

**К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА –  
РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

УДК 621.372.8

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ОТКРЫТОЙ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ**

© 2022 г. А. Н. Коваленко<sup>а</sup>, А. Д. Ярлыков<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup>МИРЭА – Российский технологический университет,  
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

\*E-mail: yarlykov@mirea.ru

Поступила в редакцию 02.02.2022 г.

После доработки 02.02.2022 г.

Принята к публикации 15.02.2022 г.

Открытая микрополосковая линия при достаточно больших размерах экрана моделируется экранированной линией, построенной проекционным методом с использованием полиномов Чебышева. Приведены выражения для матричных коэффициентов бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения плотности тока на поверхности полоскового проводника. Получены предельные выражения для матричных коэффициентов при стремлении размеров экрана к бесконечности. Рассмотрено решение бесконечной системы уравнений в квазистатическом приближении и установлены границы его применимости. Представлены численные результаты, подтверждающие теоретически установленную быструю сходимость разложений для плотности тока и позволяющие оптимальным образом выбрать размеры экрана при моделировании открытой линии.

DOI: 10.31857/S0033849422110079

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложен эффективный численно-аналитический метод решения задачи о собственных волнах экранированной микрополосковой линии. Эта задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), из которой определяются коэффициенты разложения плотности тока на полосковом проводнике по полиномам Чебышева с весовыми функциями, учитывающими в явном виде краевые особенности поля. В [2] установлена быстрая сходимость этого разложения и возможность решения бесконечной системы методом редукции. При этом порядок редуцированной системы  $K$  не превышает 5 в широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров линии, а для узких полосковых проводников высокая точность обеспечивается при  $K = 1$  [3]. Однако с увеличением размера нижнего экрана ухудшается сходимость рядов для матричных коэффициентов и, как следствие, возрастают вычислительные затраты при компьютерном моделировании линии. Поэтому актуальной задачей является определение таких размеров экрана, при которых основные электродинамические параметры – коэффициент замедления и волновое сопротивление – экранированной и открытой линий практически совпадают. В данной работе эту

задачу решаем путем математического моделирования открытой линии, экранированной при достаточно больших размерах экрана, устремляя в выражениях для матричных коэффициентов СЛАУ размеры экрана к бесконечности.

### 1. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Используя расчетные соотношения, полученные в [1] для экранированной микрополосковой линии (рис. 1), представим плотности продольного  $\eta_z(x)$  и поперечного тока  $\eta_x(x)$  на полосковом проводнике для собственных волн четного типа в виде разложений:

$$\eta_z(\tilde{x}) = (1 - \tilde{x}^2)^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l} T_{2l}(\tilde{x}),$$

$$\eta_x(\tilde{x}) = -i \frac{k_0 W}{2\Gamma} (1 - \tilde{x}^2)^{1/2} \sum_{l=1}^{\infty} b_{2l-1} U_{2l-1}(\tilde{x}), \quad (1)$$

$$\tilde{x} = (x - a/2)/(W/2), \quad |\tilde{x}| \leq 1,$$

где  $T(\tilde{x})$  – полиномы Чебышева первого рода;  $U(\tilde{x})$  – полиномы Чебышева второго рода;  $\Gamma$  – нормированная к волновому числу свободного пространства  $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  постоянная распространения.

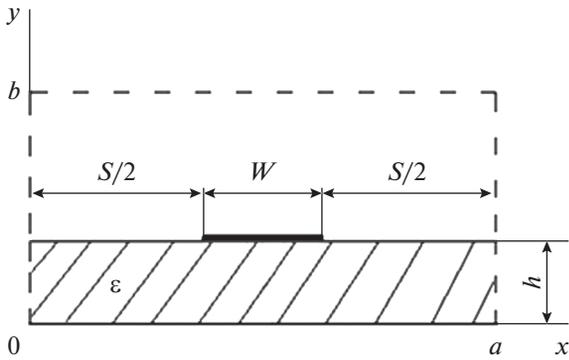


Рис. 1. Поперечное сечение микрополосковой линии.

Коэффициенты разложения  $a_{2l}, b_{2l-1}$  определяются из следующей СЛАУ:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} A_{ql} a_{2l} + \sum_{l=1}^{\infty} B_{ql} b_{2l-1} &= 0 \quad (q = 0, 1, 2, \dots), \\ \sum_{l=0}^{\infty} C_{ql} a_{2l} + \sum_{l=1}^{\infty} D_{ql} b_{2l-1} &= 0 \quad (q = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} A_{ql} &= (-1)^{q+l} \frac{1}{k_0 a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{\chi_m^2} \times \\ &\times (\Gamma^2 G_m^\ominus + \alpha_m^2 G_m^M) J_{ql}(m\alpha), \\ B_{ql} &= (-1)^{q+l} \frac{2l}{k_0 a} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{\chi_m^2} (G_m^M - G_m^\ominus) J_{ql}(m\alpha), \end{aligned} \quad (2b)$$

$$C_{ql} = B_{lq},$$

$$D_{ql} = (-1)^{q+l} \frac{4ql}{k_0 a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{\chi_m^2} \left( \frac{G_m^\ominus}{\Gamma^2} + \frac{G_m^M}{\alpha_m^2} \right) J_{ql}(m\alpha),$$

где  $J_{ql}(m\alpha) = J_{2q}(m\alpha) J_{2l}(m\alpha)$ ,  $J_n(x)$  – функция Бесселя,  $\alpha = \pi W/2a$ ,

$$G_m^\ominus = \left( \frac{\varepsilon}{\beta_{m1}} \operatorname{ctg}(\beta_{m1} k_0 h) + \frac{1}{\beta_{m2}} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} k_0 (b-h)) \right)^{-1},$$

$$G_m^M = (\beta_{m1} \operatorname{ctg}(\beta_{m1} k_0 h) + \beta_{m2} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} k_0 (b-h)))^{-1}$$

$$\beta_{m1} = \sqrt{\varepsilon - \chi_m^2}, \quad \beta_{m2} = \sqrt{1 - \chi_m^2},$$

$$\chi_m^2 = \alpha_m^2 + \Gamma^2, \quad \alpha_m = \frac{\pi}{k_0 a} m,$$

$\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость подложки.

Однородная система (2a) имеет не нулевое решение только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов этой системы  $D$  равен нулю. В выражения для матричных коэффициентов (2б) в качестве параметра входит квадрат нормирован-

ной постоянной распространения  $\Gamma^2$ . Приравнивая к нулю определитель системы (2a), получим дисперсионное уравнение

$$D(\Gamma^2) = 0, \quad (3)$$

из которого численными методами определяются постоянные распространения собственных волн четного типа.

Приведенные выше выражения непосредственно обобщаются на открытую микрополосковую линию ( $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$ ). Для этого нужно от бесконечных рядов (2б) перейти к интегрированию выражения под знаком  $\Sigma$  в пределах от нуля до бесконечности по переменной  $\alpha_m = m\pi/(k_0 a) = x$ , заменив в нем аргументы функций Бесселя  $m\alpha = m\pi W/(2a)$  на  $(k_0 W/2)x$  и функцию  $\operatorname{ctg}(\beta_{m2} k_0 (b-h))$  на  $-i$ . Таким образом, матричные коэффициенты открытой линии представляются в виде плохо сходящихся несобственных интегралов и при их вычислении необходимо улучшать сходимость этих интегралов, используя расчетные соотношения, приведенные в [4].

## 2. КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

Рассмотрим решение системы уравнений (2a) в квазистатическом приближении.

Устремляя в (2б) волновое число  $k_0$  к нулю, получим следующие выражения для матричных коэффициентов:

$$\begin{aligned} A_{ql} &= (-1)^{q+l} \frac{1}{\pi} (P_{ql}(1) - n^2 P_{ql}(\varepsilon)), \\ B_{ql} &= (-1)^{q+l} \frac{2l}{\pi} n^2 P_{ql}(\varepsilon), \quad C_{ql} = B_{lq}, \\ D_{ql} &= -(-1)^{q+l} \frac{4ql}{\pi} \frac{1}{n^2} P_{ql}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} P_{ql}(\varepsilon) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{m} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{\varepsilon \operatorname{cth}(m\pi h/a) + \operatorname{cth}(m\pi(b-h)/a)} \right] J_{ql}(m\alpha), \end{aligned} \quad (5)$$

$n = \Gamma$  – коэффициент замедления основной волны, определяемый из численного решения дисперсионного уравнения (3) при  $0 < \Gamma^2 < \varepsilon$ .

Ряд (5) сходится медленно, и непосредственное его вычисление, связанное с большими вычислительными затратами, в особенности для широких экранов ( $a \gg h$ ), может приводить к неустойчивым результатам. Поэтому при вычислении медленно сходящегося ряда (5) следует улучшить сходимость этого ряда путем прибавления и вычитания к члену в квадратных скобках его

асимптотического выражения при  $m \rightarrow \infty$ , представив функцию  $P_{ql}(\varepsilon)$  в виде

$$P_{ql}(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{m} \times \left[ \frac{1}{\varepsilon \operatorname{cth}(m\pi h/a) + \operatorname{cth}(m\pi(b-h)/a)} - \frac{1}{\varepsilon + 1} \right] \times J_{ql}(m\alpha) + \frac{1}{\varepsilon + 1} S_{ql}(\alpha), \quad (6)$$

где

$$S_{ql}(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_{2q}(m\alpha) J_{2l}(m\alpha) \sin^2\left(m\frac{\pi}{2}\right). \quad (7)$$

Медленно сходящийся ряд (7) можно просуммировать и представить в виде быстро сходящегося степенного ряда, полученного в [1].

При достаточно больших размерах экрана расчет коэффициентов системы (2а) можно проводить по формулам для открытой микрополосковой линии, устремляя в формуле (5) размеры экрана  $a$  и  $b$  к бесконечности. При  $b \rightarrow \infty$  выражение для функции  $P_{ql}(\varepsilon)$  представим в виде

$$P_{ql}(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{J_{ql}(m\delta\tilde{\alpha})}{\varepsilon \operatorname{cth}(m\delta/2) + 1} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{J_{ql}(2m\delta\tilde{\alpha})}{\varepsilon \operatorname{cth}(2m\delta/2) + 1}, \quad (8)$$

где  $\delta = 2\pi h/a$ ,  $\tilde{\alpha} = W/4h$ . При  $\delta \rightarrow 0$  ( $a \rightarrow \infty$ ) бесконечные суммы заменим на интегралы, полагая в

первой сумме  $m\delta = x$ ,  $\delta = dx$ ; во второй  $2m\delta = x$ ,  $2\delta = dx$ . В результате получим

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{J_{ql}(\tilde{\alpha}x)}{\varepsilon \operatorname{cth}(x/2) + 1} dx = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{1 - \exp(-x)}{1 + q_\varepsilon \exp(-x)} J_{ql}(\tilde{\alpha}x) dx, \quad (9)$$

$$q_\varepsilon = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

Разлагая функцию  $(1 + q_\varepsilon \exp(-x))^{-1}$  в степенной ряд, приведем выражение для функции  $P_{ql}(\varepsilon)$  к виду:

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \times \left\{ \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} (1 - \exp(-x)) J_{ql}(\tilde{\alpha}x) dx - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times \left[ \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} \left( \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{k}\right)x\right) - \exp(-x) \right) J_{ql}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{k}x\right) dx q_\varepsilon^k \right] \right\}. \quad (10)$$

Непосредственное вычисление медленно сходящихся несобственных интегралов связано с трудностями вычислительного характера и практически приводит к неустойчивости результатов. Эти интегралы можно вычислить, если воспользоваться интегральным представлением для функции  $J_{ql}(\tilde{\alpha}x)$ .

Используя интегральные представления для произведения функций Бесселя (см. [5, ф-лы (6.681(10)) и (8.411(2))], представим выражение (10) в виде

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \left\{ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{x} (1 - \exp(-x)) \cos(ux) dx \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q_\varepsilon^k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left( \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{k}\right)x\right) - \exp(-x) \right) \cos\left(\frac{u}{k}x\right) dx \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \right\}, \quad (11)$$

где  $u = 2\tilde{\alpha} \cos\theta \sin\varphi$ ,  $E_{ql}(\theta, \varphi) = \cos(2(q-l)\theta) \cos(2(q+l)\varphi)$ .

Используя при вычислении интеграла по  $x$  формулу из [5, (3.951(3))], приведем выражение (11) к виду

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \left\{ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{2} (\ln(1+u^2) - \ln u^2) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q_\varepsilon^k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{2} \left( \ln\left(1 + \left(\frac{u}{k}\right)^2\right) - \ln\left(1 + \left(\frac{u}{k+1}\right)^2\right) - \ln\left(1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2\right) \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \right\}. \quad (12)$$

Вычисляя интеграл

$$I_{ql} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} -\frac{4}{\pi^2} \left( \ln u - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln(1+1/k) q_\varepsilon^k \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \begin{cases} \ln \frac{2}{\tilde{\alpha}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln(1+1/k) q_\varepsilon^k & \text{при } q = l = 0 \\ \frac{\delta(q-l)}{2(q+l)} & \text{в остальных случаях } \left( \delta(q-l) = \begin{cases} 1 & \text{при } q = l \\ 0 & \text{при } q \neq l \end{cases} \right) \end{cases} \quad (13)$$

перепишем выражение (12) в виде

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \times \left( I_{ql} + f_{ql}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (f_{ql}^{(k)} - f_{ql}^{(k+1)}) q_{\varepsilon}^k \right), \quad (14)$$

где

$$f_{ql}^{(k)} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \ln \left( 1 + (u/k)^2 \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi. \quad (15)$$

Разлагая логарифмическую функцию в степенной ряд и интегрируя, получим следующие выражения для функции  $f_{ql}^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} f_{ql}^{(k)} \Big|_{q \neq l} &= \frac{1}{2} \sum_{n=q+l}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \times \\ &\times \frac{n(n-1)\dots(n+1-(q+l))}{n(n+1)\dots(n+q+l)} \times \\ &\times \frac{n(n-1)\dots(n+1-|q-l|)}{(n+1)(n+2)\dots(n+|q-l|)} \left( \frac{2\tilde{\alpha}}{k} \right)^{2n}, \\ f_{qq}^{(k)} \Big|_{q \neq 0} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2q}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \times \\ &\times \frac{n(n-1)\dots(n+1-2q)}{n(n+1)\dots(n+2q)} \left( \frac{2\tilde{\alpha}}{k} \right)^{2n}, \\ f_{00}^{(k)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \left( \frac{2\tilde{\alpha}}{k} \right)^{2n}. \end{aligned} \quad (16)$$

### 3. РЕШЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Анализ выражений (13)–(16) позволяет сделать вывод о диагональном характере матриц **A**, **B**, **C**, **D** с элементами  $A_{ql}$ ,  $B_{ql}$ ,  $C_{ql}$ ,  $D_{ql}$ . Недиagonальные элементы малы по сравнению с диагональными и быстро убывают с увеличением  $q$  и  $l$ . Отсюда следует быстрая сходимость разложений (1) и возможность решения системы (2) методом редукции. Порядок редуцированной системы равен  $K = 2L + 1$ , где  $L$  – число учитываемых членов в разложении для поперечного тока;  $L + 1$  – число учитываемых членов для продольного тока.

В пределе при  $W/h \rightarrow 0$  недиагональные элементы матриц стремятся к нулю и бесконечная система (2) распадается на бесконечное число независимых уравнений:

$$A_{00}a_0 = 0, \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{qq}a_{2q} + B_{qq}b_{2q-1} &= 0 \\ C_{qq}a_{2q} + D_{qq}b_{2q-1} &= 0 \end{aligned} \right\} (q = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Из выражений (4), (17), следует, что  $P_{00}(1) - n^2 P_{00}(\varepsilon) = 0$ . Из этого уравнения определяем коэффициент замедления:

$$n = \sqrt{P_{00}(1)/P_{00}(\varepsilon)}. \quad (19)$$

Используя выражения (4), можно показать, что определители систем (18) не равны нулю. Поэтому однородные системы уравнений (18) имеют нулевые решения:  $a_{2q} = 0$ ,  $b_{2q-1} = 0$  ( $q = 1, 2, \dots$ ). Таким образом, при  $W/h \rightarrow 0$  в разложениях (1) остается только один первый член для плотности продольного тока:

$$\eta_z(\tilde{x}) = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \tilde{x}^2}}, \quad \eta_x(\tilde{x}) = 0. \quad (20)$$

При таком распределении тока в работе [3] получено приближенное выражение для волнового сопротивления  $Z$  микрополосковой линии с узким полосковым проводником:

$$Z = \frac{240}{n} P_{00}(1) \approx \frac{60}{n} \ln \frac{8h}{W}. \quad (21)$$

### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

В результате расчетов, выполненных на персональном компьютере, численно исследованы сходимость разложений для плотности тока на полосковом проводнике для открытой микрополосковой линии (МПЛ) и сходимость основных электродинамических параметров к предельным значениям при стремлении размеров экрана к бесконечности для экранированной МПЛ. Расчеты были проведены в следующем диапазоне изменения параметров линии:  $0.1 \leq W/h \leq 20$ ;  $10 \leq S/h = a/h - W/h \leq 250$ ;  $1 < \varepsilon \leq 20$ ;  $b/h \rightarrow \infty$ , с использованием выражения (14) для открытой линии и выражения (6) – для экранированной.

В результате численного анализа подтверждена теоретически установленная быстрая сходимость разложений плотности тока на полосковом проводнике по взвешенным полиномам Чебышева.

Высокая точность расчета коэффициента замедления  $n$  и волнового сопротивления  $Z$  для микрополосковой линии с узким полосковым проводником ( $W/h \leq 2$ ) обеспечивается при учете в разложениях (1) только одной базисной функции ( $K = 1$ ). При этом основные электродинамические параметры  $n$  и  $Z$  определяются через одну функцию  $P_{00}(\varepsilon)$  по формулам (19), (21). При учете в разложениях (1) трех базисных функций ( $K = 3$ ) высокая точность обеспечивается в широком диапазоне изменения ширины полоскового проводника ( $W/h \leq 20$ ). В этом случае  $n$  и  $Z$  определяются из решения однородной системы

**Таблица 1.** Коэффициент замедления и волновое сопротивление МПЛ в квазистатическом приближении

$W/h$	$K = 1$			$K = 3$			$K = 5$		
	$n$	$Z$	$\delta(nZ), \%$	$n$	$Z$	$\delta(nZ), \%$	$n$	$Z$	$\delta(nZ), \%$
1	2.5392	49.826	0.009	2.5394	49.817	0.001	2.5394	49.817	0.001
3	2.6768	26.197	0.433	2.6865	25.990	0.001	2.6865	25.990	0.001
5	2.7374	18.315	1.500	2.7671	17.851	0.001	2.7671	17.851	0.001
10	2.7971	10.890	4.907	2.8685	10.123	0.004	2.8686	10.122	0.001
15	2.8229	7.932	8.123	2.9182	7.099	0.035	2.9189	7.094	0.001
20	2.8383	6.305	10.940	2.9483	5.476	0.077	2.9495	5.470	0.001

Примечание:  $K = 2L + 1$  – порядок редуцированной СЛАУ,  $L$  – число учитываемых членов в разложениях (1) для поперечного тока.

линейных алгебраических уравнений третьего порядка, матричные коэффициенты которой выражаются через функции  $P_{00}(\epsilon)$ ,  $P_{11}(\epsilon)$ ,  $P_{01}(\epsilon)$  и  $P_{02}(\epsilon)$ . Сказанное подтверждается данными, полученными для микрополосковой линии на поликорковой подложке с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 9.6$  (табл. 1). Под величиной  $\delta(nZ)$  понимается погрешность расчета произведения коэффициента замедления на волновое сопротивление линии при заданном порядке  $K$  по отношению к произведению, рассчитанному при  $K = 7$ . Из этих данных видно, что при  $K = 1$  погрешность не превышает 0.01%, если  $W/h \leq 1$ . При  $K = 3$  погрешность не превышает 0.1%, если  $W/h \leq 20$ . При  $K \geq 5$  результаты расчета совпадают с точностью до пяти значащих цифр и не зависят от диэлектрической проницаемости подложки.

Отметим, что в квазистатическом приближении сходимость разложений для плотности тока (1) практически не зависит от частоты, если нормированная частота  $f_n = f[\text{ГГц}]/h[\text{мм}] \leq 15$ . Это следует из сопоставления данных, представленных в табл. 1 с данными, полученными на основе электродинамической модели экранированной микрополосковой линии [1] и приведенными при достаточно больших размерах экрана в [2].

В результате анализа численных результатов установлено, что при изменении отношения  $S/h$  в пределах  $150 \leq S/h \leq 250$  результаты расчета  $n$  и  $Z$  для экранированной линии, полученные с использованием выражения (6), практически не меняются и совпадают с точностью до четырех-пяти

значащих цифр с результатами расчета для открытой линии, полученными с использованием выражения (14). Отсюда следует вывод о возможности математического моделирования с высокой точностью открытой микрополосковой линии, экранированной при достаточно больших размерах экрана. Это подтверждается данными табл. 2, которые показывают зависимость коэффициента замедления и волнового сопротивления от размеров экрана при различных значениях ширины полоскового проводника. В последнем столбце приведены результаты расчета для открытой линии. Отметим, что в квазистатическом приближении погрешность моделирования  $\delta(nZ)$  не зависит от диэлектрической проницаемости подложки  $\epsilon$ .

Численные результаты, представленные в табл. 3, позволяют определить погрешность квазистатического приближения при расчете основных электродинамических параметров микрополосковой линии. В этой таблице:

$$\delta(nZ), \% = \frac{nZ - n_0Z_0}{nZ} \times 100\%, \text{ где } n_0Z_0 - \text{произведение}$$

коэффициента замедления на волновое сопротивление линии при  $f_n \rightarrow 0$  на нулевой частоте, не зависящее от диэлектрической проницаемости подложки, рассчитанное с использованием формулы (6);  $nZ$  – произведение коэффициента замедления на волновое сопротивление линии на частоте  $f_n$ , рассчитанное с использованием электродинамической модели МПЛ [1]. В первых строках таблицы представлены результаты расчета при  $\epsilon = 2$ , во вторых – при  $\epsilon = 9.6$ , в третьих – при  $\epsilon = 20$ .

**Таблица 2.** Сходимость электродинамических параметров МПЛ к предельным значениям при стремлении размеров экрана к бесконечности

$S/h$	$n$	$Z$	$\delta(nZ),\%$	$n$	$Z$	$\delta(nZ),\%$	$n$	$Z$	$\delta(nZ),\%$
	$W/h = 0.5$			$W/h = 1$			$W/h = 2$		
10	2.4869	66.854	1.050	2.5244	49.478	1.269	2.6067	33.649	1.544
20	2.4779	67.133	0.276	2.5353	49.725	0.349	2.6199	33.849	0.453
30	2.4797	67.189	0.123	2.5375	49.776	0.157	2.6229	33.893	0.211
50	2.4806	67.217	0.043	2.5387	49.803	0.055	2.6245	33.918	0.077
100	2.4810	67.230	0.008	2.5393	49.815	0.011	2.6253	33.929	0.016
$\infty$	2.4811	67.232	—	2.5394	49.817	—	2.6255	33.931	—
$S/h$	$W/h = 4$			$W/h = 10$			$W/h = 15$		
10	2.7088	20.931	1.829	2.8416	10.009	2.049	2.8917	7.016	2.021
20	2.7244	21.073	0.594	2.8580	10.078	0.804	2.9072	7.061	0.867
30	2.7282	21.108	0.289	2.8630	10.099	0.428	2.9123	7.076	0.485
50	2.7305	21.128	0.108	2.8663	10.113	0.178	2.9160	7.087	0.211
100	2.7316	21.138	0.022	2.8681	10.120	0.041	2.9181	7.098	0.050
$\infty$	2.7319	21.141	—	2.8687	10.122	—	2.9189	7.094	—
$S/h$	$W/h = 20$								
10	2.9230	5.411	1.949						
20	2.9373	5.443	0.892						
30	2.9424	5.454	0.518						
50	2.9462	5.463	0.233						
100	2.9487	5.468	0.057						
$\infty$	2.9495	5.469	—						

**Таблица 3.** Погрешность квазистатического приближения  $\delta(nZ), \%$  при различных  $f_n$ 

$W/h$	$\epsilon$	$f_n$							
		0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
0.1	2	0.001	0.001	0.008	0.019	0.077	0.154	0.253	0.380
	9.6	0.001	0.001	0.016	0.059	0.209	0.451	0.777	1.185
	20	0.001	0.004	0.027	0.098	0.371	0.812	1.417	2.185
0.5	2	0.001	0.001	0.007	0.026	0.100	0.211	0.353	0.520
	9.6	0.001	0.002	0.024	0.086	0.308	0.657	1.123	1.699
	20	0.001	0.006	0.041	0.147	0.549	1.189	2.052	3.122
1	2	0.001	0.001	0.009	0.035	0.122	0.252	0.415	0.611
	9.6	0.001	0.002	0.031	0.107	0.384	0.814	1.385	2.081
	20	0.001	0.009	0.052	0.187	0.693	1.487	2.358	3.811
2	2	0.001	0.002	0.009	0.039	0.155	0.306	0.506	0.741
	9.6	0.001	0.005	0.041	0.143	0.510	1.072	1.799	2.665
	20	0.001	0.012	0.072	0.255	0.937	1.974	3.292	4.822
3	2	0.001	0.002	0.012	0.047	0.171	0.346	0.572	0.835
	9.6	0.001	0.006	0.051	0.177	0.628	1.295	2.146	3.135
	20	0.002	0.015	0.090	0.319	1.155	2.380	3.875	5.537
4	2	0.001	0.002	0.013	0.054	0.196	0.392	0.640	0.930
	9.6	0.001	0.008	0.060	0.208	0.728	1.492	2.435	3.499
	20	0.002	0.019	0.107	0.380	1.344	2.706	4.298	5.994
6	2	0.002	0.003	0.013	0.066	0.236	0.466	0.751	1.090
	9.6	0.002	0.011	0.078	0.265	0.904	1.830	2.840	4.117
	20	0.004	0.025	0.141	0.486	1.641	3.137	4.748	6.353
10	2	0.002	0.002	0.019	0.086	0.304	0.590	0.944	1.339
	9.6	0.003	0.016	0.109	0.362	1.167	2.146	3.293	4.210
	20	0.007	0.037	0.197	0.651	1.974	3.439	4.843	6.152

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическая модель открытой микрополосковой линии в виде системы линейных алгебраических уравнений построена на основе эффективной электродинамической модели экранированной микрополосковой линии при стремлении размеров экрана к бесконечности. Получены простые аналитические выражения для матричных коэффициентов, позволяющие рассчитать быстро и с высокой точностью характеристики основной волны при компьютерном моделировании микрополосковой линии в квазистатическом приближении. Установлена сходимость основных электродинамических параметров к предельным значениям при стремлении размеров экрана к бесконечности и возможность математического моделирования с высокой точностью открытой линии экранированной при достаточно больших размерах экрана. Представленные численные результаты позволяют при заданной погрешности

моделирования оптимальным образом выбрать размеры экрана.

Предложенным способом можно построить математические модели компланарной, щелевой и других типов полосковых линий.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 2. С. 188.
2. Коваленко А.Н. // РЭ. 2019. Т. 64. № 2. С. 108.
3. Коваленко А.Н., Ярлыков А.Д. // Рос. технол. журн. 2021. Т. 9. № 4. С. 68.  
<https://www.rtfj-mirea.ru/jour/article/view/345/277>.
4. Коваленко А.Н., Фёдоров А.Н. // РЭ. 1981. Т. 26. № 4. С. 684.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.