

ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ НА ГРАНИЦЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИАГРАММЫ МАТЬЕ

© 2022 г. Е. В. Мамонтов^а, Р. Н. Дятлов^{а, *}

^аРязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина,
ул. Гагарина, 59/1, Рязань, 390005 Российская Федерация

*E-mail: kaitp@list.ru

Поступила в редакцию 24.06.2021 г.

После доработки 29.07.2021 г.

Принята к публикации 07.09.2021 г.

Исследованы колебания ионов в суперпозиции быстроосциллирующих квадрупольных и однородных статических полей при инерционном сканировании постоянной составляющей квадрупольного поля к границе диаграммы устойчивости Матье. Показано, что при сканировании параметра Матье a колебания гармонического осциллятора описываются дифференциальным уравнением Эйри. Получены аналитические выражения для свободной и вынужденной составляющих колебаний ионов при сканировании постоянной составляющей ВЧ-поля из глубины диаграммы устойчивости к одной из ее границ. Установлено, что при достижении границы под действием однородного поля происходит возбуждение монополярных быстронарастающих колебаний. Показано, что функция возбуждения, формируемая под действием однородного поля, имеет большую скорость изменения по сравнению со свободной составляющей, зависящей от случайных начальных параметров ионов. Получены выражения для оценки разрешающей способности метода.

DOI: 10.31857/S0033849422010065

ВВЕДЕНИЕ

В теории и практике колебательных систем используется явление резонансного возбуждения колебаний, когда под действием периодической силы амплитуда колебаний ограничено или неограниченно нарастает. Это явление в радиоэлектронике используется для усиления или выделения сигналов [1], а в масс-спектрометрии – для разделения ионов по удельному заряду e/m [2, 3]. В последнем случае колебательной средой является быстро осциллирующее электрическое поле с линейной возвращающей силой, образуемое квадрупольными ионно-оптическими системами (ИОС). Колебания ионов в таких полях в зависимости от параметров поля и частиц могут быть устойчивыми и неустойчивыми [4, 5]. Эти свойства квадрупольных ВЧ-полей, а также их способность осуществлять пространственно-временную фокусировку, используются в аналитических приборах и системах для накопления, транспортировки и сепарации заряженных частиц. Известно несколько способов разделения ионов по e/m в квадрупольных ВЧ-полях, на основе которых выпускаются коммерческие приборы для точного и оперативного микроанализа вещества. Приемлемые для серийных анализов параметры и доступная цена обеспе-

чивают аналитическим приборам с квадрупольными полями до 30% мирового рынка масс-спектрометрической продукции [6]. Но возможности собственно квадрупольных ВЧ-полей для усовершенствования и повышения конкурентоспособности приборов этого класса исчерпаны. Дальнейшим развитием направления является использование квадрупольных полей в композициях с другими полями. На свойствах колебаний в квадрупольных ВЧ-полях с наложенными на них возбуждающими полями основан метод резонансного вывода ионов [2, 3]. Но нерегулярность и малая скорость нарастания функции возбуждения во время резонанса ограничивает разрешающую способность метода [7]. Высокая скорость нарастания колебаний достигается при осевом выводе ионов из квадрупольной ловушки на границе устойчивости диаграммы Матье. Но в отсутствие возбуждающего воздействия из-за разброса начальных параметров частиц разрешающая способность метода оказывается невысокой.

В данной работе позитивные свойства методов с резонансным выводом ионов используются для масс-сепарации ионов в суперпозиции квадрупольных и однородных полей с возбуждением колебаний частиц на границе устойчивости диа-

граммы Матье. Возбуждение колебаний ионов на границе стабильности улучшает форму функции возбуждения и увеличивает скорость ее нарастания на резонансе, что способствует повышению разрешающей способности масс-анализа. Метод может быть реализован с использованием технологии планарных дискретных электродов, позволяющей образовывать различные композиции электрических полей [8].

1. ДВИЖЕНИЕ ИОНОВ В ИНЕРЦИОННО-НЕСТАЦИОНАРНЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ ПОЛЯХ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ КОЛЕБАНИЙ НА ГРАНИЦЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим задачу движения заряженных частиц в суперпозиции быстроосциллирующих и медленно изменяющегося квадрупольных полей при наложении на них однородного возбуждающего поля. Распределение потенциала для этого случая имеет вид

$$\varphi(x, y, t) = \frac{x^2 - y^2}{r_0^2} [U(t) + V \cos \omega t] + \frac{u_b(t)}{2r_0} y, \quad (1)$$

где r_0 – геометрический параметр квадрупольной ИОС, V , ω и $U(t)$ – амплитуда, частота и медленно изменяющаяся составляющая питающего напряжения, $u_b(t)$ – возбуждающее напряжение. Движение заряженных частиц в поле потенциала (1) по координате возбуждения y описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\omega^2}{4} [a(t) - 2q \cos 2t] y = -f(t), \quad (2)$$

где e и m – заряд и масса ионов, $f(t) = eu_b(t)/2r_0m$ – возбуждающее воздействие, $a = 8eU/r_0^2\omega^2m$, $q = 4eV/r_0^2\omega^2m$ – параметр Матье. Полагаем, что развертка масс-анализатора осуществляется изменением постоянной составляющей питающего напряжения по линейному закону

$$U(t) = v_U \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где v_U – скорость изменения напряжения, T – длительность одного цикла развертки масс. Также линейно в процессе развертки будет изменяться значение параметра Матье

$$a(t) = \frac{2q}{V} U(t). \quad (4)$$

При этом поле (1) и, соответственно, уравнение (2) будут нестационарными. Если выполняется $T \gg 2\pi/\omega$, то стационарность можно считать инерционной.

При постоянном $a(t) = \text{const}$ и в отсутствие возбуждения $u_b = 0$ выражение (2) является дифференциальным уравнением Матье, решения ко-

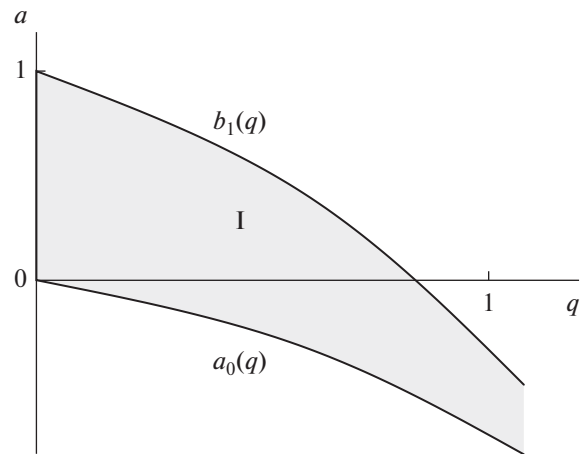


Рис. 1. Первая устойчивая область диаграммы Матье.

торого в зависимости от значений параметров a и q могут быть устойчивыми или неустойчивыми [4]. Линии $a_m(q)$ и $b_{m+1}(q)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ делят область значений параметров a и q на области устойчивости и неустойчивости. С приближением к границам устойчивости колебания быстро, а при их пересечении – неограниченно нарастают. Это свойство квадрупольных быстроосциллирующих полей может быть использовано для резонансного масс-разделения ионов на границах диаграммы устойчивости Матье.

Эффективно эта задача решается в области устойчивости диаграммы Матье, ограниченной кривыми $a_0(q)$ и $b_1(q)$ (далее – область I) [4]. Общее решение дифференциального уравнения Матье на границах $a_0(q)$ и $b_1(q)$ является суммой периодических $se_0(z)$ и $se_1(z)$ и непериодических $fe_0(z)$ и $fe_1(z)$ функций. Особенностью границы $a_0(q)$ является монополярность функций $se_0(z) > 0$ и $fe_0(z)$ и, соответственно, общего решения $y(z) = Ace_0(z) + Bfe_0(z) > 0$, где A и B – постоянные интегрирования. Поэтому возбуждение колебаний на границе $a_0(q)$ предпочтительнее, так как оно реализуется в полупространстве $y \geq 0$.

Граница устойчивости $a_0(q)$ описывается выражением [4]

$$a_0(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 - \frac{29}{2304}q^6 + Oq^8. \quad (5)$$

Для значений $q < 0.7$, при которых возможен режим возбуждения колебаний на границе области I устойчивости диаграммы Матье, с погрешностью менее 5% можно считать $a_0(q) \approx -q^2/2$.

Эффективность масс-сепарации ионов с резонансным возбуждением колебаний зависит от соотношения свободной $y_1(t)$ и вынужденной $y_2(t)$ составляющих решения дифференциального уравнения (2). Свободная составляющая $y_1(t)$ является

функцией со случайными параметрами – координатами y_0 и скоростями v_{0y} ионов, а вынужденная составляющая $y_2(t)$ – детерминированной функцией. Поэтому высокое разрешение метода достигается при выполнении в момент резонанса t_0 условия $y_2(t) \gg y_1(t)$.

Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ определим, используя метод эффективного потенциала, предполагающего представление быстроосциллирующего квадрупольного поля моделью статического поля псевдопотенциала [5, 6]

$$\varphi_p(x, y, t) = \frac{U(t) + U_p}{r_0^2} x^2 + \frac{U_p - U(t)}{r_0^2} y^2 + \frac{u_b(t)}{2r_0} y, \quad (6)$$

где $U_p = eU^2/r_0^2 \omega m \approx qV/4$ – псевдопотенциал квадрупольного ВЧ-поля. В этом случае уравне-

ние (2) преобразуется в дифференциальные уравнения нестационарного гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \Omega^2(t)y = f(t), \quad (7)$$

где $\Omega(t) = \sqrt{2e[U_p - U(t)]/r_0^2 m}$ – собственная частота гармонического осциллятора. В области значений параметров $a \leq 0$, $q \leq 0.7$, где реализуется режим резонансного вывода у границы $a_0(q)$, собственная частота Ω осциллятора близка к секулярной частоте Ω_s колебаний ионов в квадрупольном ВЧ-поле [5].

Секулярная частота $\Omega_s = \beta \omega/2$ определяется параметром стабильности β , который связан с параметром Матье a соотношением [4]

$$\beta \approx \sqrt{a - \frac{(1-a)}{2(1-a)^2 - q^2} q^2 - \frac{5a+7}{32(a-1)^2(a-4)^4} q^4 - \dots}. \quad (8)$$

В указанной выше области параметров a и q можно считать $\beta \approx \sqrt{a - a_0} = \sqrt{\Delta a}$. Точность приближения возрастает при $a \rightarrow a_0$.

На границе устойчивости $a_0(q)$ параметр $\beta = 0$ и частоты $\Omega_s = \Omega = 0$. При этом свободная составляющая решения дифференциального уравнения (7) из гармонической функции вырождается в линейную

$$y_1(t) = C_1 + C_2 t. \quad (9)$$

При $f(t) = f_0$ вторым независимым решением дифференциального уравнения (7) является функция $y_2(t) = a + bt + ct^2$. Отсюда следует, что возбуждение колебаний ионов в квадрупольном ВЧ-поле на границе устойчивости $a_0(q)$ может осуществляться под действием однородного статического поля $c f_0 = eU_b/2r_0 m$.

При линейном сканировании параметра a с учетом (8) для функции частоты получаем

$$\Omega(t) \approx \Omega_0 \sqrt{1 - t/t_0}, \quad (10)$$

где $\Omega_0 \approx q\omega/2\sqrt{2}$ – начальное значение частоты, $t_0 = qV/4v_U$ – время достижения параметром a граничного значения $a(t_0) = a_0 \approx q^2/2$. Тогда дифференциальное уравнение (7) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \Omega_0^2(1 - t/t_0)y = f_0. \quad (11)$$

Заменой переменных $t = (z/\varphi_0^{2/3} + 1)/t_0$ и $y = y_m W$, где $\varphi_0 = \Omega_0 t_0$, $y_m = e\pi U_b \sqrt[3]{t_0^2/\Omega_0^4}/2r_0 m$, уравнение (11) преобразуется в дифференциальное уравнение Эйри [9]

$$W'' - Wz = \pi^{-1}. \quad (12)$$

Парой линейно независимых решений этого уравнения являются функции Эйри, определенные на двух интервалах:

– больших $z > 1$

$$A_i(-z) = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi^4 z}}, \quad (13)$$

$$B_i(-z) = \frac{\cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi^4 z}};$$

– малых $|z| < 1$

$$A_i(z) = c_1 f(z) - c_2 g(z), \quad (14)$$

$$B_i(z) = \sqrt{3}[c_1 f(z) + c_2 g(z)], \quad (14)$$

где $f(z) = 1 + z^3/6 + \dots$, $g(z) = 1 + z^4/2 + \dots$, $c_1 \approx 0.355$, $c_2 \approx 0.259$.

Свободная $W_1(z)$ и вынужденная $W_2(z)$ составляющие общего решения уравнения (12) выражаются через функции Эйри

$$W_1(z) = A[A_i(z) + B_i(z)] + B[A_i(z) - B_i(z)],$$

$$W_2(z) = \frac{2}{3}B_i(z) + \int_0^z [A_i(x)B_i(z) - A_i(z)B_i(x)] dx. \quad (15)$$

Постоянные интегрирования в (15) определяются начальными значениями функций $W(z)$ и $W'(z)$ на двух интервалах их определения: A_1, B_1 на интервале $z > 1$ при $z = z_0$, соответствующего времени $t = 0$, и A_2, B_2 на интервале $|z| \leq 1$ при $z = -1$.

После подстановки (13) и (14) в (15) и с учетом начальных условий получаем:

– в области устойчивости $z > 1$

$$W_1(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt[4]{z}}} \left[A_1 \cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + B_1 \sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \right],$$

$$W_2(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt[4]{z}}} \times$$

$$\times \left[\frac{2}{3} \cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{\sin\left[\frac{3}{2}(z^{3/2} - x^{3/2})\right]}{\sqrt[4]{x}} dx \right];$$

– в области возбуждения $|z| < 1$

$$W_1(z) \approx A_2 + B_2 z,$$

$$W_2(z) \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \left(c_1 + c_2 z + \frac{3}{2} c_1 c_2 z^2 \right). \quad (17)$$

После обратной замены переменных $z = \varphi_0^{2/3}(t/t_0 - 1)$ и $W = y/y_m$ и приближенного вычисления интеграла в (16) получаем решение дифференциального уравнения (11) нестационарного гармонического осциллятора:

– в устойчивой области $0 \leq t \leq t_1$

$$y_1(t) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{1-t/t_0}} \left[y_0 \cos \varphi(t) + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin \varphi(t) \right],$$

$$y_2(t) \approx \frac{y_m}{\pi \varphi_0^{2/3}} \left[\frac{1}{1-t/t_0} - \frac{1}{\sqrt[4]{1-t/t_0}} \cos \varphi(t) \right], \quad (18)$$

где $\varphi(t) = \frac{2}{3} \varphi_0 \left[1 - \sqrt{(1-t/t_0)^3} \right]$, $t_1 = (1 - 1/\varphi_0^{2/3})/t_0$;

– в окрестностях границы $a_0(q)$ $t_1 \leq t \leq 2t_0 - t_1$

$$y_1(t) \approx y_1(t_1) + y'(t_1)(t - t_1),$$

$$y_2(t) \approx y_2(t_1) c_1 \left[1 + \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{t-t_1}{t_0} \right) + \frac{3}{2} c_2 \left(\frac{t-t_1}{t_0} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

Выражения (18), (19) являются приближенными, так как получены на основе псевдопотенциальной статической модели быстро осциллирующего квадрупольного поля и описывают движение заряженных частиц с “основной” секулярной частотой. Точность модели можно оценить по результатам аналитических расчетов по формулам (18), (19) и численного решения с точностью 10^{-4} дифференциального уравнения (2) движения ионов в суперпозиции квадрупольных и однородных полей, приведенных на рис. 2.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты аналитических расчетов и численного моделирования колебаний ионов в суперпозиции ВЧ- и инерционно-нестационарных квадрупольных полей с наложенными на них однородными возбуж-

дающими полями согласуются с погрешностью, не превышающей $\delta < 5 \times 10^{-2}$. Погрешности аналитической модели обусловлены приближенностью выражения для секулярной частоты $\Omega_s \approx \omega \sqrt{a - a_0}/2$, где граница устойчивости принята $a_0 \approx q^2/2$, и отсутствием в модели гармонического осциллятора высших гармоник колебаний с частотами $\omega_r = \omega \pm r\Omega_s$, $r = 1, 2, 3, \dots$

В устойчивой области $0 > a > a_0(q)$, $q < 0.5$ первая составляющая погрешности не превышает уровня 5×10^{-2} и может быть снижена до необходимого уровня при использовании более точных выражений: (8) для параметра стабильности и (5) для границы $a_0(q)$. Тогда основную долю в погрешность модели будет вносить вторая составляющая, уровень которой можно оценить по относительной величине амплитуд C_{2r}/C_0 , $r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ высших гармоник колебаний с частотами $\omega_r = \omega \pm r\Omega_s$ [4, 5].

Так как коэффициенты $C_{\pm 2r}$ при возрастании r быстро убывают, в составе колебания ионов достаточно учитывать две высшие гармоники с частотами $\omega_{1,2} = \omega \pm \Omega$ и относительными амплитудами $C_2/C_0 = q/(1 + \beta)^2$ и $C_{-2}/C_0 = q/(1 - \beta)^2$, где C_0 – амплитуда секулярной составляющей. Для режима вывода ионов с резонансным возбуждением колебаний актуальным является точное описание траекторий в окрестностях границы устойчивости $a_0(q)$, где параметр стабильности $\beta \rightarrow 0$ и справедливо $\omega_1 \approx \omega_2$, $C_2 \approx C_{-2}$. При этом уточненное с учетом ВЧ-составляющей $y_{ВЧ}(t) = 0.5q[y_1(t) + y_2(t)] \sin \omega t$ решение дифференциального уравнения (2) примет вид

$$y(t) = \left(1 + \frac{q}{2} \sin \omega t \right) [y_1(t) + y_2(t)]. \quad (20)$$

Из (20) следует, что в процессе возбуждения колебаний на границе $a_0(q)$ на монотонно возрастающую функцию $y_1(t) + y_2(t)$ накладывается гармоническая составляющая с частотой ВЧ-поля. В результате зависимость времени t_0 достижения ионами границы ИОС $y = r_0$ от параметра частиц e/m приобретает “ступенчатый” характер с высотой ступени $\Delta t_0 = 2\pi/\omega$. Это ограничивает разрешающую способность анализатора на уровне $R < t_0\omega/2\pi$.

Полезным свойством рассматриваемого метода возбуждения колебания ионов при выполнении условия $\sqrt{y_0^2 + (v_0/\Omega_0)^2} < y_m$ является монополярность решения уравнения (11) $y(t) > 0$. Это свойство траекторий движения ионов при сканировании параметра a к границе устойчивости $a_0(q)$ упрощает реализацию метода резонансного вывода, так как процесс масс-сепарации заряженных частиц происходит в ИОС с рабочей областью в полупространстве $y \geq 0$.

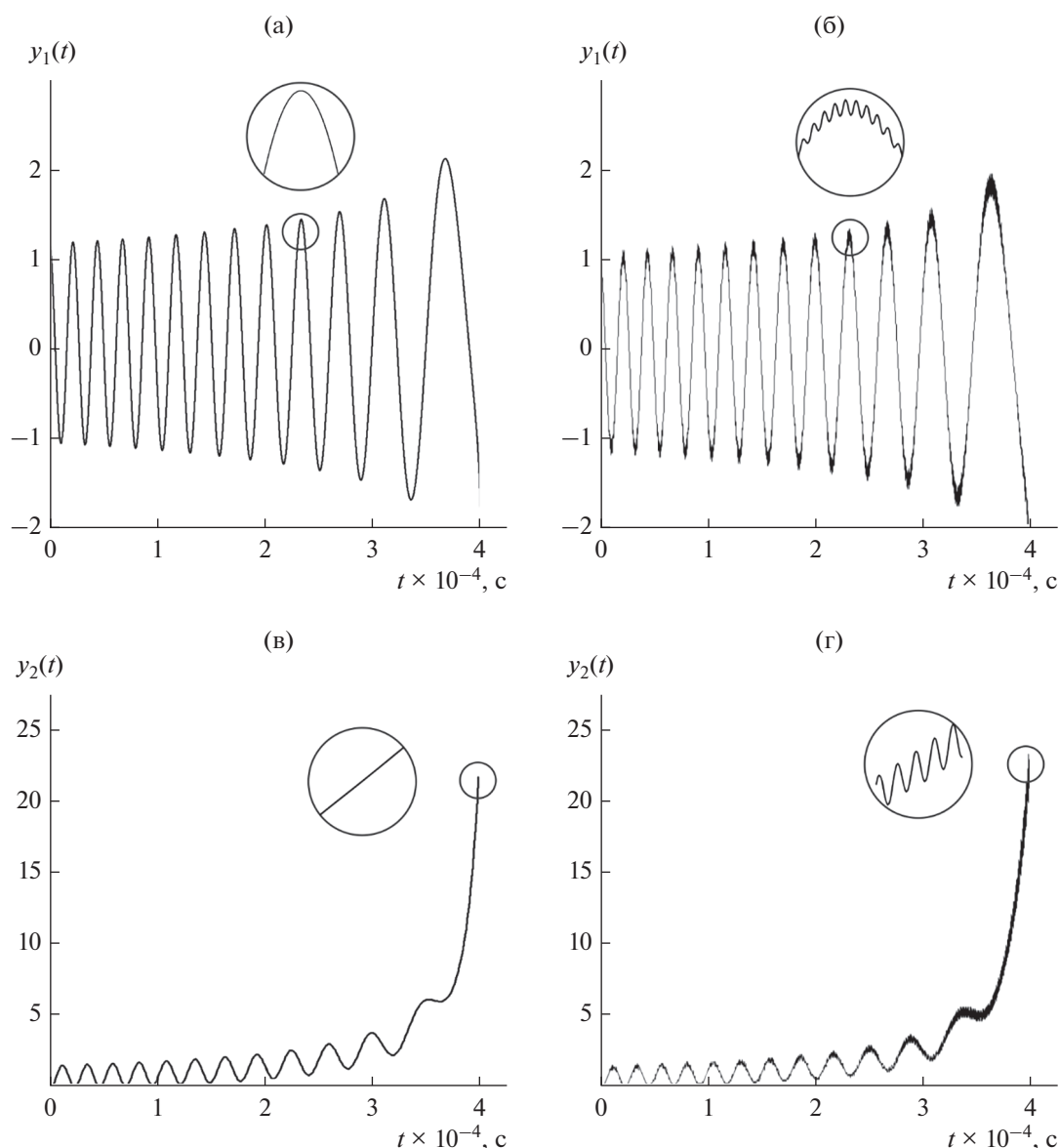


Рис. 2. Свободная (а, б) и вынужденная (в, г) составляющие колебаний ионов в инерционно-нестационарном квадрупольном поле при наложении возбуждающего однородного поля: а, в – псевдопотенциальная модель; б, г – численное решение дифференциального уравнения (2); на вставках – увеличенные фрагменты, отмеченные кружком.

Из рассмотрения решения уравнения (11) вытекает еще одно свойство колебаний, интересное с точки зрения организации ввода ионов в анализатор. В слагаемые $y_1(t) + y_2(t)$ общего решения (18) функция $\cos \varphi(t) / \sqrt[4]{1 - t/t_0}$ входит как множитель с противоположными знаками. Выбором параметров $y_0 \gg v_0/\Omega_0$ и $y_0 \approx y_m$ взаимно компенсируются колебания с секулярной частотой в независимых составляющих $y_1(t)$ и $y_2(t)$ общего решения $y(t)$, тогда выражение (18) преобразуется к виду

$$y(t) \approx \frac{1 + 0.5q \sin \omega t}{1 - t/t_0}, \quad t \leq t_1. \quad (21)$$

При $q \rightarrow 0$ уровень ВЧ-составляющей в (21) снижается и траектории ионов в процессе развертки масс приближаются к монотонно возрастающим, что важно для эффективного масс-разделения заряженных частиц.

Ранее отмечалось, что высокое разрешение возможно при условии $y_2(t_0) \gg y_1(t_0)$. Оценкой его выполнения является отношение значений в момент возбуждения t_0 функции возбуждения и свободной составляющей. Из (18) и (19) получаем

$$\frac{y_2(t_0)}{y_1(t_0)} \geq \frac{f_0 \Phi_0^{1/2} [c_1 + c_2/\Phi_0^{2/3} + 3c_1 c_2 \Phi_0^{4/3}]}{\Omega_0^2 \sqrt{2(y_0^2 + v_0^2/\Omega_0^2)}}. \quad (22)$$

Анализ выражений (18), (19), (21), (22) показывает, что эффективному масс-разделению ионов с возбуждением колебаний у границы устойчивости $a_0(q)$ способствуют:

- монополярный характер колебаний;
- ускоренный, в устойчивой области пропорциональный $1/(1 - t/t_0)$, рост функции возбуждения по сравнению со свободной составляющей, изменяющейся по закону пропорционально $1/\sqrt[4]{1 - t/t_0}$;
- квадратичное изменение в окрестностях границ $a_0(q)$ функции возбуждения при линейном нарастании свободной составляющей колебаний.

Аналитические выражения (16)–(19), описывающие колебания заряженных частиц в суперпозиции инерционно-нестационарных квадрупольных и однородных статических электрических полей позволяют оптимизировать параметры анализатора r_0 , квадрупольного V , ω и возбуждающего U_b полей, развертки масс v , T для достижения наибольшего разрешения метода резонансного вывода ионов у границы устойчивости $a_0(q)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе псевдопотенциальной модели квадрупольного быстро осциллирующего поля решена задача возбуждения колебаний заряженных частиц на границе устойчивости $a_0(q)$ диаграммы Маттье под действием однородного статического поля. Задача сведена к решению дифференциального уравнения инерционно-нестационарного гармонического осциллятора, которое при изменении собственной частоты колебаний по закону $\Omega(t) = \Omega_0 \sqrt{1 - t/t_0}$ преобразуется в дифференци-

альное уравнение Эйри. С использованием его решений получены выражения для свободной и вынужденной составляющих колебаний гармонического осциллятора в устойчивой области и области возбуждения. Приближенное решение, учитывающее только секулярную составляющую, уточнено добавлением ВЧ-компоненты колебаний, частота которой при возбуждении совпадает с частотой квадрупольного поля. Эффективность разделения заряженных частиц по удельному заряду у границы $a_0(q)$ оценивается соотношением детерминированной функции возбуждения и свободной составляющей со случайными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. шк., 2000.
2. *Konenkov N.V., Sudakov M.Yu., Cousins L.M., Baranov V.I.* // Int. J. Mass Spectrometry. 2001. V. 208. № 1–3. P. 17.
3. *Douglas D.J., Konenkov N.V.* // Rapid Commun. Mass Spectrometry. 2014. V. 28. P. 430.
4. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Маттье. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
5. *Dawson P.H.* Quadrupole Mass Spectrometry and its Applications. N.Y.: Amer. Inst. Phys., 1995.
6. *Апацкая М.В., Мамонтов Е.В., Судаков М.Ю.* Проблемы квадрупольной масс-спектрометрии: монография. М.: КУРС, 2018.
7. *Мамонтов Е.В., Судаков М.Ю., Дятлов Р.Н.* // РЭ. 2020. Т. 68. № 2. С. 197.
8. *Гуров В.С., Мамонтов Е.В., Дягилев А.А.* // Масс-спектрометрия. 2007. Т. 4. № 2. С. 139.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/ Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 494.