
**К 85-ЛЕТИЮ
Н.И. СИНИЦЫНА**

УДК 532.64

ДИСПЕРСИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

© 2022 г. М. В. Давидович*

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012 Российская Федерация*

*E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 12.03.2022 г.

После доработки 12.03.2022 г.

Принята к публикации 25.03.2022 г.

Предложен новый метод определения дисперсионного взаимодействия произвольных тел произвольной формы, основанный на теории возбуждения резонатора. Использован подход Рытова–Левина–Лифшица введения флуктуационных источников тока в уравнения Максвелла, при этом получены уравнения для определения корреляций флуктуационных токов и определены корреляции полей. Задача об определении корреляций является обратной и сформулирована на основе принципа детального равновесия Кирхгофа.

DOI: 10.31857/S0033849422100011

ВВЕДЕНИЕ

Хотя силы Казимира–Лифшица или дисперсионные силы для макрообъектов были введены около семидесяти лет назад (см. [1–11]), основные результаты получены в основном для плоско-слоистых структур, причем наиболее часто для этого используется формула Лифшица для полупространств [3–8, 11]. Для тел с криволинейной поверхностью используются приближения на ее основе [4]. Трудности классического описания связаны с необходимостью знания функции Грина (ФГ) структуры, которая удовлетворяет волновому уравнению с разрывными коэффициентами и граничным условиям. ФГ плоско-слоистой структуры получается относительно просто [1, 11]. Описание дисперсионных взаимодействий возможно в рамках макроскопической квантовой электродинамики [4, 5]. Однако оно достаточно сложно реализуется для тел произвольной формы. Имеется несколько работ, описывающих дисперсионные взаимодействия тел сложной и даже произвольной формы, например [9, 10]. Конкретные результаты приведены для цилиндров и шаров. Они основаны на ряде подходов: теории возмущений, теории матричных представлений полей с использованием матриц рассеяния и т.п., которые часто также содержат приближения.

В данной работе представлен новый подход, основанный на теории возбуждения резонатора [12–15].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Фактически теория возбуждения резонатора позволяет строить тензорные ФГ в виде разложения по его собственным функциям. Наличие тел приводит к теории возбуждения, для построения которой следует решать объемно-поверхностные интегральные уравнения [14, 15]. Эти уравнения можно записать как интегродифференциальные. Как результат, можно выразить поля через флуктуационные плотности токов, а корреляции полей – через корреляции этих плотностей токов. Однако для определения корреляций флуктуаций токов следует решать обратную задачу [1]. Рассмотрим макроскопические тела, описываемые макроскопическими диэлектрической проницаемостью (ДП) $\hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{r})$ и магнитной проницаемостью (МП) $\hat{\mu}(\omega, \mathbf{r})$. В общем случае они тензорные, а тела анизотропные. Для введения силы необходимо рассмотреть, по крайней мере, два тела. В случае одного тела можно рассматривать взаимодействие его частей. Для простоты и удобства ограничимся постоянными значениями проницаемостей в телах, т.е. будем использовать внутри тел только проницаемости $\hat{\epsilon}_1(\omega)$, $\hat{\epsilon}_2(\omega)$, $\hat{\mu}_1(\omega)$, $\hat{\mu}_2(\omega)$, зависящие от частоты. Как будет видно, это никак не ограничивает общность. Неоднородность тел приводит к дополнительным объемным зарядам. Тела могут быть как микроскопических размеров, так и наноразмерными. Основной критерий здесь – возможность описания тел макроскопическими материальными параметрами.

Эффекты типа бианизотропии мы не рассматриваем. Макроскопическое тело в поле \vec{E} , \vec{H} эквивалентно действию плотностей электрического тока поляризации $\vec{J}^{pe} = i\omega\epsilon_0(\hat{\epsilon} - \hat{I})\vec{E}$ и магнитного тока поляризации $\vec{J}^{pm} = i\omega\mu_0(\hat{\mu} - \hat{I})\vec{H}$. Планковская плотность энергии равновесного излучения есть [1]

$$u_p(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi c^3} \Theta'(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}, \quad (1)$$

где

$$\Theta'(\omega, T) = \hbar\omega f_{BE}(\omega, T),$$

$f_{BE}(\omega, T) = 1/[\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]$ – функция Бозе–Эйнштейна. Излучение создается огромным числом атомов различных нагретых тел, расположенных со всех сторон. В силу этого оно имеет структуру случайных стоячих волн с непрерывным спектром. Наиболее хорошо такое излучение создается в объеме со стенками, имеющими близкий к единице коэффициент черноты в диапазоне, где заключена большая часть энергии излучения (1). Помещенное в этот объем тело той же температуры удовлетворяет принципу Кирхгофа: на каждой частоте оно поглощает столько же, сколько излучает, т.е. излучательная способность тела равна его поглощающей способности. Формально такие абсолютно поглощающие стенки эквивалентны абсолютно проводящим, т.е. полностью отражающим. Именно, излучение не выходит за пределы резонатора с идеальными стенками, а его энергия сохраняется. Однако плотность излучения у стенок отличается от (1). Предполагается, что в телах нет источников тепла и излучения. Задача допускает рассмотрение двух тел при температурах T_1 и T_2 в поле излучения с температурой T_0 в начальный момент времени. Такая система не равновесная, но в начальный момент каждую из ее подсистем можно считать равновесной. В этом случае будет радиационный теплообмен. За большое время система придет к равновесию при некоторой одинаковой температуре T . Взяв резонатор очень большим с энергией излучения, существенно большей энергий тел, можно рассматривать радиационный теплообмен при постоянной температуре излучения. Однако большие размеры требуют учета большого числа мод. Диссипативные тела излучают на всех частотах, поэтому спектр непрерывный. Отсутствие диссипации приводит к дискретному спектру частот.

Формально тепловое излучение следует учитывать в уравнениях Максвелла как стороннее поле \vec{E}^0 , \vec{H}^0 . Будем использовать концепцию Рытова–Левина–Лифшица введения в уравнения Максвелла сторонних флуктуационных источников, эквивалентных действию указанного поля.

Тогда вместо стороннего теплового поля следует в телах вводить сторонние флуктуационные источники \vec{J}^{0e} и \vec{J}^{0m} . Спектральные уравнения Максвелла приобретают вид

$$\nabla \times \vec{H}(\omega, \vec{r}) = i\omega\epsilon_0 \vec{E}(\omega, \vec{r}) + \vec{J}^{pe}(\omega, \vec{r}) + \vec{J}^{0e}(\omega, \vec{r}), \quad (2)$$

$$-\nabla \times \vec{E}(\omega, \vec{r}) = i\omega\mu_0 \vec{H}(\omega, \vec{r}) + \vec{J}^{pm}(\omega, \vec{r}) + \vec{J}^{0m}(\omega, \vec{r}). \quad (3)$$

Из них следует определить поля, вычислить их корреляции и определить силы. Индексом 0 обозначены флуктуационные источники, эквивалентные действию теплового поля, а индексом p – поляризационные источники, возникающие за счет дифракции флуктуационного поля на телах и их поляризации. Для полных полей имеем

$$\vec{E}(\omega, \vec{r}) = \vec{E}^0(\omega, \vec{r}) + \vec{E}^p(\omega, \vec{r}), \\ \vec{H}(\omega, \vec{r}) = \vec{H}^0(\omega, \vec{r}) + \vec{H}^p(\omega, \vec{r}).$$

Далее под словом “ток” будем понимать плотность тока. Уравнения (2), (3) есть баланс токов. Именно, полный электрический ток $\nabla \times \vec{H}$ есть сумма тока смещения в вакууме $i\omega\epsilon_0 \vec{E}$, тока поляризации \vec{J}^{pe} и стороннего тока \vec{J}^{0e} . То же имеет место для полного магнитного тока $-\nabla \times \vec{E}$. Отсутствие тел означает отсутствие токов поляризации и флуктуационных токов. В этом случае

$$\vec{E}(\omega, \vec{r}) = \vec{E}^0(\omega, \vec{r}), \quad \vec{H}(\omega, \vec{r}) = \vec{H}^0(\omega, \vec{r}),$$

и такое стационарное (монохроматическое) поле в резонаторе с идеальными стенками может существовать только на определенных резонансных частотах. Нерезонансная часть поля будет случайной функцией времени из-за несинхронных отражений от идеальных стенок (диссипативные стенки частично поглощают и излучают случайным образом).

Рассмотрим резонатор с большими размерами L_x, L_y, L_z . Хотя в этом случае расстояния между резонансными частотами могут быть весьма малы, сразу видна необходимость наличия тел и диссипации в них для описания дисперсионных сил непрерывным спектром. В окончательных результатах можно перейти к пределу $L_{x,y,z} \rightarrow \infty$. Тем не менее, представление поля стоячими волнами, т.е. наличие отраженных от бесконечностей волн, свидетельствует о том, что оно создается бесконечно удаленными телами, поглощающими и излучающими волны. Тепловое поле следует рассматривать во всем диапазоне, при этом поля бу-

дут случайными функциями времени. Рассмотрим волну

$$\begin{aligned} E_x(\omega, z, t) &= E_{0x} \exp(i\omega(t - z/c)), \\ H_y(\omega, z, t) &= H_{0y} \exp(i\omega(t - z/c)) \end{aligned}$$

и такие же волны в двух других направлениях. Отражение волн приведет к стоячим волнам с зависимостью амплитуд от времени. Для определения энергии поля на рассматриваемой частоте вместо квадрата амплитуды следует взять корреляцию ее квадрата $\langle E_0^2 \rangle$. Плотность средней за период энергии электрического поля есть

$$\varepsilon_0 (\langle E_{0x}^2 \rangle + \langle E_{0y}^2 \rangle + \langle E_{0z}^2 \rangle) / 4.$$

Для учета магнитной энергии ее следует удвоить. В силу изотропности излучения полагаем

$$\langle E_{0x}^2 \rangle = \langle E_{0y}^2 \rangle = \langle E_{0z}^2 \rangle = \langle E_0^2 \rangle / 2,$$

где 2 в знаменателе означает учет волн противоположных направлений, т.е. $\langle E_0^2 \rangle$ есть средний квадрат амплитуды волны любого направления. Поскольку полная плотность энергии поля $U(T) = 4\sigma T^4/c$ определяется через (1) как интеграл от $u_p(\omega, T)$ по положительным частотам ω , а через среднюю за период плотность энергии она определяется как такой же интеграл с множителем $2/\pi$, то из сравнения следует

$$\langle E_0^2(\omega) \rangle = \pi \eta_0 k_0^2 \Theta'(\omega, T) / 6$$

(при интегрировании и по отрицательным частотам следует использовать множитель $1/\pi$). Здесь $\sigma = \pi^2 k_B^4 / (60 \hbar^3 c^2)$ – постоянная Стефана–Больцмана. Далее также будем использовать среднюю энергию квантового осциллятора $\Theta(\omega, T) = \hbar \omega (1/2 + f_{BE}(\omega, T))$, учитывающую и нулевые вакуумные колебания. Она в частности учитывает их энергию в резонаторе.

Пусть теперь в резонатор внесены тела при температуре T . Будем располагать их далеко от стенок. Тело поглощает излучение. Поглощенное на частоте ω излучение обычно трактуется как потери. Однако оно переходит в энергию колебаний заряженных частиц, которая излучается во всем диапазоне. Равновесность означает равенство излучения и поглощения на всех частотах. Поглощение создает флуктуационные источники. Если его нет, то следует использовать флуктуационные поля вне тел и источники $\vec{J}^{pe}, \vec{J}^{pm}$. Внутри тел поля должны быть определены как

$$\begin{aligned} \vec{E}(\omega, \vec{r}) &= \vec{E}^0(\omega, \vec{r}) + \vec{E}^p(\omega, \vec{r}), \\ \vec{H}(\omega, \vec{r}) &= \vec{H}^0(\omega, \vec{r}) + \vec{H}^p(\omega, \vec{r}), \end{aligned}$$

а вне тел как

$$\vec{E}(\omega, \vec{r}) = \vec{E}^0(\omega, \vec{r}), \quad \vec{H}(\omega, \vec{r}) = \vec{H}^0(\omega, \vec{r}).$$

Пусть $\hat{\Gamma}^{\alpha\beta}(\omega, \vec{r}, \vec{r}')$ – тензорные ФГ полого резонатора, $\alpha, \beta = e, m$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{E}^0(\omega, \vec{r}) &= \int_V [\hat{\Gamma}^{ee}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^{0e}(\omega, \vec{r}') + \\ &+ \hat{\Gamma}^{em}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^{0m}(\omega, \vec{r}')] d^3 r', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^p(\omega, \vec{r}) &= \int_V [\hat{\Gamma}^{ee}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^{pe}(\omega, \vec{r}') + \\ &+ \hat{\Gamma}^{em}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^{pm}(\omega, \vec{r}')] d^3 r', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}^0(\omega, \vec{r}) &= \int_V [\hat{\Gamma}^{me}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^{0e}(\omega, \vec{r}') + \\ &+ \hat{\Gamma}^{mm}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^{0m}(\omega, \vec{r}')] d^3 r', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}^p(\omega, \vec{r}) &= \int_V [\hat{\Gamma}^{me}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^{pe}(\omega, \vec{r}') + \\ &+ \hat{\Gamma}^{mm}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^{pm}(\omega, \vec{r}')] d^3 r'. \end{aligned}$$

Поля удовлетворяют связанным интегральным уравнениям (ИУ)

$$\begin{aligned} \vec{E}(\omega, \vec{r}) &= \vec{E}^0(\omega, \vec{r}) = \\ &= i\omega \varepsilon_0 \int_V \hat{\Gamma}^{ee}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') (\hat{\varepsilon}(\omega, \vec{r}') - \hat{I}) \vec{E}(\omega, \vec{r}') d^3 r' + \\ &+ i\omega \mu_0 \int_V \hat{\Gamma}^{em}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') (\hat{\mu}(\omega, \vec{r}') - \hat{I}) \vec{H}(\omega, \vec{r}') d^3 r', \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\omega, \vec{r}) &= \vec{H}^0(\omega, \vec{r}) + \\ &+ i\omega \varepsilon_0 \int_V \hat{\Gamma}^{me}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') (\hat{\varepsilon}(\omega, \vec{r}') - \hat{I}) \vec{E}(\omega, \vec{r}') d^3 r' + \\ &+ i\omega \mu_0 \int_V \hat{\Gamma}^{mm}(\omega, \vec{r}, \vec{r}') (\hat{\mu}(\omega, \vec{r}') - \hat{I}) \vec{H}(\omega, \vec{r}') d^3 r'. \end{aligned} \quad (5)$$

Формально решение указанных уравнений можно написать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}(\omega, \vec{r}) &= \vec{F}^e(\omega, \vec{r}, \vec{J}^{0e}, \vec{J}^{0m}), \\ \vec{H}(\omega, \vec{r}) &= \vec{F}^m(\omega, \vec{r}, \vec{J}^{0e}, \vec{J}^{0m}). \end{aligned}$$

Здесь обозначены функционалы, поскольку в них входят интегралы от источников – флуктуационных токов по объему тел. Эти функционалы включают в себя интегралы и суммы с матричными элементами. Для их получения следует обращать интегральные операторы для выражений (4) и (5), что требует обращения матриц при решении краевой задачи.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ПРЯМОУГОЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

Построение ФГ удобно основывать на теории возбуждения полого резонатора источниками \vec{J}^ε и \vec{J}^μ , для которых $\nabla \cdot \vec{J}^{\varepsilon,\mu} = -i\omega\rho^{\varepsilon,\mu}$ [13]. Полную систему собственных функций прямоугольного резонатора можно построить на основе стоячих волн типа E и H прямоугольного волновода вдоль любой из осей. Здесь мы применим несколько другой подход. Полную ортонормированную систему базисных функций на отрезке $(0, L_\alpha)$ определяют функции

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_\alpha) &= (2\delta_n/L_\alpha) \cos(k_{\alpha n}x_\alpha), \\ \psi_n(x_\alpha) &= (2\delta_n/L_\alpha) \sin(k_{\alpha n}x_\alpha), \end{aligned}$$

где $\delta_n = 1, n = 1, \delta_0 = 1/2, k_{\alpha n} = n\pi/L_\alpha, \alpha = x, y, z$. Первая функция определяет условия магнитной стенки, вторая – условия электрической стенки. Имеем уравнения для вектор-потенциала

$$(\nabla^2 + k_0^2)\vec{A}^\varepsilon = -\vec{J}^\varepsilon, \quad (\nabla^2 + k_0^2)\vec{A}^\mu = -\vec{J}^\mu. \quad (6)$$

Их решения ищем в виде разложений

$$\begin{aligned} A_x^\varepsilon(\mathbf{r}) &= \sum_{lmn=0}^{\infty} a_{xlmn}^\varepsilon \varphi_l(k_{xl}x) \psi_m(k_{xm}y) \psi_n(k_{xn}z), \\ A_x^\mu(\mathbf{r}) &= \sum_{lmn=0}^{\infty} a_{xlmn}^\mu \varphi_l(k_{xl}x) \psi_m(k_{xm}y) \psi_n(k_{xn}z), \\ A_x^\varepsilon(\mathbf{r}) &= \sum_{lmn=0}^{\infty} a_{xlmn}^\varepsilon \varphi_l(k_{xl}x) \psi_m(k_{xm}y) \psi_n(k_{xn}z). \end{aligned}$$

Такие же разложения пишем для источников. В результате получаем

$$A_\alpha^{(\varepsilon,\mu)}(\mathbf{r}) = \int_V G_\alpha^{(\varepsilon,\mu)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_\alpha^{(\varepsilon,\mu)}(\mathbf{r}') dr',$$

куда входят диагональные тензорные ФГ для вектор-потенциала с компонентами для ФГ электрического типа

$$\begin{aligned} G_x^\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{lmn=0}^{\infty} \frac{\varphi_l(k_{xl}x) \psi_m(k_{ym}y) \psi_n(k_{zn}z) \varphi_l(k_{xl}x') \psi_m(k_{ym}y') \psi_n(k_{zn}z')}{k_{xl}^2 + k_{ym}^2 + k_{zn}^2 - k_0^2}, \\ G_y^\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{lmn=0}^{\infty} \frac{\psi_l(k_{xl}x) \varphi_m(k_{ym}y) \psi_n(k_{zn}z) \psi_l(k_{xl}x') \varphi_m(k_{ym}y') \psi_n(k_{zn}z')}{k_{xl}^2 + k_{ym}^2 + k_{zn}^2 - k_0^2}, \\ G_z^\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') &= \sum_{lmn=0}^{\infty} \frac{\psi_l(k_{xl}x) \psi_m(k_{ym}y) \varphi_n(k_{zn}z) \psi_l(k_{xl}x') \psi_m(k_{ym}y') \varphi_n(k_{zn}z')}{k_{xl}^2 + k_{ym}^2 + k_{zn}^2 - k_0^2}. \end{aligned}$$

Магнитная ФГ получается при замене $\varphi \leftrightarrow \psi$. Теперь получаются тензорные ФГ для полей

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{\varepsilon\varepsilon}(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{\nabla \otimes \nabla + k_0^2 \hat{I}}{i\omega\varepsilon_0} \times \\ &\times \left[\vec{x}_0 G_x^\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') + \mathbf{y}_0 G_y^\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') + \vec{z}_0 G_z^\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') \right], \\ \hat{\Gamma}^{\varepsilon\mu}(\vec{r}, \vec{r}') &= \\ &= -\nabla \times \left[\vec{x}_0 G_x^\mu(\vec{r}, \vec{r}') + \mathbf{y}_0 G_y^\mu(\vec{r}, \vec{r}') + \vec{z}_0 G_z^\mu(\vec{r}, \vec{r}') \right], \\ \hat{\Gamma}^{\mu\varepsilon}(\vec{r}, \vec{r}') &= \\ &= \nabla \times \left[\vec{x}_0 G_x^\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') + \mathbf{y}_0 G_y^\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') + \vec{z}_0 G_z^\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') \right], \\ \hat{\Gamma}^{\mu\mu}(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{\nabla \otimes \nabla + k_0^2 \hat{I}}{i\omega\mu_0} \times \\ &\times \left[\vec{x}_0 G_x^\mu(\vec{r}, \vec{r}') + \mathbf{y}_0 G_y^\mu(\vec{r}, \vec{r}') + \vec{z}_0 G_z^\mu(\vec{r}, \vec{r}') \right]. \end{aligned}$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ

Пусть решения в виде $\vec{E}(\omega, \vec{r}) = \vec{F}^\varepsilon(\omega, \vec{r}, \vec{J}^{0\varepsilon}, \vec{J}^{0\mu})$, $\vec{H}(\omega, \vec{r}) = \vec{F}^\mu(\omega, \vec{r}, \vec{J}^{0\varepsilon}, \vec{J}^{0\mu})$ получены для двух тел в резонаторе. Введем расстояние между ними d . Это расстояние можно отсчитывать от любых точек тел. Резонатор или расположение тел всегда можно выбрать так, что отсчет расстояния идет по любой из осей, скажем x . Пусть объемы тел V_1 и V_2 , а объем прямоугольного параллелепипеда резонатора $V_0 = L_x L_y L_z$. Спектральную плотность энергии $u(\omega, d)$ электромагнитного поля в вакууме найдем интегрированием по объему величины

$$\varepsilon_0 \langle |\vec{E}(\omega, \vec{r})|^2 \rangle / 2 = \varepsilon_0 \langle |\vec{F}^\varepsilon(\omega, \vec{r}, \vec{J}^{0\varepsilon}, \vec{J}^{0\mu})|^2 \rangle / 2.$$

Интегрировать следует по объему вне тел, т.е. по объему вакуумной области. Эта величина есть квадратичная форма от корреляций тока с матрицей, получающейся в результате решения краевой

задачи. Интегрируя $u(\omega, d)$ по частоте, найдем полную энергию поля в вакуумной области резонатора $U(d)$. Эта энергия расходуется в силу расхождения энергии вакуумных флуктуаций. Однако можно вычислять разность $[U(d) - U(d + \Delta d)]/\Delta d$. Численно вычислять эту величину следует, обрезая сверху интегрирование по частоте. Для обрезанного интеграла тогда имеем силу $f = -\partial_d U(d)$. Значение максимальной частоты обрезания следует выбирать из условия, когда результат от нее почти не зависит. Этот подход возможен как для объемных тел, так и для поверхностных. Под поверхностным телом понимаем тело в виде поверхности, на которой имеет место импедансное граничное условие. Это возможно для структур типа графена, углеродных нанотрубок, фуллеренов. Для реальных металлических тел это не приемлемо, поскольку при определении дисперсионных сил учитываются все частоты, а глубина проникновения в металл сильно зависит от частоты. Наличие только поверхностных тел означает, что весь объем V_0 занимает вакуум. Как модель можно, конечно, использовать идеально проводящие поверхности, а также диэлектрики без диссипации. В этом случае спектр ω_n дискретный, его необходимо вычислять и определять энергию как сумму величин $\Theta(\omega_n, T)$. В случае тел, описываемых поверхностями, вместо плотностей \vec{J}^{pe} и \vec{J}^{pm} следует вводить поверхностные плотности тока \vec{j}^e и \vec{j}^m . Магнитная поверхностная плотность тока \vec{j}^m есть условность или модель.

Для определения дисперсионного взаимодействия применяют и другие модели. Для тел в вакууме обычно используют тензор энергии-импульса (ТЭИ) электромагнитного поля, а точнее говоря, его пространственную часть [3]. Для вакуума ТЭИ известен. Его пространственная часть определяет плотность потока компонент импульса, т.е. давление на поверхность. Будем определять отрицательное давление, т.е. натяжение на единицу поверхности. Оно дается тензором натяжной пространственной части ТЭИ. Итак, притягивающая сила, действующая на внешнюю поверхность S_1 первого тела в вакууме для детерминированного поля, определяется интегралом по поверхности от ТЭИ \hat{T} с внешней нормалью:

$$\vec{f} = -\int_S \hat{T}(\vec{r}_s) \vec{n}(\vec{r}_s) d^2r.$$

Поскольку ТЭИ случайного строится из квадратичных величин, для флуктуационной силы натяжения следует взять корреляторы. Например, для

листа графена шириной W и длиной $2l$ с площадью $2Wl$ имеем силу

$$\langle f_{1z} \rangle = - \int_{-w/2-l}^{w/2-l} \int \langle T_{zz}(x, y, 0) \rangle dx dy. \quad (7)$$

Локальное натяжение на единицу площади равно

$$-\langle T_{zz} \rangle = \epsilon_0 \frac{\langle E_x, E_x \rangle + \langle E_y, E_y \rangle - \langle E_z, E_z \rangle}{2} + \mu_0 \frac{\langle H_x, H_x \rangle + \langle H_y, H_y \rangle - \langle H_z, H_z \rangle}{2}.$$

Здесь взяты автокорреляции компонент полей, которые зависят от координат и времени. Мы же используем спектральные уравнения Максвелла и комплексные амплитуды гармонических во времени полей. В случае действительных координатных полей необходимо усреднять действительные величины. При использовании спектральных полей величины типа $A(\omega) B^*(\omega)$ часто усредняют за период, при этом возникает множитель $1/2$. Например, плотности электрической энергии в вакууме $\epsilon_0 \vec{E}^2(t, \vec{r})/2$ соответствует спектральная плотность $\epsilon_0 \vec{E}^2(\omega, \vec{r})/2$, включая отрицательные частоты. Взятие временных корреляций есть интегрирование по времени и усреднение по ансамблю. В силу равенства Парсевала интегрирование энергии по времени соответствует интегрированию по частоте. Из-за четности при интегрировании по положительным частотам результат следует удвоить, т.е. интегрировать с множителем π^{-1} . Средняя электрическая энергия за период есть $\epsilon_0 |\vec{E}|^2(\omega, \vec{r})/4$. Она обычно используется для монохроматических полей. Для ее получения задействована отрицательная частота, поэтому при интегрировании по положительным частотам следует использовать множитель $2/\pi$.

Согласно Максвеллу натяжение действует на внешнюю поверхность. Если поверхность замкнутая, то интеграл от $\hat{T}(\vec{r}_s) \vec{n}(\vec{r}_s)$ определяет поток импульса внутрь тела, т.е. переданный телу импульс [16]. Если в вакууме взять произвольную замкнутую поверхность, то все поля на ней непрерывны, при этом есть поток и через внутреннюю поверхность. Это же относится и к элементарной незамкнутой поверхности. В силу непрерывности полный поток через любую такую поверхность равен нулю, т.е. на произвольную незамкнутую элементарную поверхность в вакууме силы не действуют, как и на замкнутую. На любую поверхность вне границ раздела силы не действуют. В случае графенового листа поверхность незамкнутая двусторонняя, но на ней из-за наличия поверхностных токов и зарядов некоторые компоненты поля разрывные. На двусторон-

ней поверхности нормали противоположные. На проводящем листе с током касательные компоненты электрического поля и нормальная компонента магнитного поля непрерывны, а нормальная компонента электрического поля и касательные компоненты магнитного поля терпят разрывы [13]. Поэтому при учете силы в ТЭИ следует оставлять только разрывные компоненты. Таковыми являются H_x , H_y и E_z для листа с током, нормального к оси z . В случае двух парал-

лельных листов будем рассматривать поверхностную плотность силы как натяжение \tilde{T}_{1z} , приложенное к первому листу в сторону второго, что обозначаем индексом 1. Обозначая

$$\tilde{T}_{1z}(\omega, x, y, 0) = \langle T_{zz}^+(\omega, x, y, +0) \rangle - \langle T_{zz}^-(\omega, x, y, -0) \rangle,$$

следует взять

$$\tilde{T}_{1z}(\omega) = \mu_0 \frac{\langle H_x^+, H_x^+ \rangle + \langle H_y^+, H_y^+ \rangle - \langle H_x^-, H_x^- \rangle - \langle H_y^-, H_y^- \rangle}{4} - \epsilon_0 \frac{\langle E_z^+, E_z^+ \rangle - \langle E_z^-, E_z^- \rangle}{4}. \quad (8)$$

Здесь использованы средние значения за период и опущены зависимости от координат. Выражение (8) с обратным знаком есть затекание импульса в некую область, ограниченную бесконечно близкими поверхностями. При этом затекает только поглощенная часть импульса. Импульс от поля передается носителям заряда, которые в силу диссипации передают ее кристаллической решетке. Будем считать поверхность двухсторонней. Тогда плотность полного поверхностного тока на ней равна сумме токов на верхнем и нижнем листах $j_l = j_l^+ + j_l^-$. Здесь мы не конкретизируем флуктуационные и поляризационные величины. Имеем

$$\partial_x j_{1x}(z) + \partial_y j_{1y}(z) + i\omega \zeta_l(z) = 0,$$

откуда получаем для спектральной плотности поверхностного заряда выражение

$$\zeta_l(\omega, \bar{q}) = (k_x j_{1x}(\omega, \bar{q}) + j_{1y}(\omega, \bar{q})) / \omega.$$

В силу сказанного выше мы должны использовать зависящие от расстояния d величины

$$\tilde{\zeta}_l(\omega, \bar{q}) = (k_x \tilde{j}_{1x}(\omega, \bar{q}) + \tilde{j}_{1y}(\omega, \bar{q})) / \omega$$

(здесь тильда и обозначает такую зависимость).

Также имеем $\zeta_l = \zeta_l^+ + \zeta_l^-$, при этом $E_{1z}^\pm = \pm \zeta_l^\pm / \epsilon_0$,

$H_{1x}^\pm = \pm j_{1y}^\pm$, $H_{1y}^\pm = \mp j_{1x}^\pm$. Если лист уединенный, то

$\zeta_l^+ = \zeta_l^-$, $\tilde{j}_l^+ = \tilde{j}_l^-$, поэтому $\tilde{T}_{1z} = 0$. В присутствии второго листа или тела возникает асимметрия и ненулевое натяжение. Концепция двусторонней поверхности означает, что

$$H_x^\pm(x, y, 0) = \hat{H}_{2x}(x, y, 0) \pm (\tilde{j}_{1x}^p + j_{1x}^0) / 2,$$

$$H_y^\pm(x, y, 0) = \hat{H}_{2y}(x, y, 0) \mp (\tilde{j}_{1x}^p + j_{1x}^0) / 2,$$

$$E_z^\pm(x, y, 0) = \hat{E}_{2z}(x, y, 0) \pm (\tilde{\zeta}_l^p + \zeta_l^0) / (2\epsilon_0).$$

Здесь “шляпка” соответствует полному полю: сумме дифракционной и флуктуационной частей.

Например, $\hat{H}_{2y} = H_{2y}^p + H_{2y}^0$, $\hat{E}_{2x} = E_{2x}^p + E_{2y}^0$. Далее координаты не приводим. Поля второго листа

на первом листе непрерывны. На нем имеем ненулевые корреляции магнитного поля:

$$\begin{aligned} \langle H_x^+, H_x^+ \rangle - \langle H_x^-, H_x^- \rangle &= 2 \operatorname{Re} \langle \hat{H}_{2x}, \tilde{j}_{1y}^p + j_{1y}^0 \rangle, \\ \langle H_y^+, H_y^+ \rangle - \langle H_y^-, H_y^- \rangle &= -2 \operatorname{Re} \langle \hat{H}_{2y}, \tilde{j}_{1x}^p + j_{1x}^0 \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Действительно, для первого равенства получаем

$$\begin{aligned} \langle H_x^+, H_x^+ \rangle - \langle H_x^-, H_x^- \rangle &= \\ &= \langle \hat{H}_{1x}^+ + \hat{H}_{2x}, \hat{H}_{1x}^+ + \hat{H}_{2x} \rangle - \\ &- \langle \hat{H}_{1x}^- + \hat{H}_{2x}, \hat{H}_{1x}^- + \hat{H}_{2x} \rangle = \\ &= \langle \hat{H}_{1x}^+, \hat{H}_{1x}^+ \rangle - \langle \hat{H}_{1x}^-, \hat{H}_{1x}^- \rangle + \\ &+ \langle \hat{H}_{2x}, \tilde{j}_{1y}^p + j_{1y}^0 \rangle + \langle \tilde{j}_{1y}^p + j_{1y}^0, \hat{H}_{2x} \rangle. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $\hat{H}_{1x}^\pm = \pm (\tilde{j}_{1y}^d + j_{1y}^0) / 2$,

$\hat{H}_{1x}^+ - \hat{H}_{1x}^- = \tilde{j}_{1y}^d + j_{1y}^0$. Второе равенство получается, поскольку $\hat{H}_{1y}^\pm = \mp (\tilde{j}_{1x}^d + j_{1x}^0) / 2$. Также имеем ненулевые корреляции электрического поля:

$$\langle E_z^+, E_z^+ \rangle - \langle E_z^-, E_z^- \rangle = \frac{2 \operatorname{Re} \langle \hat{E}_{2z}, \tilde{\zeta}_l^p + \zeta_l^0 \rangle}{\epsilon_0}. \quad (10)$$

Везде использованы пространственно-частотные спектральные функции, т.е. имеющие зависимости типа $E_x^\pm(\omega, \mathbf{q})$. Очевидно, натяжение можно представить так:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1z}(\omega, d) &= \operatorname{Re} \left(\mu_0 \left[\langle \hat{H}_{2x}, \tilde{j}_{1y}^d + j_{1y}^0 \rangle - \right. \right. \\ &\left. \left. - \langle \hat{H}_{2y}, \tilde{j}_{1x}^d + j_{1x}^0 \rangle - \langle \hat{E}_{2z}, \tilde{\zeta}_l^d + \zeta_l^0 \rangle \right] \right) / 2. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) входят только частотные спектральные функции, зависящие от координат x, y . Полное натяжение дается взятым при $z=0$ спектральным интегралом

$$\tilde{T}_{1z}(d) = \frac{2 \operatorname{Re}}{\pi} \int_0^\infty \tilde{T}_{1z}(\omega, d) d\omega. \quad (12)$$

Мы привели интеграл к интегрированию по положительным частотам и удвоили результат. В (12) использованы только зависящие от d (переменные) величины $\tilde{j}_1(\omega, \vec{q})$ и $\tilde{\zeta}_1(\omega, k_z)$, что обозначено символом “ \sim ”.

Рассмотренная теория возбуждения резонатора позволяет найти поля в нем и внутри тел. Так, поле \vec{H} действует на плотность тока $\vec{J}^{pe}(\omega, \vec{r}) = i\omega\epsilon_0(\hat{\epsilon}(\omega, \vec{r}) - \hat{I})\vec{E}$. Объемная плотность магнитной силы есть $\vec{f}^\mu = \text{Re}(\vec{J}^{pe}(\omega, \vec{r}) \times \vec{H}^*)/2$. Определим объемную плотность заряда $\rho^\epsilon(\omega, \vec{r}) = i\nabla \cdot \vec{J}^{pe}(\omega, \vec{r})/\omega$ и объемную силу $\vec{f}^\epsilon = \text{Re}(\rho^\epsilon(\omega, \vec{r})\vec{E}^*)/2$. Полную силу $\vec{f} = \vec{f}^\epsilon + \vec{f}^\mu$ следует интегрировать по объему тела. Кроме того, возникают поверхностные плотности электрического заряда, связанные со скачками нормальной компоненты электрического поля. Их следует интегрировать по поверхности. Такой подход можно трактовать как определение дисперсионных взаимодействий на основе силы Лоренца.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Используя флуктуационно-диссипационную теорему, в [1, 2] был получен следующий результат для корреляций компонент флуктуационных плотностей токов:

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha^{0\epsilon}(\omega, \vec{r}), j_\beta^{0\epsilon}(\omega, \vec{r}') \rangle &= -i\omega\Theta(\omega, T) \times \\ &\times \left[\epsilon_{\nu\mu}^*(\omega, \vec{r}) - \epsilon_{\mu\nu}(\omega, \vec{r}) \right] \delta_{\nu\mu} \delta(\vec{r} - \vec{r}') / (2\pi), \\ \langle j_\alpha^{0\mu}(\omega, \vec{r}), j_\beta^{0\mu}(\omega, \vec{r}') \rangle &= -i\omega\Theta(\omega, T) \times \\ &\times \left[\epsilon_{\alpha\beta}^*(\omega, \vec{r}) - \epsilon_{\beta\alpha}(\omega, \vec{r}) \right] \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}') / (2\pi), \\ \langle j_\alpha^{0\epsilon}(\omega, \vec{r}), j_\beta^{0\mu}(\omega, \vec{r}') \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь индексы “пробегают” значения $\alpha, \beta = x, y, z$. Использование пространственно-спектральных преобразований Фурье в виде интегрирования с $\exp(-i\vec{k}\vec{r})$ приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha^{0(\epsilon, \mu)}(\omega, \vec{k}), j_\beta^{0(\epsilon, \mu)}(\omega, \vec{k}') \rangle &= -(2\pi)^2 i\omega\Theta(\omega, T) \times \\ &\times \left[\epsilon_{\nu\mu}^*(\omega, \vec{k}) - \epsilon_{\mu\nu}(\omega, \vec{k}) \right] \delta_{\nu\mu} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned}$$

Однако этот результат получен для тела бесконечного объема. Для конечного тела корреляции типа (13) должны зависеть от формы тел, включая расстояние между ними. Если считать, что корреляции дельта-коррелированы, то следует доба-

вить в (13) некую зависящую от координат функцию, т.е. взять их в виде

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha^{0\epsilon}(\omega, \vec{r}), j_\beta^{0\epsilon}(\omega, \vec{r}') \rangle &= -i\omega F^{\epsilon\epsilon}(\omega, \vec{r}) \Theta(\omega, T) \times \\ &\times \left[\epsilon_{\nu\mu}^*(\omega, \vec{r}) - \epsilon_{\mu\nu}(\omega, \vec{r}) \right] \delta_{\nu\mu} \delta(\vec{r} - \vec{r}') / (2\pi), \\ \langle j_\alpha^{0\mu}(\omega, \vec{r}), j_\beta^{0\mu}(\omega, \vec{r}') \rangle &= -i\omega F^{\mu\mu}(\omega, \vec{r}) \Theta(\omega, T) \times \\ &\times \left[\epsilon_{\alpha\beta}^*(\omega, \vec{r}) - \epsilon_{\beta\alpha}(\omega, \vec{r}) \right] \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}') / (2\pi). \end{aligned}$$

Введенные функции $F^{\epsilon, \mu}(\omega, \vec{r})$ определяют рассеяние от тел. Это рассеяние является многократным, а введенные функции комплексные. Для нескольких тел в вакууме взаимные корреляции между телами равны нулю в силу дельта-коррелированности, поскольку их точки разделены. Вводя эти функции в корреляции, через формальные решения, определим плотность энергии в вакууме. Эта плотность вблизи тел не одинаковая. Вдали от них она должна определяться через планковскую плотность. Таким образом, определение функций $F^{\epsilon, \mu}(\omega, \vec{r})$ есть обратная задача. Ее можно решить методом коллокаций. Задавая наборы точек внутри тел \vec{r}_n и столько же точек вдали от них, получаем систему линейных уравнения для определения значений $F^{\epsilon, \mu}(\omega, \vec{r}_n)$. Эти значения следует определять из условия соответствия планковской плотности с учетом нулевых колебаний. Данные результаты затем уже следует использовать для определения энергии и силы.

В качестве простейшей модели рассмотрим два проводящих бесконечно тонких экрана размером $a \times a$, разделенных дистанцией d . Самый простой случай соответствует идеально-проводящим экранам, которые означают, что флуктуационных источников \vec{j}^0 на них нет, а поверхностные токи проводимости \vec{j} определяются из граничного условия $\vec{E}_\tau(\omega, \vec{r}) = \vec{F}_\tau^\epsilon(\omega, \vec{r}, \vec{j}) = 0$, где \vec{r} принадлежит экранам, τ соответствует касательным компонентам. Это поверхностное ИУ, позволяющее определить частоты ω_n и плотности поверхностного тока \vec{j}_n . Этот ток обусловлен вакуумными флуктуациями и обычно превышает ток, наведенный тепловым полем. Последний вдали от краев и при большом расстоянии d можно определить приближенно. Именно, он равен скачку касательной компоненты магнитного теплового поля $\langle H_0^2 \rangle = \eta_0^{-2} \langle E_0^2 \rangle$, где $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Вблизи краев нормальная компонента тока обращается в нуль. Реально для нахождения тока следует обращать интегральный оператор, т.е. решать поверхностное ИУ. Для проведения расчетов использованы тригонометрические базисные функции. Для

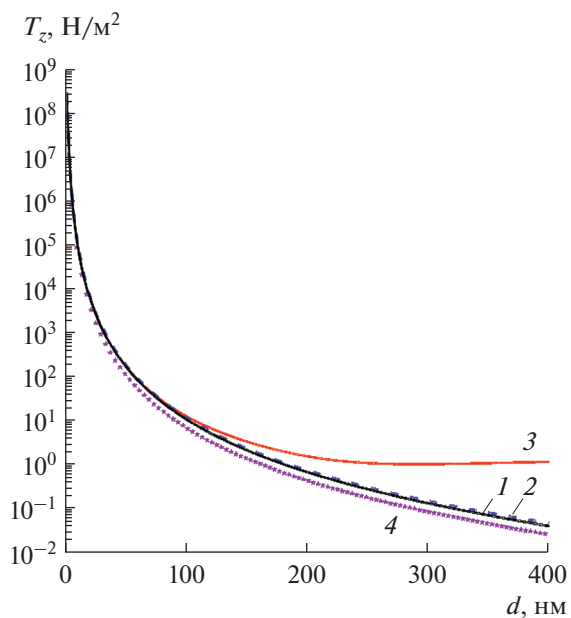


Рис. 1. Удельное натяжение T_z в зависимости от расстояния d при температуре $T = 0$ (1, 4), 1000 (2) и 10000 К (3) для размера экрана $a = 400$ (1–3) и 200 нм (4); размер резонатора $L = 2$ мкм.

тепловой компоненты можно использовать приближение

$$\begin{aligned} \langle j_x^2 \rangle &= \eta_0^{-2} \langle E_0^2 \rangle \cos(\pi x / (2a)), \\ \langle j_y^2 \rangle &= \eta_0^{-2} \langle E_0^2 \rangle \cos(\pi y / (2a)). \end{aligned}$$

Для вычисления использованы размеры резонатора, превышающие размер пластин в десять раз. Использована частота обрезания, определяемая из условия $\omega_{\max} = 100c/a$. Получение результата требует больших вычислений, поскольку вычисляются трехмерные суммы. На рис. 1 приведены результаты вычисления силы между двумя одинаковыми идеально-проводящими пластинами на расстоянии d , помещенными перпендикулярно оси z симметрично в центре резонатора. Следует отметить, что сила складывается из собственно “вакуумной” силы Казимира и силы давления излуче-

ния. Для определения энергии следует суммировать с величиной $\Theta(\omega_n, T)$, учитывающей нулевые энергии квантовых осцилляторов поля. При малом зазоре тепловое поле слабо затекает в него, плотность энергии в нем мала и внешнее давление больше внутреннего. ФГ вычислены из условия, что верхние индексы в суммах равны $100L/a$.

Если рассматриваемые листы имеют конечный импеданс, например в случае графеновых листов, они поглощают излучение. Поглощение излучения приводит к флуктуационным плотностям \vec{j}^0 на них, создающими в силу принципа детального равновесия излучаемое поле, мощность излучения которого в дальнюю зону равна мощности поглощения. Из-за взаимодействия листов возникают токи проводимости \vec{j}_n^p , удовлетворяющие условию

$$\vec{E}_\tau(\omega, \vec{r}_n) = \sigma^{-1} \vec{j}_n^p = \vec{F}_\tau^\varepsilon(\omega, \vec{r}_n, \vec{j}_1^p, \vec{j}_2^p, \vec{j}_1^0, \vec{j}_2^0),$$

где \vec{r}_n принадлежит экранам, $n = 1, 2$. Здесь разделены флуктуационные и дифракционные части плотностей тока. Корреляции для \vec{j}_n^0 следует определять из принципа детального равновесия для одиночных листов. Приведенные уравнения суть ИУ для определения корреляций наведенных из-за дифракции токов. Их следует определять из условия, что $\langle \vec{j}_n^p, \vec{j}_n^p \rangle \rightarrow 0$ при увеличении расстояния между листами. Введем полные флуктуационные токи $\vec{j}_n^d = \vec{j}_n^0 + \vec{j}_n^p$. Они получаются с учетом дифракции. Находить их корреляции следует из условий, что вдали от листов плотность излучения является планковской. Нахождение корреляций позволяет вычислить полную свободную энергию резонатора с листами. Отметим, что в данном случае в резонаторе есть диссипация, однако полная энергия сохраняется. Это связано с тем, что диссипированная энергия полностью компенсируется флуктуационными источниками \vec{j}_n^0 . В данном случае строгое вычисление силы требует решать поверхностные ИУ для определения корреляций всех источников. В слу-

Таблица 1. Среднее натяжение T_z в зависимости от расстояния d (нм)*

$T, \text{ К}$	$T_z = f/a^2, \text{ Н/м}^2$			
	$d = 10$	$d = 20$	$d = 30$	$d = 40$
0	1.002×10^{-8}	0.0522×10^{-8}	0.0852×10^{-9}	0.0172×10^{-9}
300	1.008×10^{-8}	0.0525×10^{-8}	0.0853×10^{-9}	0.0173×10^{-9}
600	1.102×10^{-8}	0.0573×10^{-8}	0.0869×10^{-9}	0.0189×10^{-9}

* Условия: $a = 100$ нм и $L = L_x = L_y = L_z = 1000$ нм.

чае объемных тел следует решать объемные ИУ. Исходные формы всех ИУ для решения удобно преобразовать к формам с пониженной сингулярностью ядер и свести гиперсингулярные ИУ к интегродифференциальным объемно-поверхностным уравнениям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для простейших структур (см., например, [1–8]) в явной форме были получены силы Казимира–Лифшица, или дисперсионные силы. Формула Казимира получена для плоского резонатора Фабри–Перро. Формула Лифшица [4], получена для зазора между полупространствами. В нее входят коэффициенты отражения с фазовыми множителями $R_{e,h}R_{e,h}\exp(-2ik_zd)$, учитывающими многократные переотражения, что определяет зависимость свободной энергии зазора от размера d [4]. Падающее на полупространство излучение полностью затухает, даже если среда обладает бесконечно малыми потерями, т.е. в этом случае дифракционные потери характеризуются только коэффициентами отражения. Для ряда хорошо прозрачных плоских структур (экранов или зеркал) с конечной толщиной (включая и графен с нулевой толщиной) в некоторых работах, например, [6–8] была использована формула Лифшица. При малых $|R_{e,h}|^2$ ее использование требует обоснования. В этом случае при малой диссипации $|T_{e,h}|^2 \approx 1$, т.е. учет только коэффициентов отражения приводит к завышению результатов. Корректный учет дифракционных потерь теплового поля важен для получения корреляционных соотношений и для определения дифракционных сил [1].

В данной работе на основе получения решения задачи о возбуждении резонатора с идеальными стенками и с равновесным тепловым полем сформулирована обратная задача определения корреляций токов, возникающих в телах. Токи поляризации приводят к объемным ИУ. Поверхностные токи в случае проводящих листов приводят к поверхностным ИУ. В общем случае возникают объемно-поверхностные интегродифференциальные уравнения. Их формальные решения позволяют найти корреляции, рассматривая поля вдали от тел, а затем вычислять свободную энергию вакуумной области резонатора. В работе предложены методы определения силы на основе формул возбуждения резонатора с использованием ТНМ и силы Лоренца. Подход позволяет определять силу взаимодействия между телами произвольной формы. В работе [17] приведен пример расчета силы взаи-

модействия между цилиндрическими телами с поверхностной проводимостью – углеродными нанотрубками с использованием ТНМ и корреляций, полученных на основе флуктуационно-диссипационной теоремы.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-19-00226) и Министерства образования и науки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FS-RR-2020-0004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин М.Л., Рытов С.М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967.
2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния. М.: Наука, 1978.
3. Лифшиц Е.М. // ЖЭТФ. 1955. Т. 29. № 1. С. 94.
4. Leonhardt U. Forces of the Quantum Vacuum: an Introduction to Casimir Physics / Ed. W.M.R. Simpson. Singapore: World Scientific Publishing, 2015.
5. Lifshitz E.M., Dzyaloshinskii I.E., Pitaevskii L.P. // Advances in Physics. 1961. V. 10. № 38. P. 165.
6. Bordag M., Klimchitskaya G.L., Mohideen U., Mostepanenko V.M. Advances in the Casimir Effect. Oxford: Univ. Press, 2009.
7. Klimchitskaya G.L., Mohideen U., Mostepanenko V.M. // Rev. Mod. Phys. 2007. V. 81. № 4. P. 1827.
8. Volokitin A.I., Persson B.N.J. Electromagnetic Fluctuations at the Nanoscale. Theory and Applications. Heidelberg: Springer, 2017.
9. Golestanian R. // Phys. Rev. A. 2009. V. 80. № 1. P. 012519.
10. Emig T., Graham N., Jaffe R.L., Kardar M. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. P. № 17. P. 170403.
11. Schwinger J., DeRaad L.L., Milton K.A. // Ann. Phys. 1978. V.115. № 1. P. 676.
12. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Наука, 1988.
13. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983.
14. Давидович М.В., Бушнев Н.А. // ЖТФ. 2013. Т. 83. № 7. С. 135.
15. Давидович М.В. // РЭ. 2001. Т. 46. № 10. С. 1198.
16. Давидович М.В. // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. № 6. С. 623.
17. Nefedov I.S., Davidovich M.V., Glukhova O.E. et al. // Phys. Rev. B. 2021. V. 104. № 8. P. 085409.