

**К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА –
РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

УДК 535

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ СРЕДНИХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ПРОФИЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА**

© 2022 г. Ю. И. Худак^{a, *}, Д. В. Парфенов^a, А. И. Стариковский^a

^aМИРЭА – Российский технологический университет,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

*E-mail: hudak@mirea.ru

Поступила в редакцию 11.09.2021 г.

После доработки 21.03.2022 г.

Принята к публикации 21.04.2022 г.

Предложен новый подход, отличный от традиционного, к задачам синтеза слоистых диэлектрических фильтров (СДФ) и систем просветления, в основе которого лежит идея использования идеалов для профилирующих функций слоистооднородных диэлектрических систем (СДС), получаемых из идеалов для энергетических коэффициентов отражения или пропускания требуемого фильтра. Обосновано существенное развитие ранее предложенного авторами математического аппарата, учитывающее фундаментальные ограничения на допустимые значения импедансов материалов слоев, обычные для постановки и решения задач синтеза. Впервые обоснованы формулы для вычисления средних и экстремальных значений числителя и знаменателя энергетического коэффициента отражения, которые характеризуют спектральные показатели проектируемых систем, а также впервые обращено внимание на качественную “неоднородность” параметров параллелепипеда ограничений в пространстве импедансов, имеющую принципиальное значение при решении оптимизационных задач синтеза.

DOI: 10.31857/S0033849422110043

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Желаемое поведение энергетического коэффициента отражения или пропускания слоистой системы в заданной полосе волновых чисел $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ обычно задается спектральными характеристиками¹ $\tilde{R}(\kappa)$ и $\tilde{T}(\kappa)$ (см. соответствующие рисунки в [1]).

Математическая постановка задачи оптимального синтеза слоистооднородных диэлектрических систем (СДС) в смысле П.Л. Чебышева рассмотрена в [2]:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min, \quad (1)$$

где \bar{v} – электрические толщины и \bar{p} – импедансы всех слоев СДС.

В [1] рассмотрена математическая постановка задачи синтеза в виде

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min \quad (2)$$

при $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$,

¹ Функции типа $\tilde{R}(\kappa)$, $\tilde{T}(\kappa)$, как и в [1], будем называть идеалами для соответствующих физически реализуемых конкретным фильтром спектральных характеристик.

и эквивалентная указанной выше, исходной, упрощенная постановка:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |F(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{F}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min \quad (3)$$

при $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$,

где $F(\kappa, \bar{p}, \bar{v})$ – профилирующая функция для СДС, $\tilde{F}(\kappa)$ – идеал для профилирующей функции, пересчитанный из идеала для коэффициента отражения $\tilde{R}(\kappa)$ или пропускания $\tilde{T}(\kappa)$ (см. [1, 2]), а \bar{v} – элементы пространства \mathcal{N}_N – электрических толщин и \bar{p} – импедансы слоев СДС – элементы параллелепипеда \mathbf{P}_N из пространства импедансов \mathcal{P}_N материалов.

Последние постановки задач синтеза СДС естественно называть задачами оптимизации в смысле П.Л. Чебышева с ограничениями.

Получены принципиальные для теории и практики СДС результаты.

1. Точные выражения для коэффициентов α_I , $I = (i_1, \dots, i_N)$, $i_k = 0, 1$ (I – двоичная запись индекса α_I) представлений числителя и знаменателя коэффициентов отражения N -слойных систем

(N – число слоев в системе), которые в [3] названы вычислительными параметрами² СДС, через основные параметры таких систем $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{N+1})$, где $\theta_j, j = 1, \dots, N + 1$ – отношение импедансов слоев системы (номера $j = 0$ и $j = N + 1$ присвоены полупространствам, “окружающим” N -слойную СДС слева и справа).

2. Формулы для выражения средних значений числителя и знаменателя энергетических коэффициентов отражения и пропускания через вычислительные параметры для любых N -слойных СДС, а также их компактные выражения через основные параметры СДС.

3. Показано, что средние и экстремальные значения профилирующих функций связаны с двумя типами метрики в пространстве вычислительных параметров СДС: а) среднеквадратической – для средних значений и б) чебышевской – для максимумов числителя и знаменателя $R(\kappa)$.

4. Приведены примеры совместного эффективного использования указанных новых понятий при решении задач синтеза просветляющих, антипросветляющих и полосовых фильтров для $N = 2$.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В [4] рассмотрена математическая постановка задачи о распространении через СДС (по нормали к ней) плоской электромагнитной волны и ее аналитическое решение. Введены порождающие функции СДС $\tau_s = C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t})$, $s = 0, 1$, которые являются амплитудами падающей ($s = 0$) и отраженной ($s = 1$) волн в левом полупространстве, т.е. знаменателем и числителем коэффициента отражения от такой системы, где $\vec{\theta}$ – вектор отношений импедансов $p_j = \sqrt{\epsilon_j/\mu_j}$, $j = 0, 1, \dots, N, N + 1$, соседних слоев: $\theta_j = p_j/p_{j-1}$, $\vec{t} = \vec{v}\kappa$, κ – волновое число, \vec{v} – вектор электрических толщин $v_j = \sqrt{\epsilon_j\mu_j}$ каждого из слоев $j = 1, \dots, N$ системы.

Функции $\tau_s = C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t})$ названы порождающими, так как при различных выборах векторов $\vec{\theta}, \vec{v}$ они дают решение задачи анализа для любой СДС.

² Название вычислительные параметры мотивировано тем, что через них аналитически выражаются важнейшие свойства порождающих функций СДС.

Экспоненциальные представления $C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t})$ получаются при $j_{N+1} = 0$:

$$C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t}) = \sum_J Q_J^s(\vec{\theta}) \exp(-i\Lambda_J(\vec{t})),^3 \quad (4)$$

где $J = (j_0, j_1, \dots, j_N, j_{N+1})$, $j_k = 0, 1$,

$$\Lambda_J(\vec{t}) = \sum_{k=1}^N (-1)^{j_k} t_k,$$

$$Q_J^s(\vec{\theta}) = \prod_{k=1}^{N+1} 1/2 [1 + (-1)^{j_{k-1} \oplus j_k} \theta_k], \text{ для } \check{J} j_0 = s, \quad (5)$$

где \oplus – сложение по модулю 2. Алгебраические представления таких функций:

$$C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t}) = u(\vec{\theta}, \vec{t}) - iv(\vec{\theta}, \vec{t}),$$

$$u(\vec{\theta}, \vec{t}) = \sum_{L: \|L\|=2n} (-1)^n \alpha_L \Psi_L(\vec{t}), \quad (6)$$

$$v(\vec{\theta}, \vec{t}) = \sum_{L: \|L\|=2n+1} (-1)^n \alpha_L \Psi_L(\vec{t}),$$

$$L = (l_1, \dots, l_N), \quad l_k = 0, 1, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\|L\| = \sum_{k=1}^N l_k, \quad \Psi_L(\vec{t}) = \prod_{k=1}^N x_k^{l_k} y_k^{1-l_k}, \quad (7)$$

где $x_k = \cos(t_k)$, $y_k = \sin(t_k)$, которые в силу обозначения

$$\vec{t} = \vec{v} \cdot \kappa, \quad (8)$$

являются 2π -периодическими по $t_k = v_k \kappa$ ($k = 1, 2$) функциями.

Введено понятие вычислительных параметров $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{2^N-1})$ СДС, $\vec{\alpha} = \mathcal{H}\vec{Q}$, $\vec{Q} = (Q_0, \dots, Q_{2^N-1})$, где \mathcal{H} – матрица Адамара $2^N \times 2^N$.

Докажем принципиальные формулы, дающие точные выражения для вычислительных параметров $\alpha_I, I = (i_1, \dots, i_N)$, где $i_s = 0, 1$.⁴ Для этого преобразуем определение вычислительных параметров:

$$\alpha_I = \alpha_I(\vec{\theta}) = \sum_J (-1)^{(I, J)} Q_J^s(\vec{\theta}), \quad (9)$$

где $J = (j_0, j_1, \dots, j_N, j_{N+1})$, $j_0 = s$, $j_k = 0, 1$, $j_{N+1} = 0$, а вектор $\check{J} = (j_1, \dots, j_N)$, – укороченный J , при

³ Экспоненциальное представление числителя и знаменателя коэффициента отражения СДС угаданы в [5], изменены и обоснованы в [3].

⁴ Мы имеем дело с двумя семействами вычислительных параметров: для числителя ($j_0 = 1$) и знаменателя ($j_0 = 0$) в записи вектора \mathbf{J} для коэффициентов Фурье $C_s^{(0)}$, где $j_0 = s$. Семейства отличаются знаком $(-1)^{j_0}$ в их выражениях. На это будем указывать.

помощи формулы суммирования по частям, применив ее к двоичным векторам I, \bar{J} .

В результате преобразований получим

$$\alpha_I(\bar{\theta}) = \sum_J (-1)^{(I, \bar{J})} \prod_{k=1}^{N+1} 1/2 \left[1 + (-1)^{j_{k-1} \oplus j_k} \theta_k \right] = \frac{1}{2} (\tau_L + (-1)^{j_0} \tau_{\bar{L}}), \tag{10}$$

где $\tau_L = \prod_{s=2}^{N+1} \theta_s^{\overset{\text{def}}{L}}$, двоичный вектор $L = (l_2, \dots,$

$l_{N+1}) = L(I) = \mathbf{D}I$ является образом вектора I (двоичного номера α_I) при применении к нему линейного оператора в виде двоичной матрицы:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а вектор \bar{L} двоично противоположен к L .

Из формулы (1) вытекает следующее базовое представление:

$$M \left[\left| C_s^{(0)}(\bar{\theta}, \bar{\tau}) \right|^2 \right] = \sum_j \left| Q_j^s(\bar{\theta}) \right|^2, \tag{11}$$

где использован символ $M[f(t)]$ для среднего значения функции $f(t)$.

С помощью (2) получаем выражение указанной суммы через $\bar{\theta}$:

$$M \left[\left| C_s^{(0)}(\bar{\theta}, \bar{\tau}) \right|^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\prod_{k=1}^{N+1} 1/2 \left[1 + \theta_k^2 \right] + (-1)^{j_0} \theta \right) = \frac{\theta}{2} \left(\prod_{k=1}^{N+1} 1/2 \left[\frac{1}{\theta_k} + \theta_k \right] + (-1)^{j_0} \right), \text{ где } j_0 = s. \tag{12}$$

Из (5) и ортогональности матриц Адамара получаем для $\|\bar{Q}\|^2$:

$$\|\bar{Q}\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{Q}, \bar{Q}) = (\mathcal{N}^{-1} \bar{\alpha}, \mathcal{N}^{-1} \bar{\alpha}) = \frac{1}{2^N} (\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^N} \|\bar{\alpha}\|^2, \tag{13}$$

что выражает среднее $\left| C_s^{(0)}(\bar{\tau}) \right|^2$ через среднее квадратов вычислительных параметров, пропорциональное квадрату нормы вектора $\bar{\alpha}$ (см. рис. 4):

$$M \left[\left| C_s^{(0)}(\bar{\theta}, \bar{\tau}) \right|^2 \right] = \frac{1}{2^N} \|\bar{\alpha}\|^2. \tag{14}$$

В [3] получена точная оценка профилирующих функций СДС:

$$F_s(\bar{\theta}, \bar{\tau}) = \left| C_s^{(0)}(\bar{\theta}, \bar{\tau}) \right|^2; \quad F(\bar{\theta}, \bar{\tau}) \leq \max_{0 \leq k \leq 2^N - 1} \left\{ \alpha_k^2 \right\},$$

правая часть которой является чебышевской нормой (см. рис. 5) в пространстве векторов – квадратов α_I^2 , $I = 0, \dots, 2^N - 1$ (индекс I – десятичный номер с двоичным представлением $I = (i_1, \dots, i_N)$, $i_k = 0, 1$).

2. КЛАССЫ СДС И ИХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Для эффективного использования дополнительных ограничений, наложенных на электродинамические параметры $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$, для наглядности будем рассматривать случай $N = 2$, для него в [3] описано пространство параметров импедансов \mathcal{P}_2 , которое при естественном ограничении: $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ оказалось плоским графом с 19 конечными вершинами (одна вершина в бесконечности), 66 ребрами и 48 гранями, что свидетельствует о большом разнообразии всех СДС, даже при $N = 2$. (Здесь и далее везде под СДС будем понимать двухслойные СДС, специально оговаривая другие случаи.)

Граф \mathcal{P}_2 – пространство импедансов двухслойных СДС в исходных координатах p_1, p_2 – представляет собой четверть плоскости: $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, на которой часто изображают диаграмму Шустера [6], описывающую области существования нулей двухслойных СДС.

Определение. Показательными координатами в пространстве \mathcal{P}_2 будем называть пару чисел (s_1, s_2) , удовлетворяющих определяющим их (при заданных величинах импедансов p_0, p_3), соотношениям:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta^{s_1+1/2}, & \theta_1 &= p_1/p_0, \\ \theta_2 &= \theta^{s_2-s_1}, & \theta_2 &= p_2/p_1, \text{ где } \theta \equiv \theta_1\theta_2\theta_3, \\ \theta_3 &= \theta^{-s_2+1/2}, & \theta_3 &= p_3/p_2, \end{aligned} \tag{15}$$

Граф \mathcal{P}_2 в координатах s_1, s_2 изображен на рис. 1.

Из (15) вытекает, что множество всех точек четверти плоскости параметров (p_1, p_2) , – \mathcal{P}_2 , получается при изменении (s_1, s_2) во всей плоскости: $-\infty < s_i < +\infty$, $i = 1, 2$, и соответствие (15) взаимно-однозначно.

Для различения двух указанных выше смыслов символа \mathcal{P}_2 будем писать дополнительную букву \mathcal{G} сверху в обозначении пространства: $\mathcal{P}_2^{\mathcal{G}}$.

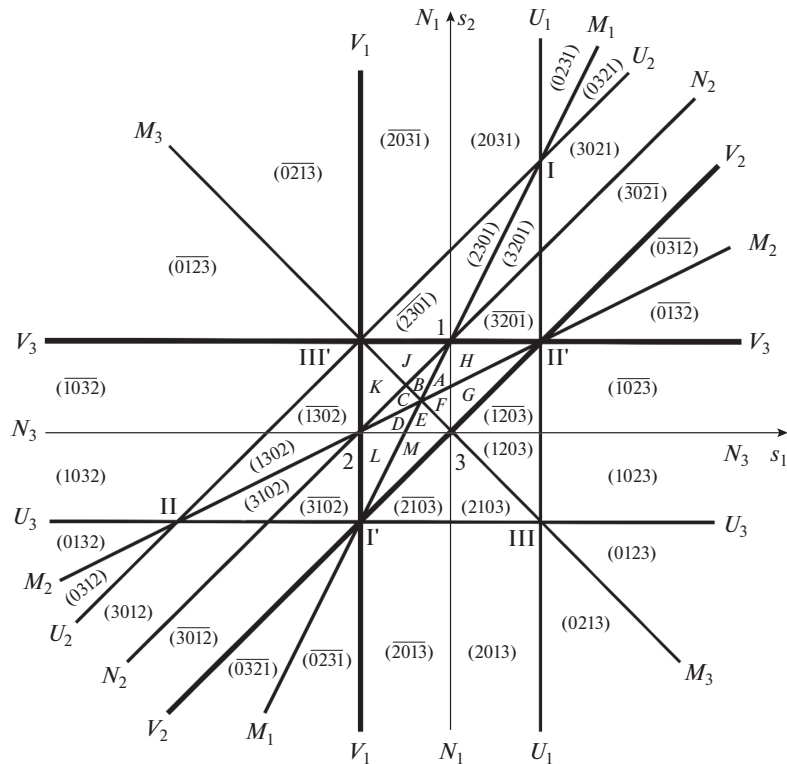


Рис. 1. Пространство \mathcal{P}_2 параметров СДС в координатах (s_1, s_2) . Грани графа G помечены наборами чисел $(ijkl)$ или (\overline{ijkl}) , если для их внутренних точек выполнены неравенства $\alpha_i^2 < \alpha_j^2 < \alpha_k^2 < \alpha_l^2$ и выполнено или нет условие существования нулей. Введены обозначения: $A - (3120)$, $B - (3210)$, $C - (2310)$, $D - (2130)$, $E - (1230)$, $F - (1320)$, $G - (\overline{3120})$, $H - (\overline{3210})$, $J - (\overline{2310})$, $K - (\overline{2130})$, $L - (\overline{1230})$, $M - (\overline{1320})$.

В силу взаимной однозначности отображения (15): $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_2 \leftrightarrow (s_1, s_2) \in \mathcal{P}_2^g$ геометрическая структура исходной четверти плоскости (p_1, p_2) полностью сохраняется на рис. 1, с точностью до

“распрямления” некоторых кривых второго порядка.

Лемма. Имеют место принципиальные тождества сравнения:

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 - \alpha_1^2 &\equiv \frac{1}{4}(1 - \theta_3^2)(1 - \theta_1^2\theta_2^2), & \alpha_1^2 - \alpha_2^2 &\equiv \frac{1}{4}(\theta_3^2 - \theta_1^2)(1 - \theta_2^2), \\ \alpha_0^2 - \alpha_2^2 &\equiv \frac{1}{4}(1 - \theta_1^2)(1 - \theta_2^2\theta_3^2), & \alpha_1^2 - \alpha_3^2 &\equiv \frac{1}{4}(\theta_3^2 - \theta_2^2)(1 - \theta_1^2), \\ \alpha_0^2 - \alpha_3^2 &\equiv \frac{1}{4}(1 - \theta_2^2)(1 - \theta_1^2\theta_3^2), & \alpha_2^2 - \alpha_3^2 &\equiv \frac{1}{4}(\theta_1^2 - \theta_2^2)(1 - \theta_3^2). \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство формул леммы проводится вычислением разностей квадратов α_j , $j = 1, 2, 3$ по определению вычислительных параметров.

Теорема. (О перечислении граней и основных свойств графа \mathcal{P}_2)

1. \mathcal{P}_2 имеет 48 граней, которые на рис. 1 обозначены подстановками: $(ijkl)$ и (\overline{ijkl}) ⁵, в зависи-

мости от того содержит или нет данная грань внутренние точки диаграммы Шустера. Классы СДС, соответствующие граням, устойчивы в том смысле, что малые вариации (p_1, p_2) или (s_1, s_2) , не выводящие за пределы грани, мало меняют свойства этих СДС, т.к. мало меняют их вычислительные параметры.

2. 66 классов СДС, отвечающих ребрам графа G , относительно устойчивы в том смысле, что малые вариации (p_1, p_2) или (s_1, s_2) вдоль ребра мало меняют свойства СДС, так как мало меняют их вычислительные параметры. Вариации же (p_1, p_2)

⁵ Символы подстановок $(ijkl)$ и (\overline{ijkl}) , как и в [3], используются для сокращенной записи неравенств: $\alpha_i^2 < \alpha_j^2 < \alpha_k^2 < \alpha_l^2$, справедливых для внутренних точек граней \mathcal{P}_2 .

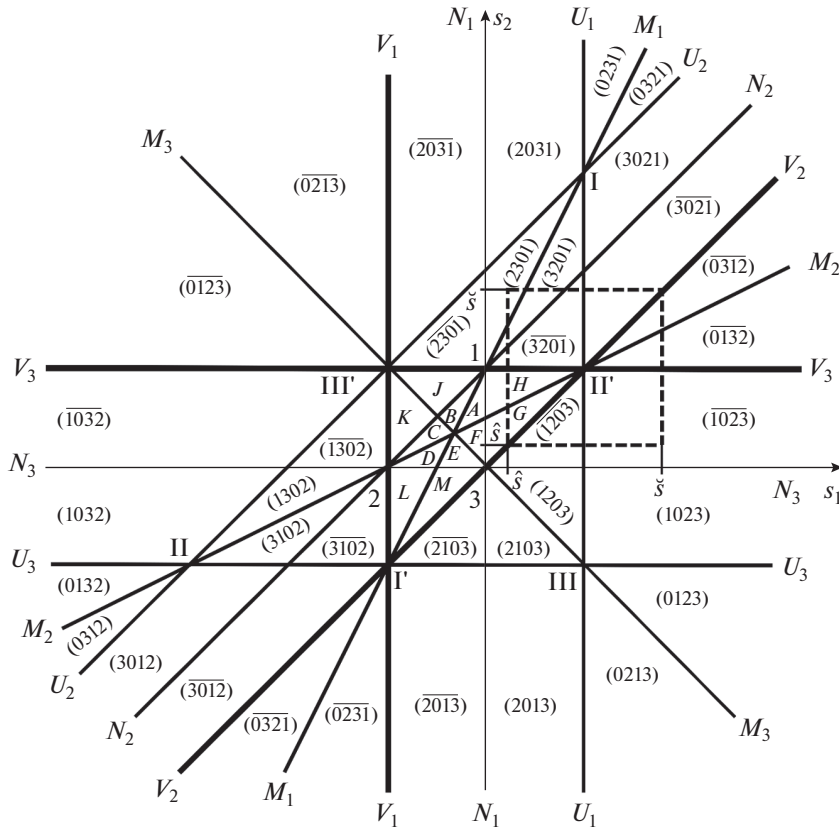


Рис. 2. Квадрат $P_2 : \{\hat{s} \leq s_1, s_2 \leq \bar{s}\}$ (в координатах s_1, s_2) – область допустимых значений импедансов в пространстве \mathcal{P}_2 – при $\hat{s} = 1/8, \bar{s} = 3/4$.

или (s_1, s_2) в перпендикулярном ребру направлении могут существенно менять некоторые свойства СДС.

Системы, относящиеся к ребрам вырождения, являются однослойными.

3. Девятнадцать классов формально “двух-слойных” СДС, отвечающих вершинам графа **G**, являются “фантомными”, поскольку имеют теоретическое значение, состоят ровно из одной СДС в каждом классе и абсолютно неустойчивы, так как сколь угодно малые вариации (p_1, p_2) или (s_1, s_2) , выводят за пределы данного класса систем. Точки Γ, Π, Π', Π'' , отвечают нульслойным системам.

Замечание 1. На рис. 1 три жирные линии вырождения V_j : $\theta_j = 1$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$ и $\alpha_i^2 = \alpha_i^2, i \neq j, 0, 1$) образуют треугольник вырождения Γ, Π, Π' . Три полужирные линии U_j , двойственные к линиям вырождения – $\theta_j = \theta$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$), – образуют большой треугольник I, Π, Π' . Три тонкие линии N_j стационарных нулей:

$\theta_j = \theta^{1/2}$ (на них $\alpha_j = 0$), образуют малый треугольник $I, 2, 3$. Кроме того, нанесены три медианы треугольников M_j : $\theta_i = \theta_j$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_k^2$). Условие существования нулей выполнено внутри и на границах малого треугольника и его внешних углов, что соответствует диаграмме Шустера.

Замечание 2. Свойства графа **G** использованы нами при решении оптимизационных задач синтеза просветляющих покрытий, диэлектрических зеркал (антипросветляющих покрытий) и полосовых фильтров на базе СДС. Принципиальным является факт “неоднородности” квадрата ограничений $P_2^{\mathcal{S}}$:

$$\{\hat{s} \leq s_1, s_2 \leq \bar{s}\},$$

изображенного на рис. 2 в показательных координатах s_1, s_2 , который получается преобразованием координат (15) из исходного квадрата ограничений P_2 :

$$\{\hat{p} \leq p_1, p_2 \leq \bar{p}\}.$$

Свою “неоднородную” структуру $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ наследует от $\mathcal{P}_2^{\mathcal{F}}$: каждая часть грани $\mathcal{P}_2^{\mathcal{F}}$, попадающая в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, определяет подкласс одного из классов $(ijkl)$ или (\overline{ijkl}) (см. рис. 1). Попадание внутрь ограничений \hat{s}, \bar{s} , соответствующих \hat{p}, \bar{p} , существенно зависит от величины этих ограничений (см. объяснения ниже). Классы же двухслойных СДС введены в [2, 3], где $i, j, k, l = 0, 1, 2, 3$ – различные между собой целые числа.

Количество различных подклассов СДС, образующих \mathbf{P}_2 , существенно зависит от величины ограничений снизу \hat{p} и сверху \bar{p} .

На рис. 2 представлен важный случай, когда ограничение \hat{p} больше “характерной” величины $\sqrt{p_0 p_3}$, а \bar{p} для \mathbf{P}_2 удовлетворяет неравенству $\bar{p} > p_3$, где p_3 – импеданс правого полупространства. При этом рис. 2 полезно представить включенным в серию аналогичных рисунков: первый вариант $\bar{p} < p_3$, второй $p_3 < \bar{p} < \sqrt{p_3^3/p_0}$, третий $\sqrt{p_3^3/p_0} < \bar{p} < p_3^2/p_0$ и, наконец, четвертый $p_3^2/p_0 < \bar{p}$. Важно, что не меньшее число вариантов по составу “реальных” классов СДС, входя-

щих в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, получается при вариации нижней границы \hat{p} квадрата ограничений \mathbf{P}_2 .

3. ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СДС ($N = 2$)

Если в основной системе (при $N = 2$) (см. [2, 3]) принять: $C_0^{(3)} = 1$ и $C_0^{(3)} = 0$, то система имеет единственное решение и числитель и знаменатель амплитудного коэффициента отражения $r(\omega)$ являются элементами первого столбца произведения матриц передачи $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$, где $T_j = (B_{j-1})^{-1} B_j S_j(v_j, \omega)$, и, если в матрицах обозначить: $v_1 \omega = t_1, v_2 \omega = t_2$ (см. (8)), то естественно ввести следующее определение.

Определение. Порождающими функциями СДС будем называть:

$$C_s^{(0)}(t_1, t_2) = Q_0^{(s)} \exp(-i(t_1 + t_2)) + Q_1^{(s)} \exp(-i(t_1 - t_2)) + Q_2^{(s)} \exp(i(t_1 - t_2)) + Q_3^{(s)} \exp(i(t_1 + t_2)), \quad s = (0, 1), \quad (17)$$

где коэффициенты $Q_j^{(s)}, j = 0, 1, 2, 3, s = 0, 1$:

$$\begin{aligned} Q_0^{(0)} &= \frac{1}{8}(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)(1 + \theta_3), & Q_0^{(1)} &= \frac{1}{8}(1 - \theta_1)(1 + \theta_2)(1 + \theta_3), \\ Q_1^{(0)} &= \frac{1}{8}(1 + \theta_1)(1 - \theta_2)(1 - \theta_3), & Q_1^{(1)} &= \frac{1}{8}(1 - \theta_1)(1 - \theta_2)(1 - \theta_3), \\ Q_2^{(0)} &= \frac{1}{8}(1 - \theta_1)(1 - \theta_2)(1 + \theta_3), & Q_2^{(1)} &= \frac{1}{8}(1 + \theta_1)(1 - \theta_2)(1 + \theta_3), \\ Q_3^{(0)} &= \frac{1}{8}(1 - \theta_1)(1 + \theta_2)(1 - \theta_3), & Q_3^{(1)} &= \frac{1}{8}(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)(1 - \theta_3). \end{aligned} \quad (18)$$

Замечание. В силу (18) при значении каждого относительного параметра $\theta_j = 1, j = 1, 2, 3$, одна из пар коэффициентов $Q_j^{(s)}, Q_k^{(s)}, j \neq k$ в (17) обращается в нуль, что означает вырождение СДС в однослойную.

Замечание. При выборе конкретных значений v_1, v_2 в (8) формула (6) порождает семейства амплитуд $C_s^{(0)}(\omega), s = 0, 1$, для конкретной СДС.

Определение. Профилирующие функции СДС имеют вид

$$F_s(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} |C_s^{(0)}(t_1, t_2)|^2 = (\alpha_0^{(s)} x_1 x_2 - \alpha_3^{(s)} y_1 y_2)^2 + (\alpha_1^{(s)} x_1 y_2 + \alpha_2^{(s)} y_1 x_2)^2, \quad s = 0, 1. \quad (19)$$

Числитель ($s = 1$) и знаменатель ($s = 0$) $|C_s^{(0)}(v_1 \omega, v_2 \omega)|^2$ энергетического коэффициента

отражения $R(\omega)$ СДС получаются из $F_s(t_1, t_2)$ при подстановке в них (8) с конкретными значениями v_1, v_2 . Коэффициенты этих квадратичных по паре переменных x_j, y_j ($x_j = \cos v_j \omega, y_j = \sin v_j \omega, (j = 1, 2)$) форм выражаются через “вычислительные” параметры СДС $\vec{\alpha}_s = (\alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \alpha_3^{(s)})$, а вектор $\vec{\alpha}_s$ линейным преобразованием

$$\vec{\alpha}_s = \mathcal{H} \vec{Q}_s, \quad (20)$$

связан с вектором \vec{Q}_s коэффициентов Фурье этих квадратичных форм:

$$\vec{Q}_s = (Q_0^{(s)}, Q_1^{(s)}, Q_2^{(s)}, Q_3^{(s)}),$$

где \mathcal{H} – матрица Адамара 4×4 .

Определение. (4) будем называть исходной формой профилирующих функций СДС.

Замечание. $F_s(t_1, t_2)$, $s = 0, 1$, представляют собой семейства функций, зависящих от параметров p_1, p_2 через коэффициенты $\alpha_j^{(s)}$, $j = 1, 2, 3$.

Функции $F_0(t_1, t_2)$ и $F_1(t_1, t_2)$ связаны между собой тождеством:

$$F_0(t_1, t_2) - F_1(t_1, t_2) \equiv \theta, \quad \theta = \theta_1 \theta_2 \theta_3 \stackrel{\text{def}}{=} p_3/p_0.$$

Поэтому, по-существу, мы имеем дело с одной профилирующей функцией, $F_1(t_1, t_2)$ и будем, в случае необходимости, называть ее базовой.

Замечание. В нуль может обращаться только $F_1(t_1, t_2)$, а $F_0(t_1, t_2)$ в точках, где $F_1(t_1, t_2) = 0$, принимает свое минимальное значение $\theta > 0$.

Базовую функцию СДС можно записать в виде

$$F_1(t_1, t_2) = u^2 + v^2, \quad (21)$$

где вектор $\vec{u} = (u, v)^T$ (T – знак транспонирования) является значением двух линейных преобразований $A_1 \vec{x}_1 = \vec{u}$, $A_2 \vec{x}_2 = \vec{u}$, матрицы операторов A_1, A_2 которых имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 x_2 & -\alpha_3 y_2 \\ \alpha_1 y_2 & \alpha_2 x_2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_0 x_1 & -\alpha_3 y_1 \\ \alpha_2 y_1 & \alpha_1 x_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = (u, v)^T,$$

а участвующие в (18) параметры α_j , $j = 0, 1, 2, 3$ записаны для $s = 1$.

В работе также используется развернутая форма записи $F_1(t_1, t_2)$:

$$F_1(t_1, t_2) = \alpha_0^2 x_1^2 x_2^2 + \alpha_1^2 x_1^2 y_2^2 + \alpha_2^2 y_1^2 x_2^2 + \alpha_3^2 y_1^2 y_2^2 + 4B_3 x_1 y_1 x_2 y_2, \quad (23)$$

где $B_3 = 1/2(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3)$, и форма записи пониженной степени:

$$F_1(t_1, t_2) = A_0 + A_1 u_2 + A_2 u_1 + A_3 u_1 u_2 + B_3 v_1 v_2, \quad (24)$$

коэффициенты которой: $\vec{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)^T$ – квадратичные формы от $\vec{\alpha}$:

$$A_j = \frac{1}{4} \vec{\alpha}^* I_j \vec{\alpha}, \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (25)$$

с диагональными матрицами I_j , ($j = 0, 1, 2, 3$), диагонали которых – столбцы матрицы Адамара 4×4 .

Учитывая (20) при $s = 1$, получаем коэффициенты A_j ($j = 0, 1, 2, 3$):

$$A_0 = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2, \quad (26)$$

$$A_1 = 2(Q_0 Q_1 + Q_2 Q_3), \quad A_2 = 2(Q_0 Q_2 + Q_1 Q_3),$$

$$A_3 = 2(Q_0 Q_3 + Q_1 Q_2),$$

которые имеют мультипликативную структуру, как в (14), относительно квадратов параметров θ_j ($j = 1, 2, 3$):

$$A_1 = \frac{1}{16} (1 + \theta_1^2) (1 - \theta_2^2) (1 - \theta_3^2),$$

$$A_2 = \frac{1}{16} (1 - \theta_1^2) (1 - \theta_2^2) (1 + \theta_3^2), \quad (27)$$

$$A_3 = \frac{1}{16} (1 - \theta_1^2) (1 + \theta_2^2) (1 - \theta_3^2),$$

в силу чего, знаки A_k , $k = 1, 2, 3$ тесно связаны со структурой графа G .

Для доказательств утверждений в работе использованы еще три квадратичные формы от Q_j ($j = 0, 1, 2, 3$):

$$B_1 = \frac{1}{2} (\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3) = 2(Q_0 Q_1 - Q_2 Q_3),$$

$$B_2 = \frac{1}{2} (\alpha_0 \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_3) = 2(Q_0 Q_2 - Q_1 Q_3), \quad (28)$$

$$B_3 = \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3) = 2(Q_1 Q_2 - Q_0 Q_3),$$

для которых справедливы мультипликативные представления:

$$B_1 = -\frac{1}{8} \theta_1 (1 - \theta_2^2) (1 - \theta_3^2),$$

$$B_2 = \frac{1}{8} (1 - \theta_1^2) (1 - \theta_2^2) \theta_3, \quad (29)$$

$$B_3 = -\frac{1}{8} (1 - \theta_1^2) \theta_2 (1 - \theta_3^2).$$

4. СТРУКТУРА ОБЛАСТЕЙ ПРОСВЕТЛЕНИЯ $F_1(t_1, t_2)$ ПРИ РАЗНЫХ $\vec{p} \in \mathcal{P}_2^{\mathcal{G}}$

Определение. Функция $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ при данном \vec{p} имеет область просветления $G_{\vec{p}}^j$ в ее j -м периоде T_j , если $\forall \vec{t} \in G_{\vec{p}}^j \subset T_j: F_{\vec{p}}(\vec{t}) < \alpha_0^2$.

Областей просветления счетное множество (если они существуют!). При $a = \alpha_1^2 - \alpha_0^2$, $c = \alpha_2^2 - \alpha_0^2$, $d = \alpha_3^2 - \alpha_0^2$ граница $G_{\vec{p}}$ имеет вид:

$$\Phi_{\vec{p}}(t_1, t_2) = ax_1^2 y_2^2 + 2bx_1 y_1 x_2 y_2 + cy_1^2 x_2^2 + dy_1^2 y_2^2 = 0,$$

где $b = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3$. Граница $G_{\vec{p}}$ имеет разный характер в зависимости от того, какому из 133 конечных элементов графа \mathcal{P}_2 принадлежит точка (s_1, s_2) . Однако для всех внутренних точек трапеций I, II, III на рис. 1 области просветления существуют, и их граница во всех случаях является гиперболой на вспомогательной плоскости переменных $\xi = t_1, \eta = t_2$.

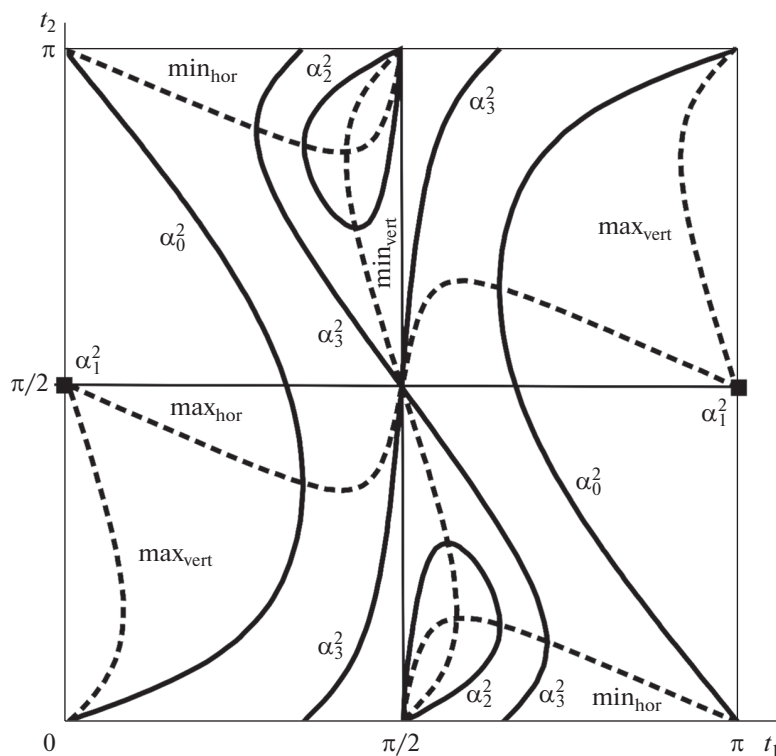


Рис. 3. Область просветления профилирующей функции $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$ при значениях параметров $(s_1 = 0.125, s_2 = 0.875)$ из области (2301) на рис. 1.

Лемма о структуре областей просветления в T_0^2 для граней $\mathcal{P}_2^{\mathcal{G}}$.

1. Для областей $(0jkl)$ на рис. 1, где $j, k, l = 1, 2, 3$, область просветления $G_{\bar{p}}$ двухсвязна и имеет “каплевидный” характер.

2. Для областей $(i0kl)$, где $i, k, l = 1, 2, 3$, область просветления $G_{\bar{p}}$ имеет полувершинный характер (охватывает одну полувершину T_0^2).

3. Для областей $(ij0l)$, где $i, j, l = 1, 2, 3$, область просветления $G_{\bar{p}}$ имеет предтотальный характер, охватывая две полувершины T_0^2 .

4. Для областей $(ijk0)$, где $i, j, k = 1, 2, 3$, область просветления $G_{\bar{p}}$ имеет тотальный характер, захватывая весь T_0^2 за исключением его вершин.

Доказательство леммы проводить не будем, а проиллюстрируем ее содержание одним типичным изображением области просветления с кодом (2301), принципиальным для данной статьи, так как часть именно этой и аналогичной ей по своим свойствам области (3201) параметров попадает внутрь квадрата $\mathcal{P}_2^{\mathcal{G}}$ на рис. 2.

Замечание. Структура областей просветления для областей параметров с кодом (\overline{ijkl}) (для которых просветление существует) такая же, как областей просветления для параметров с кодом $(ijkl)$, с тем же набором целых чисел i, j, k, l , и описана в лемме, но с важным отличием – внутри таких областей просветления нет нулей профилирующей функции, а ее минимальное значение достигается в полувершине, отвечающей минимальному α_i^2 .

На рис. 3 кроме границ области просветления нанесены также линии, ограничивающие области, внутри которых профилирующая функция не превосходит одного из базовых уровней: $F_{\bar{p}}(t_1, t_2) \leq \alpha_j^2, j = 1, 2, 3$. А также те линии, вдоль которых профилирующая функция $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$ достигает своего максимального и минимального значений при изменении только одного параметра: t_1 по горизонтали или t_2 по вертикали. В точке пересечения линий минимумов (горизонтального и вертикального) внутри квадрата периодов располагается нуль профилирующей функции $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$.

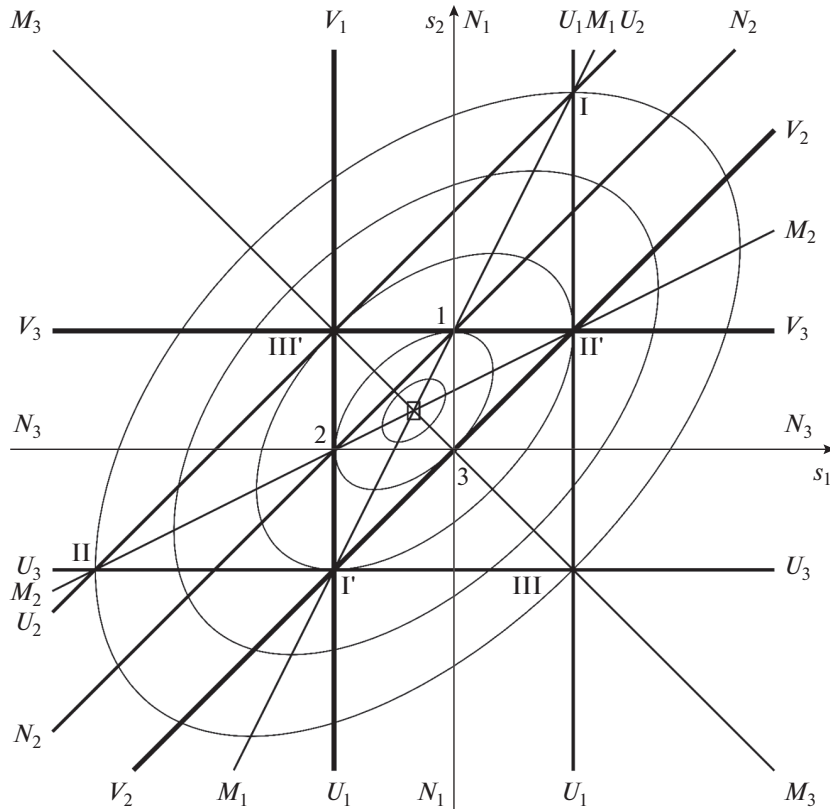


Рис. 4. Серия пяти квазиокружностей разных радиусов, изображенная на фоне \mathcal{P}_2 (см. рис. 1) в среднеквадратичной метрике пространства квадратов вычислительных параметров α_j^2 .

5. ВКЛЮЧЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ РАЗНЫХ $\bar{p} \in \mathcal{P}_2^{\mathcal{F}}$

В теореме О перечислении граней и основных свойств графа $\mathcal{P}_2^{\mathcal{F}}$, рассмотрены все 133 класса двухслойных СДС. Однако большая часть теоретически возможных СДС до сих пор остается недоступной для практического применения. Для задач синтеза из-за реально присутствующих в постановке таких задач ограничений на величины импедансов используемых материалов единственно доступной частью пространства импедансов СДС является его пересечение с квадратом $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, который задает типичные для задач синтеза ограничения: $\hat{p} \leq p_1 \leq \bar{p}$, $\hat{p} \leq p_2 \leq \bar{p}$ в координатах s_1, s_2 при значении ограничивающих параметров $\hat{s} = 1/8$, $\bar{s} = 3/4$, соответствующих $\hat{p} > \sqrt{p_0 p_3}$, $\bar{p} > p_3$ (см. рис. 2). Как видно из рисунка, квадрат ограничений $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}: \{\hat{s} \leq s_1, s_2 \leq \bar{s}\}$ пересекается при различных величинах $\{\hat{p}, \bar{p}\}$ примерно с четвертью граней \mathcal{P}_2 , примыкающих к точке Π' . В варианте на рис. 2 таких граней десять.

Части классов $(\overline{2310})$ и $(\overline{2130})$ СДС, попадающие в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, в соответствии с работой [3] хорошо приспособлены для решения задач просветления на больших и очень больших интервалах частот, так как все такие СДС обладают просветляющим свойством: $\mathbf{R}(\omega) < \mathbf{R}_F$ (\mathbf{R}_F – коэффициент отражения Френеля) для всех частот, не попадающих в счетное число исключительных, определяемых вершинами квадратов периодов профилирующей функции, для которых произведение соответствующего волнового числа на вектор электрических толщин $\vec{v} = (v_1, v_2)$ попадает в какую-либо вершину какого-либо квадрата периодов.

Части классов $(\overline{0312})$ и $(\overline{0132})$ СДС, попадающие в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, хорошо приспособлены для решения задач антипросветления на больших и очень больших интервалах частот, так как СДС с такими параметрами обладают антипросветляющим свойством: $\mathbf{R}(\omega) > \mathbf{R}_F$ для всех частот, не попадающих в счетное число исключительных, определяемых, как в задаче просветления.

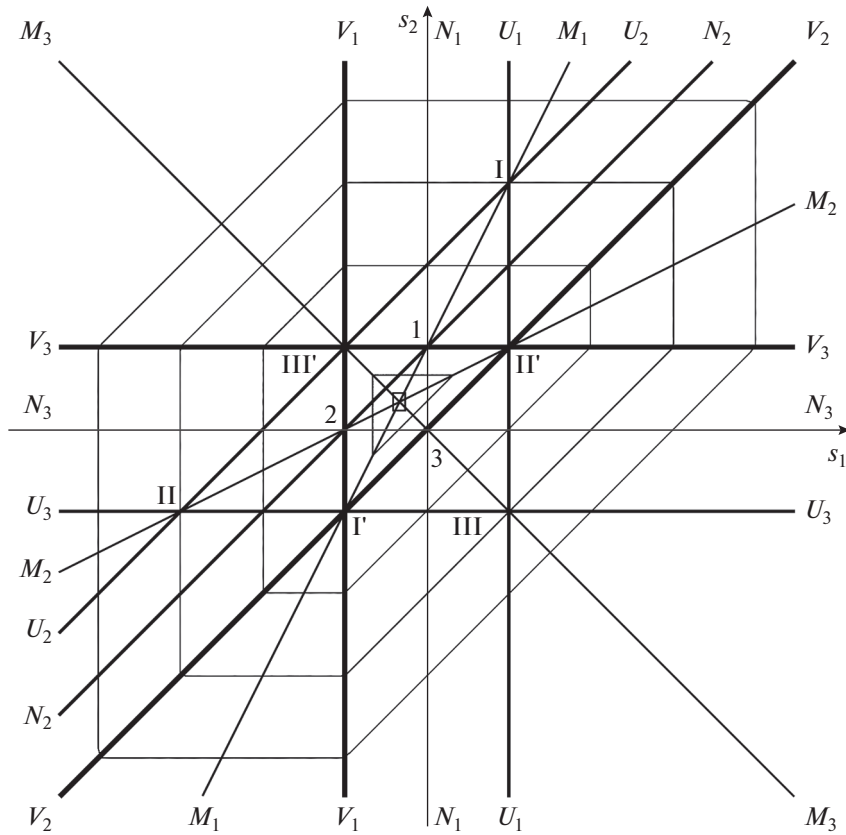


Рис. 5. Серия из пяти квазиокружностей разных радиусов, изображенная на фоне \mathcal{P}_2 (см. рис. 1) в метрике П.Л. Чебышёва пространства квадратов вычислительных параметров α_j^2 .

Части же классов $(\overline{1203})$, $(\overline{1023})$ и $(\overline{3201})$, $(\overline{3021})$ СДС, попадающие в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, можно использовать для решения задач фильтрации, просветления или антипросветления, не получая, вообще говоря, оптимальных решений.

Профилирующие функции $F_1(t_1, t_2)$ СДС классов (2301) и (3201) из $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ имеют два нуля внутри квадрата периодов. Они оптимально решают задачу просветления на заданной частоте ω_0 , а также задачу просветления в смысле П.Л. Чебышева с ограничениями для небольшого интервала частот.

Оптимальность указанных чебышевских систем объясняется тем, что СДС, получаемые при реализации в других классах $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, ограничены по уровню доставляемого ими просветления γ_{\min} снизу величиной $\alpha_2^2 > 0$ для класса (2301) , величиной $\alpha_3^2 > 0$ для (3201) или другим $\alpha_j^2 > 0$.

Замечание. Рисунки 4 и 5 помогают ставить и решать задачи синтеза и в других постановках. Например, задача наилучшего просветления в смысле среднего значения профилирующей

функции с указанными на рис. 2 ограничениями имеет единственное решение с параметрами (s_1, s_2) , определяющими радиус среднеквадратической квазиокружности с рис. 4, касающейся левой границы $s_1 = \hat{s}_{\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}}$. Чебышевская квазиокружность с наименьшим возможным радиусом, совместимая с ограничениями \mathbf{P}_2 , “касается” левой стороны $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ в точке $s_1^* = \hat{s}$, $s_2^* = 1/2\hat{s} + 1/4$. Задача наилучшего антипросветления в смысле среднего значения профилирующей функции с указанными на рис. 4 ограничениями имеет единственное решение с параметрами $s_1 = \hat{s}, s_2 = \bar{s}$ — координатами нижней правой вершины квадрата $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, определяющей радиус наибольшей среднеквадратической квазиокружности с рис. 4, пересекающей квадрат $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$. Квазиокружности рис. 5 незаменимы при оценках возможных уровней отсечки сверху γ_{\max} полосовых или режекторных фильтров, так как для их реализации необходимо выполнение строгого неравенства: $\gamma_{\max} < \alpha_{\max}^2$.

Из рис. 5 следует, например, вывод о том, что в рамках $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ величина j может принимать значения

1 или 3, но не 2, так как для классов $(\overline{0132})$ и $(\overline{0312})$ соответствующие СДС не будут иметь ни одной области просветления, что для фильтров недопустимо. Допускаемая фиксированным квадратом ограничений максимальная величина радиуса чебышевской квазиокружности достигается в нижней правой вершине $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, имеющей координаты $s_1 = \hat{s}$, $s_2 = \check{s}$, так как эта точка определяет радиус такой квазиокружности, представленной на рис. 5, еще пересекающей $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$. При этом величина наибольшего радиуса будет α_3^2 для этой точки, что больше, чем радиус подобной квазиокружности, но с максимально возможным значением α_1^2 , которое достигается в любой точке верхней границы $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ при $s_2 = \check{s}$.

Для практического решения задач просветления, антипросветления и синтеза двухслойных полосовых фильтров предлагается использовать

обобщенные и модифицированные методы углового сканирования и подвижного отрезка, ранее описанные и успешно примененные к глобальным задачам просветления и антипросветления в [2, 5, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худак Ю.И., Парфенов Д.В. // РЭ. 2021. Т. 66. № 9. С. 845.
2. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Нелинейный мир. 2016. № 2. С. 38.
3. Худак Ю.И. // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 5. С. 1.
4. Худак Ю.И. // Докл. РАН. 2015. Т. 467. № 2. С. 149.
5. Худак Ю.И. // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1986. Т. 26. № 7. С. 1105.
6. Schuster K. // Ann. Phys. (Folge 6). 1949. В. 4. Н. 6. С. 352.
7. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. № 2. С. 24.