

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.371.333;537.874.6

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ С ШЕРОХОВАТОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2022 г. **А. Г. Кюркчан**^{a, b, c}, С. А. Маненков^{a, *}

^aМосковский технический университет связи и информатики,
ул. Авиамоторная, 8а, Москва, 111024 Российская Федерация

^bФрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московской обл., 141190 Российская Федерация

^cФГУП Центральный научно-исследовательский институт связи,
1-й проезд Перова поля, 8, Москва, 111141 Российская Федерация

*E-mail: mail44471@mail.ru

Поступила в редакцию 14.12.2021 г.

После доработки 17.05.2022 г.

Принята к публикации 25.05.2022 г.

Рассмотрены скалярная и векторная задачи дифракции поля плоской волны на шероховатом теле вращения. Задачи решены с использованием модифицированного метода дискретных источников. Проведено сравнение результатов расчета диаграммы рассеяния для случая детерминированных неровностей границы тела с результатами, полученными методом продолженных граничных условий. Исследовано влияние степени шероховатости границы на диаграмму рассеяния волнового поля и рассмотрена дифракция на различных шероховатых многолистных вращении, а также на неровном суперэллипсоиде. Выяснено, какова степень влияния малых возмущений границы рассеивателя на геометрию множества особенностей аналитического продолжения дифракционного поля.

DOI: 10.31857/S0033849422110080

ВВЕДЕНИЕ

В литературе имеется большое количество публикаций, посвященных дифракции волн на телах и поверхностях с неровной границей (в том числе описываемой случайной функцией координат) [1–7]. В данной работе исследованы скалярная и векторная задачи дифракции волн на теле вращения с шероховатой границей. Как известно, существует множество методов решения такой задачи. Большая группа методов основана на использовании того или иного малого параметра [1–5, 7]. Наличие такого параметра накладывает достаточно жесткие условия на степень “шероховатости” границы рассеивателя. В работе предложен алгоритм решения указанной задачи дифракции, основанный на модифицированном методе дискретных источников (ММДИ), который ранее успешно применялся к решению широкого круга задач дифракции [8–10]. Рассмотрены как случайные, так и детерминированные возмущения границы тела. При анализе дифракции на статистически шероховатом теле неровности границы моделировали с помощью синусоидальной функции, имеющей случайную амплитуду.

Отметим, что, с одной стороны, ММДИ имеет преимущество, например, перед методом токовых интегральных уравнений, так как не требует вычисления интегралов при нахождении матричных элементов соответствующей алгебраической системы. Этот факт очень важен при усреднении диаграммы рассеяния в случае статистически неровной границы тела. С другой стороны, метод позволяет решать задачу дифракции на теле с аналитической границей с высокой точностью.

Ранее [11] была предпринята попытка объяснить эффект распознавания зеркальных объектов – рассеивателей с идеально гладкой границей. То есть мы распознаем зеркальные объекты по изображению в них близлежащих объектов. Очевидно, что идеально зеркальных объектов в природе не существует, все они в той или иной степени “шероховатые”. Представляет интерес вопрос о том, как форма сечения “невозмущенного” тела (при условии, что шероховатость границы мала по сравнению с длиной волны) влияет на то, чтобы шероховатый рассеиватель воспринимался как идеально отражающий, или зеркальный. Как известно, поле, рассеянное любым объектом, созда-

ются источниками, расположенными на поверхности и (или) внутри рассеивателя. Если объект относится к категории “зеркальных”, то источники рассеянного им поля находятся внутри рассеивателя [11].

В данной работе сделана попытка определить, при каком условии на форму сечения и степени шероховатости границы объект может быть отнесен к зеркальному. При этом в качестве критерия была выбрана зависимость геометрии множества особенностей аналитического продолжения дифракционного поля в область, занимаемую телом, и диаграммы рассеяния от формы сечения рассеивателя.

В работах [12–14] ММДИ применялся к задаче дифракции на различных многолистниках вращения, заданных в сферических и сфероидальных координатах. В этих работах был предложен численный алгоритм построения вспомогательных контуров (внешних и внутренних) осевого сечения тела, являющихся носителями дискретных источников. В данной работе предложен более универсальный и простой алгоритм построения вспомогательных контуров. Указанный метод позволяет строить вспомогательные контуры для задачи дифракции на телах вращения с неровной границей, описываемой отрезком ряда Фурье, который содержит гармоники с произвольными амплитудами. Это позволяет применить ММДИ к широкому классу тел с шероховатой границей. Необходимо лишь, чтобы функция, задающая уравнение границы тела, была аналитической функцией координат.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ММДИ

Пусть тело вращения расположено в однородном бесконечном пространстве и ограничено поверхностью S . Выберем систему координат так, чтобы ось z совпадала с осью вращения тела. Рассмотрим вначале скалярную задачу дифракции на шероховатом теле вращения. Предполагаем, что на поверхности S тела выполнено импедансное граничное условие

$$\left(U - W \frac{\partial U}{\partial n} \right) \Big|_S = 0. \tag{1}$$

Здесь $U(\vec{r}) = U^0(\vec{r}) + U^1(\vec{r})$ – полное поле, где $U^0(\vec{r})$ – падающее, а $U^1(\vec{r})$ – рассеянное (вторичное) поле, W – импеданс на поверхности тела. Обозначим через D – область пространства, занимаемую телом. Полное поле удовлетворяет в области $\mathbb{R}^3 \setminus D$ однородному уравнению Гельмгольца

с волновым числом k . В качестве падающего поля рассмотрим плоскую волну

$$U^0(\vec{r}) = \exp(-ikr(\sin\theta\sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\theta\cos\theta_0)), \tag{2}$$

где θ_0, φ_0 – углы падения волны. При этом предполагается, что поверхность рассеивателя S описывается уравнением

$$\vec{r}_S = \vec{r}_S^0 + \Delta\vec{r}, \tag{3}$$

где \vec{r}_S^0 – радиус-вектор точки на “невозмущенной” поверхности S_0 , $\Delta\vec{r}$ – добавка (возмущения границы тела). Отметим, что приведенный ниже алгоритм на основе ММДИ не накладывает ограничения на длину волны падающего поля.

Будем решать поставленную задачу с помощью ММДИ. Для этого представим рассеянное волновое поле вне тела в виде

$$U^1(\vec{r}) = \int_{\Sigma} j(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') ds', \tag{4}$$

где $j(\vec{r}')$ – неизвестный ток на вспомогательной поверхности Σ , которая расположена внутри поверхности тела S . В формуле (4)

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \tag{5}$$

фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (функция Грина свободного пространства) в трехмерном случае. Подставив формулу (4) в граничное условие (1), получим интегральное уравнение первого рода относительно функции $j(\vec{r}')$, которое приведено в работе [10].

Как указано в работах [12–14], выбор вспомогательной поверхности Σ осуществляется с помощью аналитической деформации границы рассеивателя. В указанных работах рассмотрен случай, когда поверхность тела S задана в некоторой ортогональной системе координат (α, β, φ) в виде $\alpha = \alpha(\beta)$, где $\beta \in [0, \pi]$. Однако алгоритм построения вспомогательной поверхности Σ можно обобщить на случай, когда контур сечения поверхности тела задан не явными, а параметрическими уравнениями $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, где $t \in [0, \Omega]$. В этом случае имеем следующие формулы для координат точки на вспомогательной поверхности Σ :

$$\alpha_{\Sigma}(t) = \text{Re}\eta(t), \quad \beta_{\Sigma}(t) = \text{Im}\eta(t), \tag{6}$$

$$\eta(t) = \alpha(t + i\delta) + i\beta(t + i\delta),$$

где $(\alpha_{\Sigma}, \beta_{\Sigma}, \varphi)$ – ортогональные координаты “образа” точки с координатами (α, β, φ) на исходной поверхности, δ – положительный параметр, определяющий степень деформации исходной поверхности тела S . Указанный параметр изменяется в диапазоне $0 < \delta < \delta_{\max}$. В качестве примера

рассмотрим поверхность шероховатого кругового тора, неровности границы которого описываются синусоидальной функцией:

$$\begin{aligned} \rho &= a(1 + \tau \cos(qt)) \sin t + b, \\ z &= a(1 + \tau \cos(qt)) \cos t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, в исследуемом случае удобно использовать тороидальные координаты для задания поверхности Σ . Вводим комплексную переменную

$$\begin{aligned} \xi &= z + ip = a(1 + \tau \cos(qt)) \exp(it) + ib = \\ &= if \operatorname{cth} \left(\frac{\alpha + i\beta}{2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $f = \sqrt{b^2 - a^2}$. Далее находим тороидальные координаты α_Σ и β_Σ точек вспомогательной поверхности по формуле (6), причем

$$\eta \equiv \alpha + i\beta = \ln \left(\frac{\xi + if}{\xi - if} \right), \quad (9)$$

$$\xi = \xi(t + i\delta) = a(1 + \tau \cos(q(t + i\delta))) \exp(i(t + i\delta)) + ib.$$

Для решения интегрального уравнения учтем осевую симметрию задачи. С этой целью разложим функцию $G(\vec{r}, \vec{r}')$ и неизвестный ток в ряды Фурье

$$G(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \psi) = \frac{k}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \exp(im\psi), \quad (10)$$

$$\psi = \varphi - \varphi',$$

$$j(t', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(t') \exp(im\varphi'), \quad (11)$$

где величины S_m – это S-функции Васильева [15]. Далее подставим эти разложения в интегральное уравнение. В результате получим бесконечную систему одномерных интегральных уравнений (СОИУ), приведенную в [10]. Для алгебраизации задачи применим метод коллокации [8–10, 12, 13]. В соответствии с методом коллокации мы разбиваем интервал изменения переменной t точками деления $t_n \equiv \frac{\Omega}{N}(n - 1/2)$, где $n = 1, 2, \dots, N$. Далее заменяем интегралы в СОИУ суммами Римана и приравниваем левую и правую части в полученных уравнениях в точках коллокации, которые выбираем при $t = t_n$. В результате получаем бесконечный набор систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) следующего вида:

$$\mathbf{K}^m \mathbf{I}^m = \mathbf{B}^m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (12)$$

где $\mathbf{K}^m = \|K_m(t_s, t_n)\|$, $\mathbf{B}^m = \|B_m(t_s)\|$, $\mathbf{I}^m = \|I_m(t_n)\|$, $s, n = \overline{1, N}$, причем $I_m(t_n)$ – неизвестные величины (амплитуды полей дискретных источников). Матричные элементы системы (12) выражаются через

S-функции Васильева и их производные [10] (соответствующие формулы здесь не приводим).

Рассмотрим теперь кратко решение векторной задачи дифракции с помощью ММДИ. Предположим, что характеристики среды внутри рассеивателя равны ϵ_i, μ_i , а вне тела ϵ_e, μ_e . Таким образом, на поверхности S выполнены следующие условия сопряжения:

$$\vec{n} \times \vec{E}_e = \vec{n} \times \vec{E}_i, \quad \vec{n} \times \vec{H}_e = \vec{n} \times \vec{H}_i, \quad (13)$$

где $\vec{E}_e = \vec{E}^0 + \vec{E}^1$, $\vec{H}_e = \vec{H}^0 + \vec{H}^1$ – поле вне поверхности рассеивателя, а \vec{E}_i, \vec{H}_i – поле внутри S , \vec{n} – внешняя нормаль. Пусть первичное поле – это плоская волна

$$\begin{aligned} \vec{E}^0 &= \vec{p}_0 \exp(-ik_e r(\sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \\ &+ \cos\theta_0 \cos\theta)), \end{aligned} \quad (14)$$

где \vec{p}_0 – вектор поляризации, $k_e = \omega\sqrt{\epsilon_e\mu_e}$ – волновое число среды вне тела, θ_0, φ_0 – углы падения. Вторичное поле везде за пределами области тела удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла с параметрами k_e и $\zeta_e = \sqrt{\mu_e/\epsilon_e}$ [12]. Поле \vec{E}_i, \vec{H}_i также удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла с параметрами $k_i = \omega\sqrt{\epsilon_i\mu_i}$ и $\zeta_i = \sqrt{\mu_i/\epsilon_i}$. Кроме того, вторичное поле удовлетворяет стандартному условию излучения на бесконечности [12].

Для решения задачи с помощью ММДИ представим волновое поле внутри и вне рассеивателя в виде

$$\vec{E}^1 = -i\zeta_e \nabla \times \nabla \times \int_{\Sigma_1} \vec{J}_1(\vec{r}') G_1(\vec{r}, \vec{r}') ds', \quad (15)$$

$$\vec{H}^1 = k_e \nabla \times \int_{\Sigma_1} \vec{J}_1(\vec{r}') G_1(\vec{r}, \vec{r}') ds',$$

$$\vec{E}_i = -i\zeta_i \nabla \times \nabla \times \int_{\Sigma_2} \vec{J}_2(\vec{r}') G_2(\vec{r}, \vec{r}') ds', \quad (16)$$

$$\vec{H}_i = k_i \nabla \times \int_{\Sigma_2} \vec{J}_2(\vec{r}') G_2(\vec{r}, \vec{r}') ds',$$

где функции $G_1(\vec{r}, \vec{r}')$ и $G_2(\vec{r}, \vec{r}')$ имеют вид формулы (5), в которой следует заменить волновое число k на k_e или k_i соответственно. В формулах (15) и (16) Σ_1 и Σ_2 – вспомогательные поверхности вращения, расположенные внутри и снаружи поверхности S соответственно, \vec{J}_1, \vec{J}_2 – неизвестные токи, распределенные по поверхностям Σ_1, Σ_2 . Подстановка выражений (15) и (16) в граничные

условия (13) позволяет получить систему интегральных уравнений, приведенную в работе [14].

Вновь учтем осевую симметрию задачи. Будем считать, что поверхность тела S задана уравнениями $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t)$, а параметрические уравнения вспомогательных поверхностей Σ_1 и Σ_2 имеют вид $\alpha = \alpha_{\Sigma_p}(t), \beta = \beta_{\Sigma_p}(t)$ ($p = 1, 2$), причем $t \in [0, \Omega]$. Для алгебраизации задачи разложим неизвестные функции (токи) в ряды Фурье:

$$\bar{J}_p(t', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{I}_p^m(t') \exp(im\varphi'), \quad p = 1, 2. \quad (17)$$

При этом в соответствии с [12–14] имеем

$$\bar{I}_p^m = -n_{\beta_p} I_p^{m1} \bar{i}_{\alpha_p} + n_{\alpha_p} I_p^{m1} \bar{i}_{\beta_p} + I_p^{m2} \bar{i}_{\varphi_p}, \quad p = 1, 2, \quad (18)$$

где $\bar{i}_{\alpha_p}, \bar{i}_{\beta_p}, \bar{i}_{\varphi_p}$ – единичные орты выбранной системы координат, $n_{\alpha_p}, n_{\beta_p}$ – координаты нормалей к поверхностям Σ_1 и Σ_2 . Подставив формулу (17) в систему интегральных уравнений, с учетом (18) и разложений функций G_1 и G_2 в ряды Фурье, аналогичных формуле (10), получим бесконечную СОИУ, которая далее с помощью метода коллокации сводится к следующему набору СЛАУ

$$\mathbf{K}_{11}^m \mathbf{I}_1^m + \mathbf{K}_{12}^m \mathbf{I}_2^m = \mathbf{V}_1^m, \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{21}^m \mathbf{I}_1^m + \mathbf{K}_{22}^m \mathbf{I}_2^m = \mathbf{V}_2^m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\mathbf{I}_p^m = [\mathbf{I}_p^{m1}, \mathbf{I}_p^{m2}]^T$, $\mathbf{V}_p^m = [\mathbf{V}_p^{m1}, \mathbf{V}_p^{m2}]^T$, $p = 1, 2$, T – знак транспонирования. В системе (19)

$$\mathbf{K}_{pq}^m \mathbf{I}_q^m = \left(\begin{array}{c} \sum_{n=1}^N K_{pq,11}^m(t_s, t_n) I_q^{m1}(t_n) + \sum_{n=1}^N K_{pq,12}^m(t_s, t_n) I_q^{m2}(t_n) \\ \sum_{n=1}^N K_{pq,21}^m(t_s, t_n) I_q^{m1}(t_n) + \sum_{n=1}^N K_{pq,22}^m(t_s, t_n) I_q^{m2}(t_n) \end{array} \right),$$

$$\mathbf{V}_p^{m1} = \|\mathbf{B}_p^{m1}(t_s)\|, \quad \mathbf{V}_p^{m2} = \|\mathbf{B}_p^{m2}(t_s)\|, \quad s = \overline{1, N}, \quad p, q = 1, 2.$$

Величины $I_1^{m1}(t_n), I_1^{m2}(t_n), I_2^{m1}(t_n), I_2^{m2}(t_n)$ – неизвестные амплитуды полей дискретных источников. Подробные выражения для матричных элементов и правой части системы (19) получаются из формул, приведенных в работах [12–14].

Рассмотрим алгоритм нахождения максимального значения δ_{\max} параметра деформации на примере шероховатых многолистников вращения. Пусть уравнение контура осевого сечения тела в сферических координатах имеет вид (в этом случае $\alpha = \ln r, \beta = \theta$)

$$r(\theta) = a \left(1 + \sum_{j=0}^L \tau_j \cos(j\theta) \right), \quad (20)$$

где числа $|\tau_j| < 1$. Рассмотрим также многолистники, уравнение контура осевого сечения которых задано в сфероидальных координатах [16]:

$$\alpha(\beta) = \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=0}^L \tau_j \cos(j\beta) \right). \quad (21)$$

Отметим, что при $\tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau_L = 0$ многолистник (21) переходит в эллипс. В формуле (21)

$\alpha_0 = \ln \left(\frac{a+b}{f} \right)$, a, b и f – полуоси и межфокусное расстояние невозмущенного сфероида (при $\tau_j = 0, j = 0, 1, 2, \dots, L$).

Ниже рассмотрим вопрос о выборе максимального значения параметра деформации на примере внутренней вспомогательной поверхности (в векторном случае это поверхность Σ_1). Как следует из работ [12–14], максимальное значение параметра деформации вспомогательного контура соответствует появлению у него точек самопересечения. Для определения максимальной степени деформации, необходимой для построения вспомогательного контура Σ , используется алгоритм, аналогичный методу половинного деления для решения нелинейных уравнений. Сначала зададим некоторое положительное значение δ_0 , при котором вспомогательный контур имеет самопересечения. Для проверки наличия точек самопересечения вспомогательного контура мы решали уравнение

$$F(t_1, t_2) = 0, \quad (22)$$

где

$$F(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{\xi(t_2 + i\delta) - \xi(t_1 + i\delta)}{t_2 - t_1}, & t_1 \neq t_2, \\ \xi'(t_1 + i\delta), & t_1 = t_2, \end{cases} \quad (23)$$

которое эквивалентно системе двух нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(t_1, t_2) &= 0, \\ \operatorname{Im} F(t_1, t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

При наличии действительных решений данной системы контур имеет точки самопересечения (очевидно, при этом $t_1 \neq t_2$). Как показывают численные исследования, при увеличении параметра δ точки самопересечения контура Σ будут появляться вблизи максимумов или минимумов исходного контура S сечения тела. Поэтому для нахождения начальных приближений системы (24) можно поступить следующим образом. Вначале находим значения параметра t_0 , при которых функция $\alpha(\beta(t))$ имеет локальные экстремумы. Далее задаем начальные приближения к корням системы (24) в виде $t_0 \pm \Delta t$. Здесь величина Δt

подбирается при помощи численных экспериментов.

После нахождения величины δ_{\max} применяем алгоритм, приведенный в [12–14]. А именно рассмотрим интервал $[0, \delta_0]$ изменения параметра δ . Разделим этот интервал пополам и проверим, имеет ли уравнение (22) действительные корни для значения δ в середине исходного интервала. Если это условие выполнено, то берем левую половину интервала, если нет, то берем правую половину и снова делим ее пополам, и т.д. Алгоритм останавливается, когда длина интервалов, на которые делится исходный интервал $[0, \delta_0]$, становится меньше заданного малого значения. В итоге за δ_{\max} берем левую границу интервала, рассмотренного на последней итерации.

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В случае, если неровности границы представляют собой случайную функцию координат, можно рассмотреть усредненную интенсивность рассеянного поля. Ниже приведены численные результаты усредненной интенсивности поля для случая дифракции на теле с сечением в виде “возмущенного” многолистника вращения

$$r(\theta) = a(1 + \tau_0 \cos(q_0\theta) + \tau_1 \cos(q_1\theta)), \quad (25)$$

где предполагается, что $|\tau_1| \ll |\tau_0| < 1$, а также в виде эллиптического многолистника, задаваемого уравнением

$$\alpha(\beta) = \alpha_0(1 + \tau_0 \cos(q_0\beta) + \tau_1 \cos(q_1\beta)), \quad (26)$$

в эллиптических координатах. Здесь τ_1 – случайная величина, а остальные величины неслучайны. Будем считать, что амплитуда возмущений τ_1 является случайной величиной, распределенной по усеченному нормальному закону, который имеет вид [17]

$$w(\tau_1) = \begin{cases} C_0 \exp(-\tau_1^2/2\sigma_0^2), & |\tau_1| \leq \tau_{\max}, \\ 0, & |\tau_1| > \tau_{\max}, \end{cases} \quad (27)$$

где C_0 , σ_0 , τ_{\max} – параметры распределения, причем величина C_0 определяется из условия нормировки. В дальнейшем будем считать, что $\tau_{\max} \gg \sigma_0$. В результате закон распределения (27) будет близок к нормальному закону. В этом случае величина σ_0^2 примерно равна дисперсии случайной величины τ_1 .

В скалярном случае усредненная интенсивность рассеянного поля вычисляется по формуле

$$\langle I(\theta, \varphi) \rangle = \int_{-\tau_{\max}}^{\tau_{\max}} w(\tau_1) |g(\theta, \varphi, \tau_1)|^2 d\tau_1, \quad (28)$$

а в векторном случае –

$$\langle I(\theta, \varphi) \rangle = \int_{-\tau_{\max}}^{\tau_{\max}} w(\tau_1) |\vec{F}(\theta, \varphi, \tau_1)|^2 d\tau_1, \quad (29)$$

где $g(\theta, \varphi, \tau_1)$ и $\vec{F}(\theta, \varphi, \tau_1)$ – диаграмма рассеяния волнового поля, которая определяется из соотношения

$$U^1 \approx g(\theta, \varphi, \tau_1) \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad (30)$$

либо

$$\vec{E}^1 \approx \vec{F}(\theta, \varphi, \tau_1) \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (31)$$

соответственно для скалярного и векторного случаев. В формулах (28)–(31) мы подчеркнули зависимость диаграммы от величины τ_1 . В случае скалярной задачи диаграмма рассеяния $g(\theta, \varphi, \tau_1)$ имеет вид

$$g(\theta, \varphi, \tau_1) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N i^m I_n^m J_m(k\rho_n \sin\theta) \times \\ \times \exp(kz_n \cos\theta + im\varphi) \rho_n h_{\Sigma} \sqrt{\alpha_{\Sigma}^2 + \beta_{\Sigma}^2}, \quad (32)$$

где ρ_n , z_n – цилиндрические координаты дискретных источников, h_{Σ} – коэффициент Ламе, точка означает дифференцирование по t . В случае векторной задачи дифракции подробные выражения для диаграммы рассеяния приведены в работе [12]. Заметим, что для нахождения интегралов (28) и (29) можно использовать квадратурную формулу Эрмита (в этом случае мы используем близость закона распределения (27) к нормальному закону).

Для проверки корректности результатов, полученных с помощью разработанного метода, мы рассмотрели задачу дифракции на теле, имеющем неслучайные возмущения границы. Задачу решали двумя методами: ММДИ и методом продолженных граничных условий (МПГУ), который подробно описан в работах [18, 19]. В дальнейшем предполагается, что тело облучается плоской волной

$$\vec{E}^0 = \vec{i}_x \exp(-ikz), \quad \vec{H}^0 = \vec{i}_y \exp(-ikz)/\zeta_e. \quad (33)$$

Всюду ниже будем считать, что окружающая тело среда – вакуум. На рис. 1 приведены угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния волнового поля для задачи дифракции на многолистниках вращения вида (25) и (26), в которых τ_1 – неслучайная

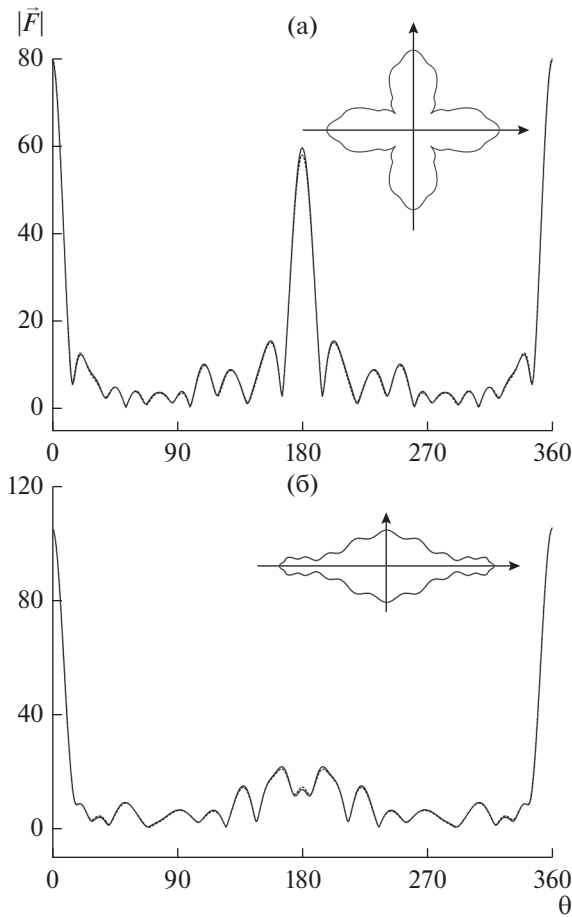


Рис. 1. Сравнение угловой зависимости модуля диаграммы рассеяния, полученной при помощи ММДИ (сплошная кривая) и МПГУ (штриховая кривая); многолистник вращения двух видов: а – (25), б – (26).

амплитуда, которые получены с использованием ММДИ и МПГУ. Параметры задачи имели следующие значения. Размеры “сферической” частицы $ka = 10$, $\tau = 0.5$, $q_0 = 4$, $q_1 = 20$, $\tau_0 = 0.5$, $\tau_1 = 0.05$,

размеры “сфероидальной” частицы $ka = 3.605$, $kb = 14.42$, $q_0 = 4$, $q_1 = 20$, $\tau_0 = 0.5$, $\tau_1 = 0.12$. Диэлектрическая проницаемость частиц равна $\epsilon_i = 12.96$, а магнитная проницаемость равнялась единице. Угол наблюдения $\varphi = 0$. Отметим, что параметры геометрии для указанных рассеивателей выбраны так, что максимальные значения отклонения неровностей границы тел были примерно одинаковы для обоих типов многолистников. Размеры тел также согласованы таким образом, чтобы диаметры “невозмущенных” рассеивателей были одинаковы. Как видно из рис. 1 имеется хорошее совпадение результатов, полученных двумя методами. Для тестирования алгоритмов мы также проверили выполнение оптической теоремы, которая имеет вид [20]

$$\frac{4\pi}{k_e} \text{Im}(\bar{p}_0 \bar{F}(\theta_0, \varphi_0)) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\bar{F}(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (34)$$

Как показывают расчеты, относительная разность правой и левой частей в формуле (34) составила 5.86×10^{-5} и 1.43×10^{-6} в случае решения задачи дифракции на “сферическом” и “сфероидальном” многолистнике вращения с помощью ММДИ и 2.56×10^{-2} и 2.34×10^{-2} при решении указанных задач с помощью МПГУ. Таким образом, точность выполнения оптической теоремы существенно выше в случае применения алгоритма на основе ММДИ. При этом скорость расчетов также выше при использовании этого метода.

На рис. 2 приведено распределение невязки краевого условия для рассматриваемых выше геометрий тел. Задача решалась с помощью ММДИ. Невязка определяется по формулам

$$\Delta_r = \sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2 + \Delta_{21}^2 + \Delta_{22}^2}, \quad (35)$$

где

$$\Delta_{p\nu}(\tilde{t}_s, \varphi) = \left| \sum_{m=-M}^M \left[\sum_{q=1}^2 \left(\sum_{n=1}^N (K_{pq,\nu 1}^m(\tilde{t}_s, t_n) I_q^{m1}(t_n) + K_{pq,\nu 2}^m(\tilde{t}_s, t_n) I_q^{m2}(t_n)) \right) - B_p^{m\nu}(\tilde{t}_s) \right] \exp(im\varphi) \right|, \quad p, \nu = 1, 2. \quad (36)$$

Здесь значения \tilde{t}_s выбираются в точках, равных серединам интервалов, на которые делится промежуток $[0, \pi]$ точками коллокации $t = t_n$. Кривые на рис. 2 построены для значения $\varphi = 0$. На этих же рисунках приведены распределения невязки краевого условия для «невозмущенных» рассеивателей, т.е. “сферической” и “сфероидальной” частиц при $\tau_1 = 0$. Число точек коллокации составило $N = 400$ и 200 , соответственно для случая решения задачи дифракции на “сферической” и “сфероидальной” неровной частице. Таким образом, при решении задачи дифракции на “сфери-

ческом” многолистнике вращения необходимо брать примерно 40 точек коллокации на период функции, описывающей неровности границы тела, а в случае “сфероидального” многолистника число точек коллокации можно выбрать примерно в два раза меньше. Как видно из рис. 2, максимальное значение невязки не превосходит 2×10^{-2} для “сферической” и 10^{-3} для “сфероидальной” неровной частицы. В то же время для “невозмущенных” рассеивателей обеих геометрий максимальный уровень невязки не превосходит 5×10^{-6} (при этом было выбрано $N = 200$ для “сферической” и

$N = 150$ для “сфероидальной” частицы). Расчеты показывают, что в случае скалярной задачи дифракции максимальное значение невязки не превосходит 10^{-5} для тех же значений числа точек коллокации для неровных тел той же геометрии.

Рассмотрим далее результаты, касающиеся степени “зеркальности” тела вращения с сечением в виде указанных выше многолистников и шероховатого суперэллипсоида вращения [10]. Рассмотрим случай статистически неровной границы тела. На рис. 3 представлены реализации поверхностей указанных тел, а на рис. 4 приведены геометрии контура сечения тела и внутреннего вспомогательного контура, получаемого путем аналитической деформации исходного контура сечения тела, для рассматриваемых геометрий. Рисунки 3а и 4а соответствуют значению $\tau_0 = 0.1$, рис. 3б и 4б – $\tau_0 = 0.5$ (рассматривался многолистник вращения (25)), рис. 3в и 4в относится к случаю рассеяния на теле с сечением вида (26), причем параметр $\tau_0 = 0.5$, а рис. 3г и 4г соответствует рассеянию на шероховатом суперэллипсоиде. Всюду на рисунках $\tau_1 = \sigma_0$. Размер гладкой “сферической” частицы вида (25) $ka = 10$ (для рис. 4а) или $ka = 13.64$ (для рис. 4б), размеры “сфероидальной” частицы вида (26) $ka = 3.605$, $kb = 14.42$ (см. рис. 4в), полуоси “невозмущенного” суперэллипсоида $ka = 3.75$, $kb = 15$ (см. рис. 4г). Параметры $q_0 = 4$, $q_1 = 20$ для многолистников вращения. Величина $\sigma_0 = 0.05$ для многолистника (25) в случае $\tau_0 = 0.1$ и $\sigma_0 = 0.016$ для многолистника (25) в случае $\tau_0 = 0.5$ и $\sigma_0 = 0.0652$ для многолистника вращения вида (26) и $\sigma_0 = 0.016$ для суперэллипсоида вращения. Среднеквадратические отклонения неровностей границы выбраны таким образом, что максимальная разность координат точек контура шероховатого тела и точек контура “невозмущенного” тела были примерно одинаковы для обоих типов многолистников. Заметим, что вспомогательные контуры, показанные на рисунках, соответствуют максимальному значению δ_{\max} параметра деформации контура сечения тела. Как указано в работе [9], особые точки продолжения волнового поля необходимо соединить разрезами, геометрия которых определяет условие самопересечения вспомогательного контура, а именно, этот контур не должен пересекать данные разрезы. Таким образом, условие самопересечения вспомогательного контура тесно связано с геометрией множества особенностей продолжения волнового поля внутрь контура сечения тела [9]. Как видно из рис. 4б в случае тела с сечением вида (25) при $\tau_0 = 0.1$ вспомога-

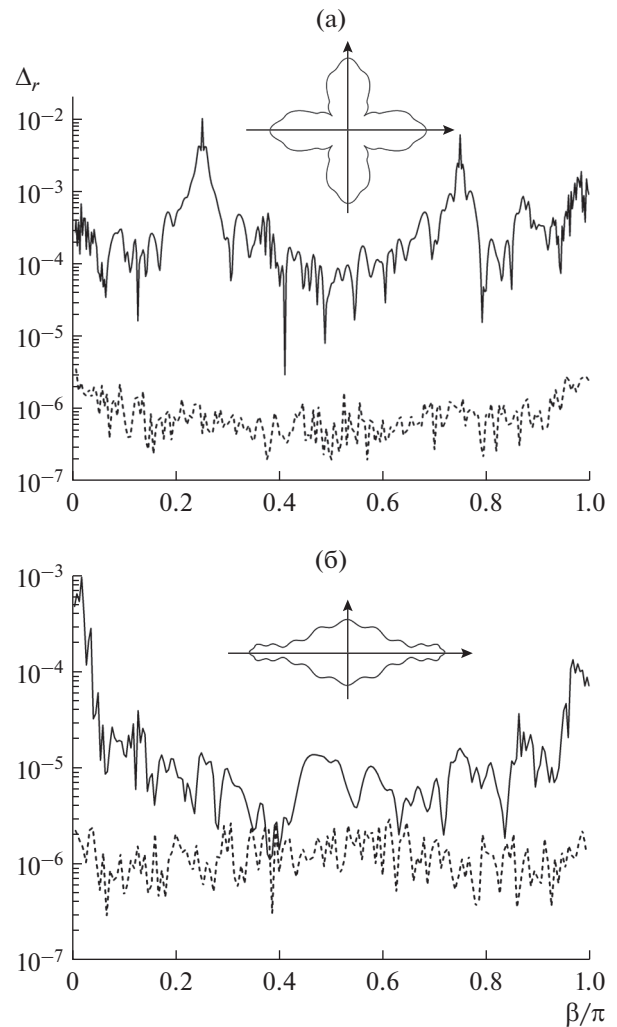


Рис. 2. Распределение невязки краевого условия на контуре осевого сечения тела; многолистник вращения двух видов: а – (25), б – (26) Шероховатое тело – сплошная кривая, невозмущенное тело – штриховая кривая.

ные контуры шероховатого и “невозмущенного” тела существенно различаются. В тоже время аналогичные контуры многолистника вида (25) при $\tau_0 = 0.5$ и “сфероидального” многолистника вида (26), а также суперэллипсоида близки друг к другу. Данное обстоятельство приводит к соответствующему поведению угловых зависимостей диаграмм рассеяния шероховатого и гладкого тел, которые изображены на рис. 5, 6. Во всех случаях плоская волна падала вдоль оси вращения тела. Рисунок 5 относится к скалярной задаче дифракции, а рис. 6 соответствует векторной задаче. Угол наблюдения для всех рисунков равен $\varphi = 0$. Значение импеданса $W = 10000$, т.е. граничное условие (1) близко к условию Неймана. Как следует из при-

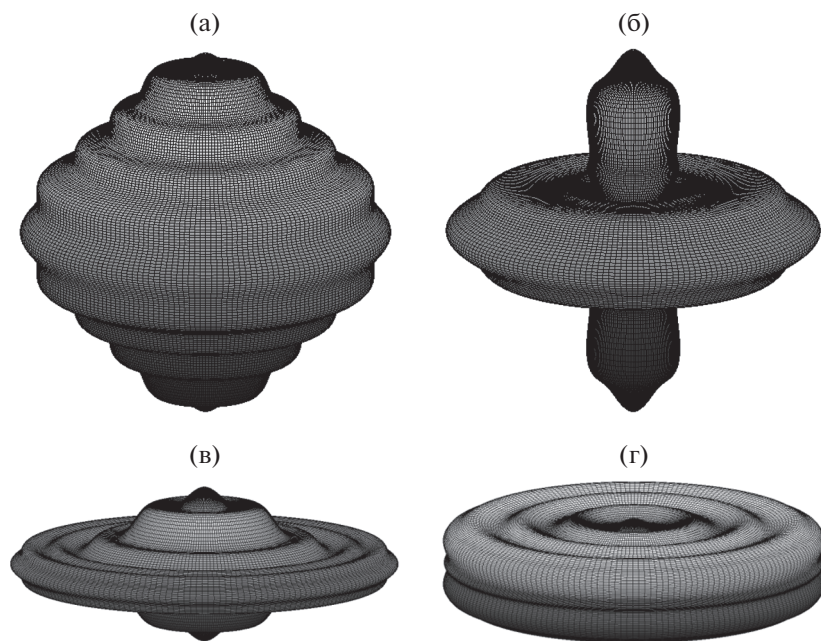


Рис. 3. Геометрии рассматриваемых тел со статистически неровной границей.

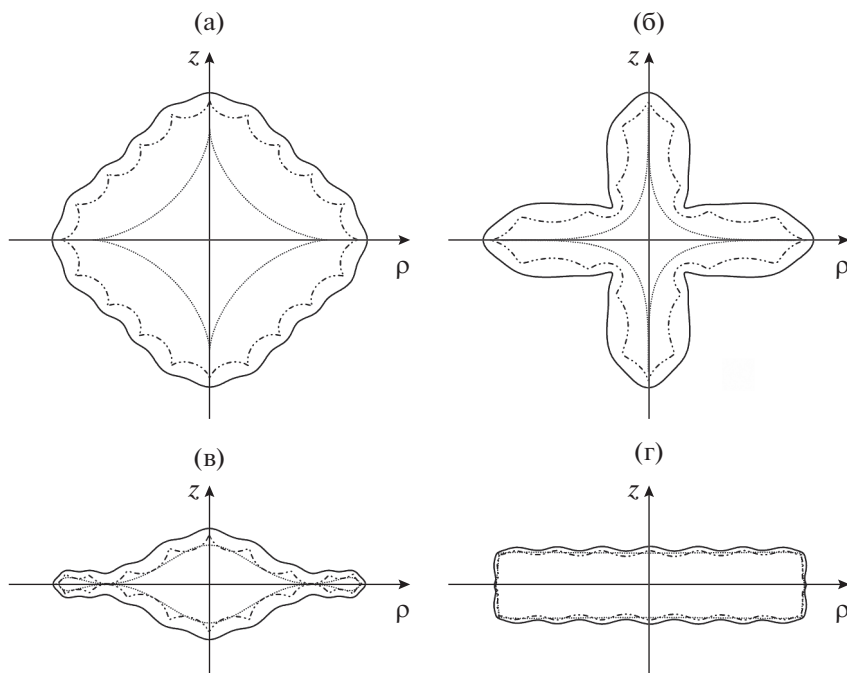


Рис. 4. Геометрии вспомогательных контуров сечений рассматриваемых тел со статистически неровной границей. Геометрия реализации контура сечения тела – сплошная кривая, геометрия вспомогательного контура “невозмущенного” (гладкого) тела – точечная кривая, геометрия реализации вспомогательного контура шероховатого тела – штриховая кривая.

веденных рисунков, диаграммы гладкого и шероховатого тел с сечением вида (25) при $\tau_0 = 0.1$ различаются в окрестности направления обратного рассеяния. В случае скалярной задачи дифракции

на теле с сечением вида (25) при $\tau_0 = 0.5$ и вида (26), а также на суперэллипсоиде соответствующие диаграммы близки друг к другу в большей части диапазона изменения угла наблюдения (в случае те-

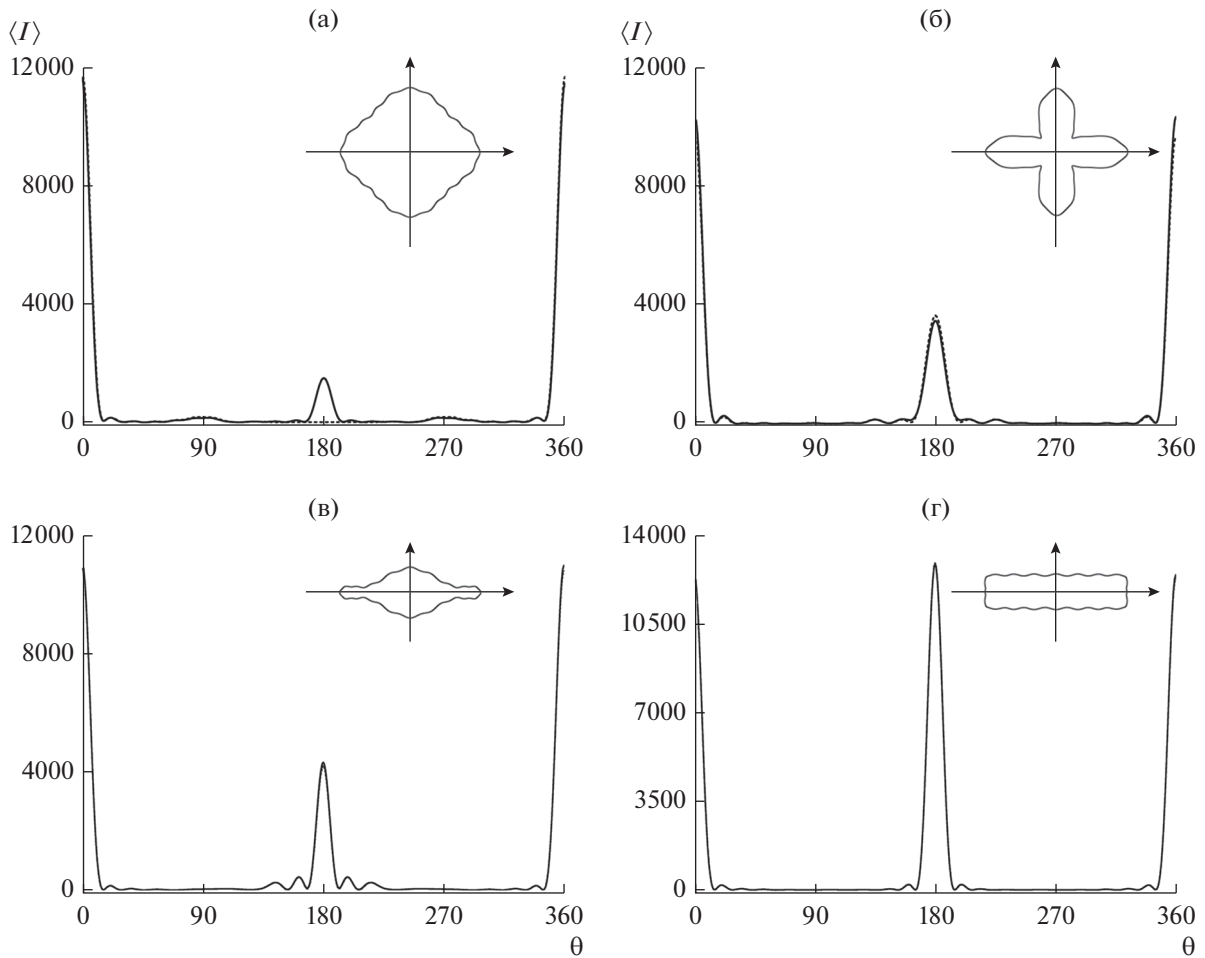


Рис. 5. Угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния гладкого (сплошная кривая) и шероховатого тела (штриховая кривая); многолистник вращения вида (25) при $\tau = 0.1$ (а) и 0.5 (б), многолистник вращения вида (26) (в); суперэллипсоид (г). Скалярная задача.

ла с сечением (26) и суперэллипсоида они совпадают). Так как вспомогательный контур при $\delta = \delta_{\max}$ “повисает” на точках, являющихся особенностями аналитического продолжения поля внутрь контура тела, то можно сделать следующий вывод. В случае если особенности продолжения волнового поля внутрь гладкого тела расположены достаточно близко к контуру сечения рассеивателя, то диаграммы рассеяния гладкого и шероховатого тел близки при условии малости неровностей границы по сравнению с длиной волны (для скалярной задачи дифракции). Если же особенности продолжения поля расположены “далеко” от контура сечения гладкого тела, то диаграммы гладкого и шероховатого тел различаются достаточно сильно даже для малых амплитуд неровностей границы. Для векторной задачи угловые зависимости интенсивности рассеянного поля шероховатого и гладкого тела близки только

для многолистника вращения вида (26). В остальных случаях имеется достаточно сильное отличие в поведении зависимостей интенсивности гладкого и возмущенного тела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе ММДИ разработан численный алгоритм решения трехмерной задачи дифракции на шероховатом теле вращения. Метод пригоден для расчета характеристик рассеяния тел с достаточно большими значениями амплитуды неровностей границы. В работе предложен эффективный алгоритм построения вспомогательного контура, являющегося носителем дискретных источников, применимый к широкому классу тел с аналитической границей. Для подтверждения корректности результатов, получаемых с помощью ММДИ, проведено сравнение угловых зависимостей диаграммы рассеяния волнового поля, найденных с

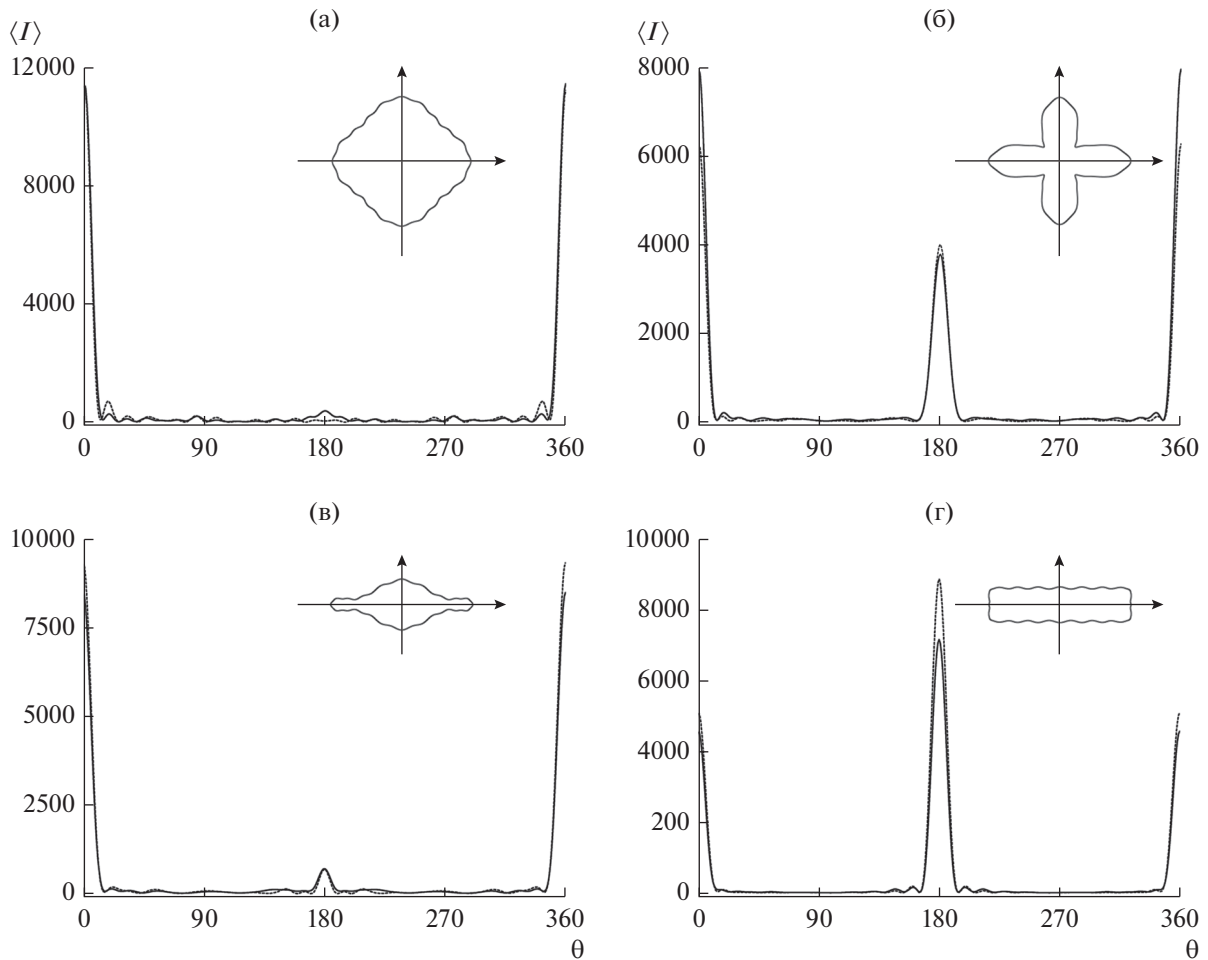


Рис. 6. Угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния гладкого (сплошная кривая) и шероховатого тела (штриховая кривая); многолистник вращения вида (25) при $\tau = 0.1$ (а) и 0.5 (б), многолистник вращения вида (26) (в); суперэллипсоид (г). Векторная задача.

помощью ММДИ и МПГУ, для двух типов шероховатых многолистников вращения. Показано, во-первых, хорошее совпадение результатов, полученных с помощью ММДИ и МПГУ. Во-вторых, продемонстрировано, что ММДИ позволяет получать диаграмму рассеяния с большей точностью, чем алгоритм на основе МПГУ. Корректность результатов, получаемых с помощью ММДИ, подтверждена проверкой выполнения краевого условия на контуре сечения тела. Показано, что невязка выполнения краевого условия в наихудшем случае не превосходит 2×10^{-2} . Представлены угловые зависимости усредненной интенсивности рассеяния волнового поля для статистически неровного многолистника вращения двух типов и шероховатого суперэллипсоида вращения. Неровности границы моделировались синусоидальной случайной функцией, имеющей случайную амплитуду. Численно исследовано влияние малых неровностей границы на геометрию множества особенностей продолжения волнового поля

внутри контура сечения тела. Во-первых, показано, что геометрия множества указанных особенностей существенно зависит от формы тела (т.е. “невозмущенного” контура сечения рассеивателя). Во-вторых, продемонстрировано, что при существенном различии множества особенностей гладкого и шероховатого тел, усредненные интенсивности рассеяния поля также достаточно сильно различаются даже при малых значениях неровностей границы сечения тела.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-02-00654).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басс Ф.Г., Фукс И.М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
2. *Voronovich A.G.* Light scattering and nanoscale roughness / Ed. by A.A. Maradudin. N.Y.: Springer, 2006. P. 93.
3. *Voronovich A.G.* Wave Scattering from Rough Surfaces. Berlin: Springer, 2013.
4. *Muinsonen K., Nousiainen T., Fast P. et al.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1996. V. 55. № 5. P. 577.
5. *Muinsonen K.*, Light Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements and Applications/Eds. by M.I.Mishchenko, J.W.Hovenier, L.D.Travis. San Diego: Academic Press, 2000. P. 323.
6. *Auger J.-C., Fernandes G., Aptowicz K., Pan Y.-L., Chang R.* // Appl. Phys. 2010. B. 99. P. 229.
7. *Kahnert M., Rother T.* // Opt. Express. 2011. V. 19. P. 11138.
8. *Кюркчан А.Г., Минаев С.А., Соловейчик А.Л.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 6. С. 666.
9. *Kyurkchan A.G., Smirnova N.I.* Mathematical Modelling in Diffraction Theory Based on A Priori Information on the Analytical Properties of the Solution. Amsterdam: Elsevier, 2017.
10. *Маненков С.А.* // Акустич. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 129.
11. *Кюркчан А.Г.* // Успехи физ. наук. 2017. Т. 187. № 10. С. 1097.
12. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2012. V. 113. № 18. P. 2368.
13. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2014. V. 146. № 1. P. 295.
14. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2018. V. 221. P. 243.
15. *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
16. *Фарафонов В.Г., Винокуров А.А., Барканов С.В.* // Оптика и спектроскопия. 2011. Т. 111. № 5. С. 852.
17. *Григорьев Г.И., Заборонкова Т.М., Коган Л.П.* // РЭ. 2017. Т. 50. № 5. С. 552.
18. *Кюркчан А.Г., Анютин А.П.* // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 309.
19. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2019. V. 237. P. 106617.
20. *Rother T., Kahnert M.* Electromagnetic Wave Scattering on Nonspherical Particles – Basic Methodology and Simulations. Springer Series in Optical Sciences, XIV, Berlin: Springer, 2014.