

**К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА –  
РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

УДК 535

**ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА АДМИТАНСОВ  
N-СЛОЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР И ЗАДАЧИ СИНТЕЗА**

© 2022 г. Ю. И. Худак<sup>a</sup>, \*, Д. В. Парфенов<sup>a</sup>, М. И. Джиеова<sup>a</sup>

<sup>a</sup>МИРЭА – Российский технологический университет,  
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

\*E-mail: hudak@mirea.ru

Поступила в редакцию 02.02.2022 г.

После доработки 24.02.2022 г.

Принята к публикации 01.03.2022 г.

Известно, что уровень аналитического моделирования прямых задач электродинамики слоистых диэлектрических структур (СДС) серьезно отстал от потребностей задач оптимизационного синтеза фильтров и решения обратных задач в этой области. Рассмотрена постановка задачи синтеза полосового оптического фильтра на базе заданного в полосе волновых чисел  $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$  идеала его энергетического коэффициента отражения  $-\tilde{R}(\kappa)$  в метрике пространства  $\mathbb{C}[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ . Осуществлено упрощение и дополнение этой постановки задачи важными для практики условиями принадлежности адмитансов системы  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_N)$  кубу  $K_{\bar{p}} = \{\hat{p} \leq p_j \leq \bar{p}, (j = 1, \dots, N)\}$  допустимых адмитансов и электрических толщин слоев системы  $\bar{v} = (v_1, \dots, v_N)$  параллелепипеду  $\Pi_{\bar{v}} = \{\hat{v}_j \leq v_j \leq \bar{v}_j, (j = 1, \dots, N)\}$  ограниченный СДС по толщинам. Изучено взаимодействие структур пространств электродинамических параметров  $\mathcal{P}_N = \{\bar{p}\}$  адмитансов и  $\mathcal{N}_N = \{\bar{v}\}$  электрических толщин слоев СДС, чего до последнего времени сделано не было.

**DOI:** 10.31857/S0033849422110031

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Если плоское электромагнитное поле<sup>1</sup> существует в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , разделенном системой диэлектрических слоев на два полупространства  $\mathbb{R}_-^3$  и  $\mathbb{R}_+^3$ , то, в общем случае, в  $\mathbb{R}_-^3$  и  $\mathbb{R}_+^3$  имеются по две плоские волны, одна из которых распространяется к СДС, а другая – от нее. Обозначим<sup>2</sup>  $C_0^{(-)}$  амплитуду волны, распространяющейся к СДС в  $\mathbb{R}_-^3$ ,  $C_1^{(-)}$  – от СДС в  $\mathbb{R}_+^3$ ,  $C_1^{(+)}$  – распространяющейся к СДС в  $\mathbb{R}_+^3$ , а  $C_0^{(+)}$  – от СДС в  $\mathbb{R}_-^3$ . Показано, что при не слишком больших величинах электромагнитных полей существует линейная связь между векторами амплитуд  $\mathbf{C}_-$  и  $\mathbf{C}_+$

$$\mathbf{C}_- \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} C_0^{(-)} \\ C_1^{(-)} \end{pmatrix} \text{ в } \mathbb{R}_-^3 : \mathbf{C}_- = \mathcal{T} \mathbf{C}_+,$$

$$\text{где } \mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} \\ \tau_{10} & \tau_{11} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} C_0^{(+)} \\ C_1^{(+)} \end{pmatrix} \text{ в } \mathbb{R}_+^3.$$

Матрица  $\mathcal{T}$  всегда не вырождена и называется матрицей передачи СДС<sup>3</sup>. В данной работе при минимальных ограничивающих предположениях получены универсальные аналитические выражения для элементов матрицы  $\mathcal{T}$ , описывающей всевозможные в таких СДС связи между плоскими электромагнитными полями в  $\mathbb{R}_-^3$  и  $\mathbb{R}_+^3$ , как функционалов от физических свойств слоев диэлектрической системы и частоты поля, которые позволяют проанализировать природу имеющихся в таких системах спектральных закономерностей и необходимы при разработке математического аппарата для постановки и решения важных для практики оптимизационных и обратных задач.

Описание любых спектральных характеристик произвольных СДС может быть основано на существенно расширенном толковании анонсированных в [3] и обоснованных в [4] формул, положенных в основу работ авторов [1, 2].

<sup>1</sup> Рассматриваются поля, волновой вектор которых нормален слоям системы. Для случая наклонного распространения волн достаточно внести в построения очевидные изменения.

<sup>2</sup> Эти обозначения введены и обоснованы в работах [1, 2].

<sup>3</sup> Матрица передачи записана для случая действия оператора “справа–налево”.

Выяснилось удобство использования электро-динамических параметров<sup>4</sup>, отличных от адмитансов:

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\varepsilon_j/\mu_j}, \quad j = 0, 1, \dots, N, N+1,$$

и электрических толщин слоев системы:

$$v_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\varepsilon_j\mu_j}h_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Важнейшими из “новых” параметров оказываются отношения адмитансов соседних слоев системы

$$\theta_j \stackrel{\text{def}}{=} p_j/p_{j-1},$$

которые мы называем параметрами Френеля слоистой системы, так как они однозначно связаны формулой

$$\theta_j \stackrel{\text{def}}{=} (1 - q_j)/(1 + q_j),$$

с амплитудными коэффициентами отражения Френеля  $q_j$  для границы раздела соседних сред:

$$q_j \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \theta_j)/(1 + \theta_j).$$

При этом

$$\prod_{k=1}^{N+1} \theta_k \stackrel{\text{def}}{=} \theta = p_{N+1}p_0$$

— заданная величина, которая служит основанием введенных в пространстве адмитансов показательных координат, линеаризующих соотношения между параметрами Френеля и “распрямляющих” все возникающие гиперповерхности второго порядка в гиперплоскости. Новые представления элементов матрицы  $\mathcal{T}$  позволили провести подробное изучение спектральных свойств произвольных плоских диэлектрических структур.

Полученные формулы для коэффициентов Фурье экспоненциального представления элементов  $\tau_{lk}$  матрицы передачи  $\mathcal{T}$  приводят к рассмотрению вопросов вырождения  $N$ -слойных СДС в  $(N-1)$ -слойные и еще “менее” слойные системы, доходя в крайнем случае 0-слойной системы до случая Френеля — “составного” пространства  $\mathbb{R}^3$ , т.е. составленного из двух полупространств  $\mathbb{R}_-^3$  и  $\mathbb{R}_+^3$ . Коэффициенты тригонометрического представления элементов  $\tau_{lk}$  матрицы передачи  $\mathcal{T}$  названы в работе вычислительными параметрами СДС (см. ниже). Оказывается, что

<sup>4</sup> Параметры  $\bar{p}, \bar{v}$  мы называем электродинамическими, так как именно они однозначно определяются при решении обратной задачи об определении структуры СДС по заданному амплитудному коэффициенту отражения  $r(\omega)$  от СДС (см. [4]).

именно через них аналитически выражаются многие спектральные свойства СДС, а их квадраты участвуют в описании ячеистой структуры пространства импедансов  $\mathcal{P}_N$   $N$ -слойных СДС.

Введены понятия порождающих и профилирующих функций  $N$ -слойных СДС, оценки которых в разных нормах позволяют получить оценки энергетических коэффициентов отражения и пропускания. Полученные результаты могут быть широко использованы при решении задач анализа и оптимизационных задач синтеза диэлектрических фильтров различного назначения.

При решении задач синтеза фильтров желаемое поведение энергетического коэффициента отражения или пропускания слоистой системы в заданной полосе волновых чисел  $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$  обычно задается спектральными характеристиками<sup>5</sup> этого фильтра  $\tilde{R}(\kappa)$  и  $\tilde{T}(\kappa)$  (см. соответствующие рисунки в [2]). Математическая постановка задачи оптимального в смысле П.Л. Чебышева синтеза слоистого диэлектрического фильтра рассмотрена в [1]:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min, \quad (1)$$

где  $\bar{p}$  — адмитансы и  $\bar{v}$  — электрические толщины слоев СДС.

В [2] мы рассмотрели математическую постановку задачи синтеза:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min \quad (2)$$

при  $\bar{v} \subset \mathcal{N}_N$  и  $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$ ,

и эквивалентную указанной выше исходной упрощенную постановку:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |F(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{F}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min \quad (3)$$

при  $\bar{v} \subset \mathcal{N}_N$  и  $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$ ,

где  $F(\kappa, \bar{p}, \bar{v})$  — профилирующая функция для СДС,  $\tilde{F}(\kappa)$  — идеал для профилирующей функции, пересчитанный из идеала для коэффициента отражения  $\tilde{R}(\kappa)$  или пропускания  $\tilde{T}(\kappa)$  (см. [1, 2]), а  $\bar{v}$  — элементы из пространства  $\mathcal{N}_N$  — возможных электрических толщин,  $\bar{p}$  — адмитансы слоев СДС — элементы заданного куба  $K_N$  в пространстве адмитансов  $\mathcal{P}_N$  материалов СДС. Последние постановки задач синтеза СДС естественно называть задачами оптимизации в смысле П.Л. Чебышева с ограничениями.

<sup>5</sup> Функции типа  $\tilde{R}(\kappa), \tilde{T}(\kappa)$  в данной работе, так же как и в [2], будем называть *идеалами* для соответствующих физически реализуемых конкретным фильтром спектральных характеристик.

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ РЕШЕНИЕ.  
МАТРИЦА ПЕРЕДАЧИ СДС

Используя обозначения [1, 2] и [4–6], приведем основной результат. Элементы  $\tau_{lm}$ ,  $l, m = 0, 1$ , матрицы  $\mathcal{T}$  естественно назвать *порождающими функциями* СДС, так как при различных выборах “управляющих” векторов  $\vec{\theta}$ ,  $\vec{v}$  они представляют решение задачи анализа для любой СДС.

Экспоненциальное представление порождающих функций при  $\vec{t} = k\vec{v}$  имеет вид

$$\tau_{lm}(\vec{\theta}, \vec{t}) = \sum_J Q_J^m(\vec{\theta}(\omega)) \exp(-i\Lambda_J(\vec{t})), \quad (4)$$

где  $\mathbf{J} = (j_0 = l, j_1, \dots, j_N, j_{N+1} = m)$ ,  $j_k = 0, 1$ ,

$$Q_J^m(\vec{\theta}) = \prod_{k=1}^{N+1} 1/2 [1 + (-1)^{j_{k-1} \oplus j_k} \theta_k] \quad (5)$$

– “коэффициенты Фурье”,

$$\Lambda_J(\vec{t}) = \sum_{k=1}^N (-t_k)^{j_k} \quad (6)$$

– “показатели Фурье”.

*Замечание.* Формулы (5) показывают, что при совпадении адмитансов соседних слоев  $p_{j-1} = p_j$  при каком-либо  $j = 1, \dots, N + 1$ , т.е. выполнении условия “вырождения”:  $\theta_j = 1$ , половина из всех коэффициентов Фурье (имеющих множитель  $1 - \theta_j$ ) обратится в нуль, что превратит  $N$ -слойную СДС в  $(N - 1)$ -слойную. При выполнении двух условий вырождения для разных  $j$  в нуль обратятся 3/4 коэффициентов Фурье и СДС превратится в  $(N - 2)$ -слойную. При выполнении  $N$  условий “вырождения”  $N$ -СДС превратится в 0-слойную – пространство  $\mathbb{R}^3$ , составленное из полупространств  $\mathbb{R}_-^3$  и  $\mathbb{R}_+^3$  (случай Френеля). Это явление влечет целую серию следствий, вскрывающих геометрическую структуру пространства адмитансов  $\mathcal{P}_N N$ -слойных СДС.

3. ГЕОМЕТРИЯ  
ПРОСТРАНСТВА АДМИТАНСОВ

Поскольку изображение  $\mathcal{P}_N$  при  $N \geq 3$  практически невозможно, графически проиллюстрируем соответствующие построения при  $N = 2$ . Они носят общий характер и справедливы при любом  $N$ .<sup>6</sup> На рис. 1 и 2 показаны пространства  $\mathcal{P}_2$  адмитансов двухслойных систем<sup>7</sup>. Различие

<sup>6</sup> При  $N > 2$  изменяются формулы для введения показательных координат  $\vec{s} = (s_1, \dots, s_N)$ .

<sup>7</sup> Ввиду обилия информации на рисунках не показан куб допустимых адмитансов  $K_N$ , который при допущении, что адмитанс “подложки”  $p_{N+1}$  входит в число допустимых, содержит внутри себя “особую точку”  $\Pi'$  (см. рис. 1 и 2) вырождения двухслойной системы в нульслойную.

между рисунками связано с использованием разных систем координат. На первом из них в качестве координат использованы исходные адмитансы  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$  и пространство  $\mathcal{P}_2$  представляет собой четверть плоскости. На рис. 2 использованы “показательные координаты”, основанием которых служит базовый параметр рассматриваемых СДС:  $\theta = p_3/p_0$ , а координаты  $s_1, s_2$  изменяются в пределах  $-\infty < s_1 < +\infty$ ,  $-\infty < s_2 < +\infty$ :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta^{s_1+1/2}, & \theta_2 &= \theta^{s_2-s_1}, \\ \theta_3 &= \theta^{-s_2+1/2}, & \theta_1\theta_2\theta_3 &= \theta = \frac{p_3}{p_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 1 и 2 по общим обозначениям вершин и линий легко идентифицируются основные графовые структуры пространства  $\mathcal{P}_2$ .<sup>8</sup> На обоих рисунках изображены три линии вырождения: вертикальная  $V_1$ , диагональная  $V_2$ , горизонтальная  $V_3$  с соответствующими формулами:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 1 \quad (p_1 = p_0), \\ \theta_2 &= 1 \quad (p_2 = p_1), \\ \theta_3 &= 1 \quad (p_3 = p_2). \end{aligned}$$

В пересечении линии вырождения образуют треугольник вырождения с вершинами  $I'$ ,  $\Pi'$ ,  $\text{III}'$ . Также на рисунке есть три линии  $U_1, \dots, U_3$ , две из них,  $U_1, U_3$ , параллельны вертикальной  $V_1$  и горизонтальной  $V_3$  линиям вырождения, двойственны к ним и описываются уравнениями соответственно:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \quad (p_1 = p_3), \\ \theta_3 &= \theta \quad (p_2 = p_0). \end{aligned}$$

Третья линия  $U_2$  является двойственной по отношению к биссектрисе координатного угла  $p_2 = p_1$ . Линия  $U_2$  является лучом из начала координат через вершину прямого угла между  $V_1$  и  $V_3$  и имеет уравнение

$$\theta_2 = \theta \quad (p_2 = \theta p_1, \theta = p_3/p_0).$$

На рис. 2 эта линия параллельна линии вырождения  $V_2$ . Двойственные линии в пересечении образуют “большой треугольник” с вершинами  $I$ ,  $\Pi$ ,  $\text{III}$ .

Кроме того, на рис. 1 и 2 есть три линии  $N_1, \dots, N_3$ , две из них,  $N_1, N_3$ , параллельные вертикальной  $V_1$  и горизонтальной  $V_3$  линиям вырождения, будем называть линиями “нулей” с соот-

<sup>8</sup> Графовые структуры рис. 1 исторически следуют рис. 2, на котором удалось выделить и осмыслить эти структуры и разработать удобные обозначения.



ветствующими индексами и даются уравнениями соответственно

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta^{1/2} (p_1 = \sqrt{p_0 p_3}), \\ \theta_3 &= \theta^{1/2} (p_2 = \sqrt{p_0 p_3}). \end{aligned}$$

Третья линия  $N_2$  на рис. 1 имеет уравнение

$$\theta_2 = \theta^{1/2} (p_2 = \theta^{1/2} p_1),$$

а на рис. 2 эта линия параллельна линии вырождения  $V_2$ . Три линии “нулей” в пересечении образуют “малый треугольник” с вершинами 1, 2, 3, стороны которого параллельны сторонам большого треугольника I, II, III.

Также на рис. 1 изображены три кривые второго порядка,  $M_1, \dots, M_3$ , две параболы и одна гиперболы, уравнения которых получаются при подстановке координат  $p_1, p_2$  в уравнения линий в переменных Френеля соответственно:

$$\theta_1 = \theta_2; \quad \theta_1 = \theta_3; \quad \theta_2 = \theta_3.$$

Соответствующие линии на рис. 2 являются медианами всех трех треугольников, а потому они пересекаются в одной общей для них точке – центре всех этих треугольников, который мы будем обозначать символом  $\square$  – стилизованным “римским” нулем. Названия медианы для этих линий мы будем использовать и для рис. 1.

Четыре области на рис. 1, заштрихованные светло-серым цветом, совпадают с диаграммой Шустера [7], указавшего те области в пространстве  $\mathcal{P}_2$ , внутри которых существуют нули коэффициентов отражения для соответствующих СДС, а на рис. 2 области Шустера – внутренность малого треугольника и внутренности его внешних углов.

#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Формулы Эйлера переводят (6) в тригонометрическое представление порождающих функций:

$$\begin{aligned} \tau_{lm}(\vec{\theta}, \vec{t}) &= u_m - i v_m, \\ u_m &= \sum_{L: |L|=2n+1} (-1)^n \alpha_L^m \Psi_L(\vec{t}), \\ v_m &= \sum_{L: |L|=2n} (-1)^n \alpha_L^m \Psi_L(\vec{t}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} p_j &= \sqrt{\epsilon_j / \mu_j}, \quad \mathbf{L} = (l_1, \dots, l_N), \quad l_k = 0, 1, \quad k = 1, \dots, N, \\ \|\mathbf{L}\| &= \sum_{k=1}^N l_k, \quad \Psi_L(\vec{t}) = \prod_{k=1}^N x_k^{l_k} y_k^{l_k}, \\ x_k &= \cos(t_k), \quad y_k = \sin(t_k). \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразование  $\vec{t} = \vec{v} \omega$  делает эти функции  $2\pi$ -периодическими функциями по переменным  $t_k = v_k \omega$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Коэффициенты  $\alpha_m = (\alpha_0^m, \dots, \alpha_{2^{N-1}}^m)$ ,  $\alpha_L^m$ , ( $m = 0, 1$ ),  $\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_N)$ , ( $l_k = 0, 1$ ) представления (8) мы называем вычислительными параметрами СДС<sup>9</sup>. Обе серии вычислительных параметров ( $m = 0, 1$ ) преобразованием Адамара связаны с отвечающими им коэффициентами Фурье в (4):

$$\alpha_m = \mathcal{H} \mathbf{Q}_m, \quad \mathbf{Q}_m = (Q_0^m, \dots, Q_{2^{N-1}}^m), \quad (10)$$

где  $\mathcal{H}$  – матрица Адамара порядка  $2^N \times 2^N$ .

*Замечание.* Указанные на рис. 1 и 2 линии: вырождения, двойственные к ним и медианы при переходе к пространствам  $\mathcal{P}_N$  более высокой размерности, чем  $N = 2$ , заменяются на гиперплоскости, а в нужных местах рис. 1 – гиперповерхностями, не более второго порядка по каждой переменной  $p_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ).

Переход к показательным координатам  $\stackrel{\text{def}}{\vec{s}} = (s_1, \dots, s_N)$  в пространствах  $\mathcal{P}_N$  большей, чем  $N = 2$  размерности, проводится с использованием параметров Френеля  $\theta_k$  ( $k = 1, \dots, N + 1$ ) по формулам, в которых координаты  $s_k$  изменяются в пределах  $-\infty < s_k < +\infty$ :

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{def}}{\theta_1} = \theta^{s_1 + \frac{1}{2}}, \dots, \stackrel{\text{def}}{\theta_N} = \theta^{s_N + \frac{1}{2}}, \quad \stackrel{\text{def}}{\theta_{N+1}} = \theta^{-\left(\sum_{k=1}^N s_k\right) - \frac{N}{2} + 1}, \\ \prod_{k=1}^N \stackrel{\text{def}}{\theta_k} = \theta = p_{N+1} p_0. \end{aligned} \quad (11)$$

#### 5. ТОЖДЕСТВА СРАВНЕНИЯ

Запишем принципиальные тождества сравнения для квадратов вычислительных параметров  $\alpha_L^m$  для случая  $m = 1$ , не указывая  $m$  явно, так как при  $m = 0$  они заменяются на аналогичные. Сначала выпишем эти тождества при  $N = 2$  (в этом случае их ровно 6), чтобы их было удобно проинтерпретировать с использованием рис. 1 и 2:

<sup>9</sup> Через них аналитически выражаются важнейшие свойства порождающих функций и коэффициентов отражения, пропускания СДС, в частности, их средние и экстремальные значения.

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 - \alpha_1^2 &= (1 - \theta_3^2)(1 - \theta_1^2\theta_2^2), & \alpha_1^2 - \alpha_2^2 &= (\theta_3^2 - \theta_1^2)(1 - \theta_2^2), \\ \alpha_0^2 - \alpha_2^2 &= (1 - \theta_1^2)(1 - \theta_2^2\theta_3^2), & \alpha_1^2 - \alpha_3^2 &= (\theta_3^2 - \theta_2^2)(1 - \theta_1^2), \\ \alpha_0^2 - \alpha_3^2 &= (1 - \theta_2^2)(1 - \theta_1^2\theta_3^2), & \alpha_2^2 - \alpha_3^2 &= (\theta_1^2 - \theta_2^2)(1 - \theta_3^2). \end{aligned} \tag{12}$$

В правых частях написанных формул стоят произведения двух сомножителей, зависящих от параметров Френеля, так, что при изменении знаков этих скобок будут выполняться определенные отношения “доминирования” между квадратами вычислительных параметров:  $\alpha_i^2 >$  или  $< \alpha_j^2$ . Обращение же скобок в нуль указывает на равенство записанных слева величин. Отметим, что в правой части участвуют скобки, отвечающие уравнениям в переменных Френеля, введенных выше линий: вырождения  $V_j, j = 1, 2, 3$ , двойственных к ним  $U_j, j = 1, 2, 3$ , и медиан  $M_j, j = 1, 2, 3$ .

На рис. 2 видно, что указанные линии разбивают все пространство параметров  $\mathcal{P}_2$  на 24 треугольника, внутри каждого из которых (для всех его точек!) выполняется неравенство упорядочения:

$$\alpha_i^2 < \alpha_j^2 < \alpha_k^2 < \alpha_l^2 \quad (i, j, k, l = 0, 1, 2, 3), \tag{13}$$

символическая запись которого  $(ijkl)$  приведена на рис. 2. Таким образом, при переходе через двойственные линии  $U_j (j = 1, 2, 3)$  и медианы  $M_j (j = 1, 2, 3)$  в каждом упорядочении меняются местами два соседних параметра, например,  $\alpha_i^2$  и  $\alpha_j^2$ , а при переходе через линию вырождения  $V_j (j = 1, 2, 3)$  меняются между собой сразу две пары параметров, что и отмечено на рис. 2 надписями вида  $(ijkl)$  для тех треугольников, которые попадают внутрь диаграммы Шустера, и  $(\overline{ijkl})$ , для тех треугольников, которые лежат вне диаграммы Шустера.

Группировка областей  $(ijkl)$  по доминированию состоит в фиксации какого-либо числа из  $0, 1, 2, 3$  в “старшей” позиции  $l$ . При этом вся плоскость  $(s_1, s_2)$  будет разбита на четыре зоны, которым присвоены “римские” номера  $I, II, III, \square$ . Справедливо разбиение пространства  $\mathcal{P}_N$  на  $(2^N)!$  непересекающихся класса точек, заключенных в гипертетраэдры, аналогичные  $(2^2)! = 24$  треугольникам для  $\mathcal{P}_2$ .

### 6. СВЯЗЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ С ПАРАМЕТРАМИ ФРЕНЕЛЯ

Чтобы обосновать сказанное, получим новые формулы, выражающие вычислительные параметры  $\alpha_j (j = 0, 1, \dots, 2^N - 1)$  через параметры Фре-

неля. Для этого в формуле (5), определяющей коэффициенты Фурье, проведем перемножение биномов, воспользовавшись аддитивной формой обобщенного бинома:

$$\prod_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) = \sum_L \prod_{k=1}^n \alpha_k^{l_k} \beta_k^{\bar{l}_k},$$

где вектор  $\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_n), l_k = 0, 1, (k = 1, \dots, n)$  дает номер слагаемого в указанной сумме, а  $\bar{l}_k$  – двоичное отрицание  $l_k$ . Проведя суммирование по частям для вновь введенного для этого двоичного вектора  $\mathbf{L} = (l_0, \dots, l_{N+1})$  и используя укороченные векторы  $\mathbf{L}_0 = (0, l_1, \dots, l_{N+1})$ , придем к следующей формуле:

$$\begin{aligned} \alpha_I^m &= 1/2 (\tau_{\mathbf{L}} + (-1)^m \tau_{\bar{\mathbf{L}}}), & \mathbf{I} &= (i_1, \dots, i_N), \\ i_k &= 0, 1, & (k &= 1, \dots, N), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\tau_{\mathbf{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s=2}^{N+1} \theta_s^{l_s},$$

двоичный вектор

$$\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_{2^N-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{L}(\mathbf{I}) = \mathbf{D}\mathbf{I},$$

получается применением к  $\mathbf{I}$ , номеру  $\alpha_I$ , линейного оператора:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а  $\bar{\mathbf{L}}$  – вектор, двойственный к  $\mathbf{L}$ . Формула (14) при  $m = 1$  позволяет получить для пространства  $\mathcal{P}_N$  все те результаты, что мы анонсировали для  $\mathcal{P}_2$ .

Для векторов  $\mathbf{L}$ , имеющих только одну единицу, соответствующее  $\tau_{\mathbf{L}}$  будет иметь вид  $\theta_s (s = 2, \dots, N)$ , и мы получим  $N - 1$  гиперплоскостей вырождения  $V_s$  при  $\theta_s = 1$  и столько же двойственных им гиперплоскостей  $U_s$  при  $\theta_s = \theta$ . Еще одна гиперплоскость вырождения  $V_1$  полу-

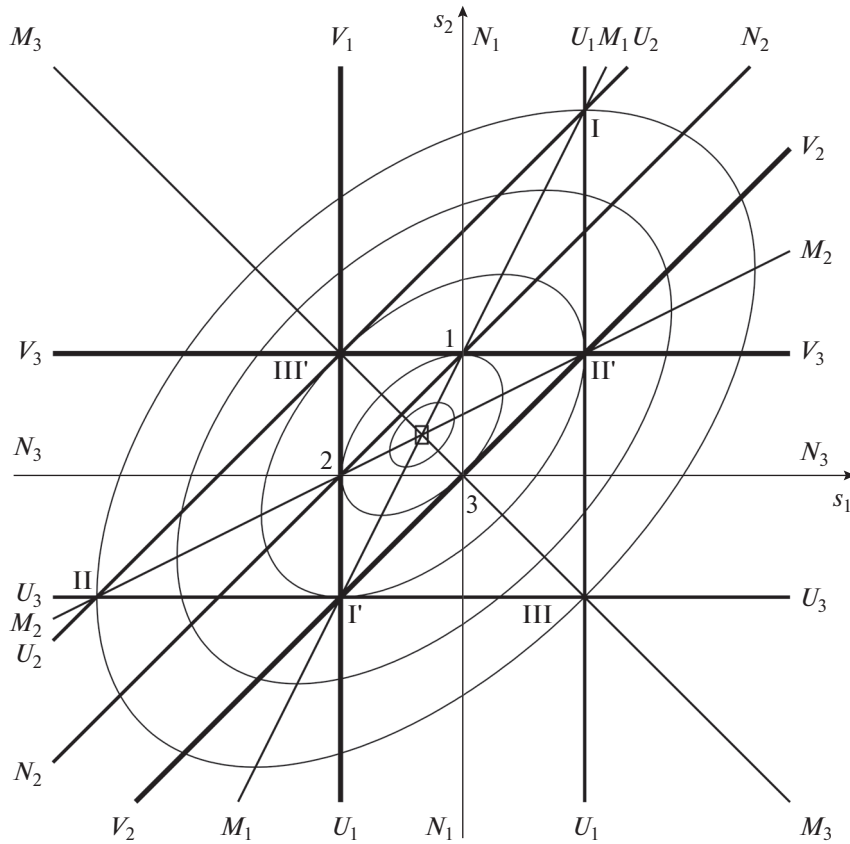


Рис. 3. “Евклидовы квазиокружности”:  $\sum_{k=1}^3 \alpha_k^2 = \rho$ ,  $(\rho_k = d_k \alpha_0^2, k = 1, \dots, 3)$ .

чится при  $\theta_1 = 1$ , а двойственная к ней гиперплоскость  $U_1$  получится при  $\theta_1 = \theta$ . Последние гиперплоскости вырождения  $V_{N+1}$  и двойственная к ней  $U_{N+1}$  соответствуют  $\theta_{N+1} = 1$  и  $\theta_{N+1} = \theta$ . Ровно по середине между каждой плоскостью вырождения  $V_s$  и двойственной к ней  $U_s$  располагается нулевая плоскость  $N_s$ . Подобно (11) при  $m = 1$  можно выписать  $2^{N-1} (2^N - 1)$  тождеств сравнения:

$$\begin{aligned} \alpha_I^2 - \alpha_J^2 &= 1/4 [(\tau_L - \tau_{\bar{L}})^2 - (\tau_M - \tau_{\bar{M}})^2] = \\ &= 1/4 (\tau_{LM} - \tau_{\bar{L}\bar{M}}) \cdot (\tau_{\bar{L}\bar{M}} - \tau_{LM}), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\mathbf{I} = \mathbf{DL}, \mathbf{J} = \mathbf{DM}$ , а  $\mathbf{LM}$  – покоординатное умножение двоичных векторов  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$ .

### 7. КВАЗИОКРУЖНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{P}_N$

Прежде всего отметим, что для элементов  $\tau_{lm}$  матрицы передачи  $\mathcal{T}$  – порождающих функций – справедливо равенство

$$\sum_J (\mathcal{Q}_J^m)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\tau_{lm}(\vec{r})\|_{\mathcal{P}_2}^2 = 1/2^N \sum_I (\alpha_I^m)^2, \quad (16)$$

выражающее квадрат их среднеквадратичной нормы в виде суммы квадратов их коэффициентов Фурье, где для второго равенства использованы свойства матриц Адамара, связывающих векторы коэффициентов Фурье и вычислительных параметров между собой. Запись квадрата нормы порождающих функций в виде суммы квадратов вычислительных параметров позволяет интерпретировать последнюю как квазиевклидову метрику в пространстве  $\mathcal{P}_N$ .

На рис. 3 при  $N = 2$  изображена серия “квазиевклидовых” “квазиокружностей”, отвечающих нескольким значениям их “квазирадиусов”:

$\rho_k = d_k \alpha_0^2$  ( $k = 1, \dots, 5$ ). На рис. 4 при  $N = 2$  представлена серия “квазичебышевских квазиокружностей”:  $\rho_k = d_k \alpha_0^2$  ( $k = 1, \dots, 5$ ), одна из которых совпала со сторонами среднего треугольника  $\Gamma', \Pi', \text{III}'$ . Смысл названия “квазичебышевские квазиокружности” тесно связан со следующей точной (в том смысле, что она достигается в некоторой вершине куба периодов  $T^N$  порождающих функций) оценкой:

$$\max_{\mathbf{T}^N} |\tau_{lm}(\vec{r})|^2 \leq \max_I (\alpha_I^m)^2, \quad (17)$$

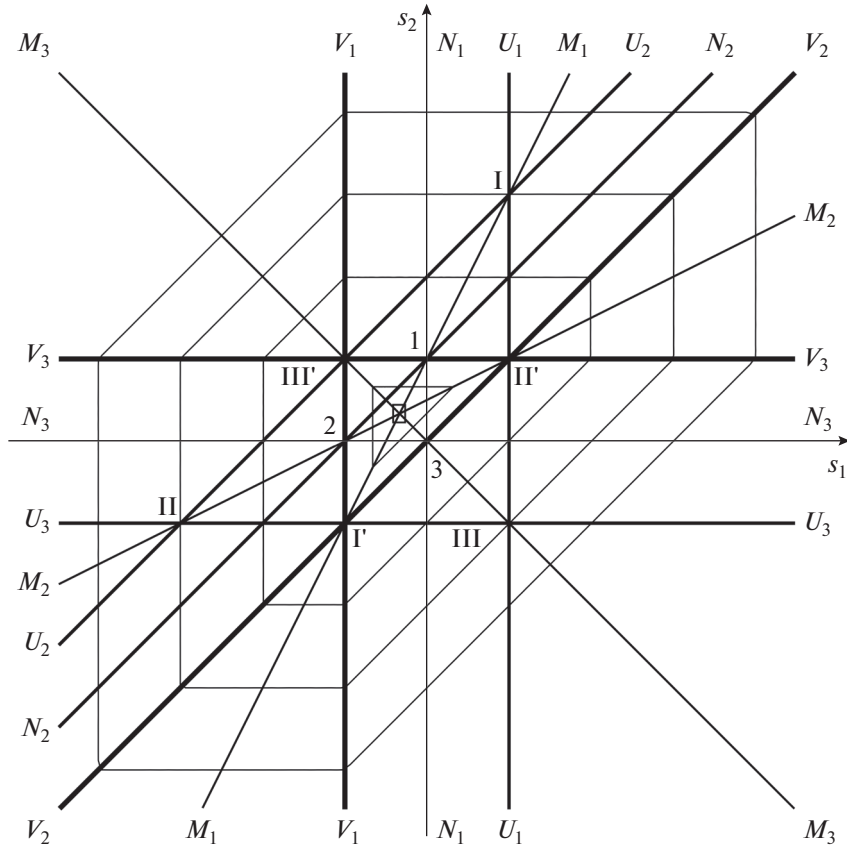


Рис. 4. “Чебышевские квазиокружности”:  $\max_{0 \leq l \leq 2^N - 1} \alpha_l^2 = \rho, \rho_k = d_k \alpha_0^2, k = 1, \dots, 5).$

которая легко получается и позволяет рассматривать в пространстве  $\mathcal{P}_N$  “квазичебышевскую” метрическую функцию.

С использованием (17) получены эффективные, точные и неулучшаемые на классе СДС оценки энергетических коэффициентов отражения сверху и пропускания снизу:

$$\begin{aligned} \max_{\Gamma^N} |\mathbf{R}(\vec{r})|^2 &\leq \max_{\Gamma} \frac{(\alpha_l^1)^2}{(\alpha_l^0)^2}, \\ \max_{\Gamma^N} |\mathbf{T}(\vec{r})|^2 &\leq 1 - \max_{\Gamma} \frac{(\alpha_l^1)^2}{(\alpha_l^0)^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

С помощью неравенства Бернштейна эти оценки дают точные оценки производных указанных характеристик СДС.

### 8. ПРИМЕР СИНТЕЗА ПОЛОСОВОГО ФИЛЬТРА ПРИ $N = 2$

Рассмотрим пример синтеза полосового фильтра для заданного идеала  $\tilde{F}(k) \equiv 0$  профилирующей функции, отвечающего такому же идеалу для коэффициента отражения  $\tilde{R}(k) \equiv 0$ . Традицион-

но примем  $p_0 = 1$ , а величину  $p_3$  – равной 1.52. Тогда получим  $\theta = 1.52$ , а  $\sqrt{p_0 p_3} \approx 1.233$ . Размеры куба  $K_N$  допустимых адмитансов выберем в соответствии с формулами (7) в условных единицах при значениях параметров  $s_1 = 0.125, s_2 = 0.875$ .

При таком выборе параметров  $s_1$  и  $s_2$  в соответствии с работой [8] нули порождающей функции для части области пространства адмитансов, помеченной символом (2301) и лежащей внутри куба ограничений  $K_2$ , попадают на луч  $v_2 = 2v_1$ , исходящий на плоскости  $t_1 = v_1 k, t_2 = v_2 k$  из начала координат и определяющий оптимальную обмотку на торе, соответствующем порождающей функции. Профиль сечения порождающей функции вдоль указанного луча будет иметь вид фильтра квазичебышевского типа, если поместить середину интересующего нас интервала волновых чисел  $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$  в точку  $t_1 = \pi/2, t_2 = \pi$ , выбрав величину  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ . При этом в широком диапазоне волновых чисел отношение максимального значения профилирующей функции на луче к ее минимально допустимому уровню просветления  $\alpha_2^2 \approx 0.004167$  заведомо будет превосходить вели-



чину  $(\alpha_1^2 + \alpha_3^2)/(2\alpha_2^2) \approx 27.6$ , которая является важнейшей характеристикой построенного таким образом фильтра.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано взаимодействие структур пространств электродинамических параметров адмитансов и электрических толщин слоев СДС. Объединение изложенных выше построений с полученными нами ранее результатами по детальному исследованию расположения нулей коэффициента отражения [8, 9] в зависимости от адмитансов материалов системы выводит математический аппарат решения задачи синтеза оптимальных полосовых фильтров на новый уровень.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худак Ю.И., Парфенов Д.В., Музылев Н.В., Хачлаев Т.С. // Рос. технол. журн. 2020. Т. 8. № 5. С. 26.
2. Худак Ю.И., Парфенов Д.В. // РЭ. 2021. Т. 66. № 9. С. 845.
3. Кард П.Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. Таллин: Валгус, 1971.
4. Худак Ю.И. // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 5. С. 1.
5. Худак Ю.И. // Докл. РАН. 2015. Т. 467. № 2. С. 149.
6. Худак Ю.И. // Рос. технол. журн. 2017. Т. 5. № 3. С. 3.
7. Schuster K. // Annalen der Physik (Folge 6). 1949. В. 4. Н. 5. S. 352.
8. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Нелинейный мир. 2016. № 2. С. 38.
9. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. № 2. С. 24.