \beta$, что позволяет говорить об эквивалентности (1) и существенно более простой задачи:

$$\max_{\mathcal{H}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{H}_2} |F_0(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{F}_0(\kappa)| \rightarrow \min_{\bar{p}, \bar{v}}$$

Аналогичный переход от (24) к его аналогу:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\alpha} v(\kappa) |F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)| &\leq |R(\kappa) - \tilde{R}(\kappa)| \leq \\ &\leq v(\kappa) |F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)|, \end{aligned}$$

где $v(\kappa) = 1/\tilde{F}_0(\kappa)$ — фиксированная весовая функция для равномерной метрики, позволяет говорить об асимптотической (при $n \rightarrow +\infty$) эквивалентности задачи (1), аналогичной “весовой” задаче для профилирующей функции $\tilde{F}_0(\kappa)$.

Замечание. Неравенства (24) и следующее за ним, справедливы для всех \bar{p}, \bar{v} из пространств $\mathcal{P}_N, \mathcal{N}_N$ соответственно и, следовательно, справедливы при замене пространства \mathcal{P}_N на его подмножество — параллелепипед \mathbf{P}_N .

Таким образом, задача оптимального синтеза СДФ в смысле П.Л. Чебышева с ограничениями (2) для энергетического коэффициента отражения или пропускания в силу тождества (3), с учетом проведенных выше рассуждений, эквивалентна такой же задаче для профилирующих функций.

ВЫВОДЫ

Проведен анализ прямой задачи о распространении плоских электромагнитных волн в слоистой среде в пространстве \mathbb{R}^3 с кусочно-непрерывными физическими параметрами $\epsilon(x)$ и $\mu(x)$, являющийся единственно надежной основой для постановки и решения всех возможных оптимизационных и обратных задач, связанных с этой тематикой. При указанных предположениях, установлены основные для всей теории слоистых сред тождества (19) и (23).

Приведены явные формулы пересчета для “идеалов” энергетических коэффициентов отражения и пропускания в “идеалы” для профилирующих функций.

Обоснована эквивалентность традиционных постановок задач синтеза слоистых диэлектрических фильтров по их “желаемым” спектральным характеристикам типа энергетических коэффициентов отражения и пропускания, названных в работе “идеалами” для соответствующих спектральных характеристик, значительно более простым по структуре функционалам — задачам синтеза по “идеалу” для профилирующих функций.

Сформулированы принципиально новые постановки задач синтеза полосовых фильтров при помощи идеалов для профилирующих функций с учетом практических ограничений на импедансы слоев реализующих фильтры СДС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. № 2. С. 24.
2. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Нелинейный мир. 2016. № 2. С. 38.
3. Худак Ю.И., Парфенов Д.В., Музылев Н.В., Хачлаев Т.С. // Росс. технол. журн. 2020. Т.8. № 5. С. 26.
4. Гласко В.Б., Тихонов А.Н., Тихонравов А.В. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 1. С. 135.
5. Тихонравов А.В. // ДАН СССР. 1985. Т. 28. № 3. С. 582.
6. Macleod H.A. Thin-Film Optical Filters. Boca Raton: CRC Press, 2018.

7. *Baumeister P.W.* Optical Coating Technology. Bellingham: SPIE Press, 2004.
8. Современная теория фильтров и их проектирование / Под ред. Г. Темеша и С. Митра. М.: Мир, 1977.
9. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973.
10. *Кард П.Г.* Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. Таллин: Валгус, 1971.
11. *Furman Sh.A., Tikhonravov A.V.* Basics of Optics of Multilayer Systems. Gif-sur Yvette: Editions Frontiers, 1992.
12. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматлит, 1963.
13. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
14. *Худак Ю.И.* // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 5. С. 1.
15. *Худак Ю.И.* // Докл. РАН. 2015. Т. 467. № 2. С. 149.
16. *Худак Ю.И.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 2. С. 325.
17. *Худак Ю.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 4. С. 499.
18. *Худак Ю.И.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т.26. № 7. С. 1105.
19. *Akhmedov I., Hudak Yu.* // Proc. of the 8th Congress of the Int.l Soc. for Analysis, its Applications, and Computation. Moscow. 22–27 Aug. 2011. М.: Peoples' Friendship Univ. of Russia, 2012. V. 1. P. 128.
20. *Schuster K.* // Annalen der Physik. 1949. F. 6. B. 4. S. 352.