

## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67

### СИНТЕЗ БИФОКАЛЬНЫХ ЗЕРКАЛЬНО-ЛИНЗОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МИНИМАЛЬНЫМИ АБЕРРАЦИЯМИ

© 2022 г. В. А. Калошин<sup>а, \*</sup>, Ви Ут Нам<sup>б</sup>

<sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125007 Российская Федерация

<sup>б</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Институтский пер. 9, Долгопрудный Московской обл., 141700 Российская Федерация

\*E-mail: vak@cplire.ru

Поступила в редакцию 10.03.2021 г.

После доработки 10.03.2021 г.

Принята к публикации 28.03.2021 г.

Развита методика синтеза и оптимизации бифокальных зеркально-линзовых цилиндрических систем с использованием последовательного нахождения участков первой поверхности диэлектрической линзы и зеркала, примыкающего ко второй поверхности линзы. При этом начальный участок первой поверхности линзы задается в виде полинома второго порядка, параметры которого определяются в результате решения найденного в работе уравнения в общем случае обеспечивающего непрерывность вторых производных функций, описывающих поверхности линзы и зеркала. Начальный участок зеркала находится в результате решения задачи синтеза плоского фронта для центрального положения источника. Определены параметры оптимизации с целью минимизации величины средне-квадратической аберрации при фиксированной толщине линзы, коэффициенте преломления и угле зрения бифокальной системы. На плоскости этих параметров для углов зрения 50, 70 и 100 градусов найдены области существования решения задачи синтеза, зависимости величины средне-квадратической аберрации от параметров оптимизации и набор параметров, обеспечивающих ее минимальное значение.

DOI: 10.31857/S0033849422020061

#### ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрические зеркальные, линзовые и зеркально-линзовые фокусирующие системы применяются в качестве планарных диаграммо-образующих систем (ДОС) многолучевых антенных решеток [1–6] и антенн с главным зеркалом в виде параболического цилиндра [7].

Цилиндрические зеркально-линзовые ДОС можно реализовать в виде двухслойной конструкции [1, 3, 5, 6, 8], что является преимуществом перед трехслойной конструкцией двухзеркальных ДОС [6, 9]. Апланатические и бифокальные зеркально-линзовые ДОС позволяют обеспечить более широкий угол зрения по сравнению с однозеркальными ДОС [2]. При этом зеркально-линзовые ДОС на основе диэлектрических линз имеют меньшие потери и более простую конструкцию по сравнению с ДОС на основе линз с принудительным преломлением [1, 3].

В работе [10] была синтезирована зеркально-линзовая апланатическая система на основе диэлектрической линзы и проведены исследования зависимости средне-квадратической аберрации (СКА) от параметров системы.

В работе [5] с использованием последовательного нахождения участков первой поверхности диэлектрической линзы и зеркала, примыкающего ко второй поверхности линзы, была синтезирована и исследована бифокальная ДОС, которая обеспечивает меньшую величину СКА в заданном угле зрения, чем апланатическая. При этом вопрос об оптимальных параметрах такой системы, обеспечивающих минимальную величину СКА, остался открытым.

Следует отметить, что можно реализовать бифокальную волноводно-щелевую решетку с использованием двухслойной однозеркальной ДОС [4], а трехфокальную волноводно-щелевую антенную решетку – с использованием зеркально-линзовой ДОС на основе диэлектрической линзы [6]. Однако в процессе синтеза в этих работах в качестве дополнительной степени свободы использовалось определенное положение щелей в волноводах решеток, что ограничивает ширину рабочей полосы частот и область применения ДОС.

Цель данной работы – развитие методики синтеза и оптимизации цилиндрических бифокальных зеркально-линзовых ДОС на основе диэлектрической линзы с целью реализации минималь-

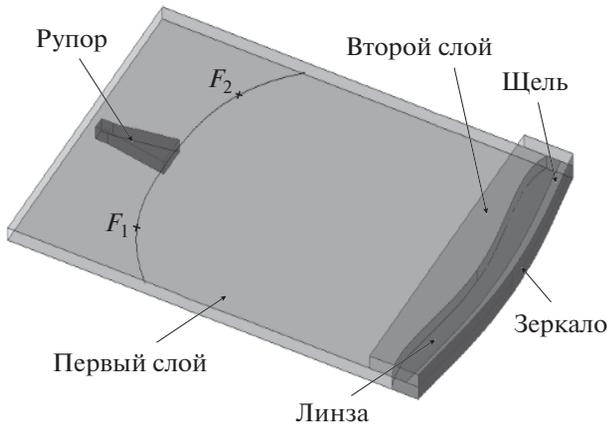


Рис. 1. Конструкция двухслойной зеркально-линзовой бифокальной системы.

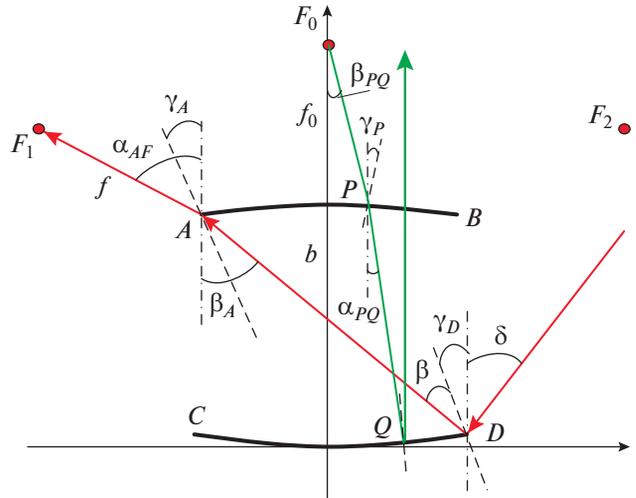


Рис. 2. Начальные участки зеркала и линзы.

ной СКА в заданном угле зрения и ее апробация на конкретных примерах.

### 1. МЕТОДИКА СИНТЕЗА БИФОКАЛЬНОЙ ЗЕРКАЛЬНО-ЛИНЗОВОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим задачу синтеза зеркально-линзовой бифокальной системы, которая фокусирует поле источника цилиндрической волны, расположенного в любом из двух фокусов ( $F_1, F_2$ ) в первом слое (рис. 1) в плоскую волну во втором слое. Система содержит цилиндрическую диэлектрическую линзу и зеркало, поверхность которого совпадает со второй поверхностью линзы. Первый и второй слой связаны через щель, форма которой совпадает с формой зеркала (металлизированной второй поверхностью линзы). Предположим, что задан коэффициент преломления линзы  $n$ , а форма первой поверхности линзы (далее – поверхность линзы) и зеркала описываются четными функциями  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , соответственно. При этом поверхности линзы и зеркала симметричны относительно оси  $y$  и пересекают ее в точках с декартовыми координатами  $(0, b)$  и  $(0, 0)$  соответственно (рис. 2). Задача синтеза заключается в нахождении этих функций.

Для решения задачи применим, как и в работе [5], методику последовательного нахождения участков поверхности линзы и зеркала. Предложим, что форма начального участка поверхности линзы (между точками  $A$  и  $B$ ) известна, т.е. функция  $y_1(x) = y_{10}(x)$  на интервале  $[-x_0, x_0]$ , где  $y_{10}(x)$  – известная функция.

Осевой луч, выходящий из точки  $F_0$  с декартовыми координатами  $(0, b + f_0)$ , идет вдоль оси  $y$  и не преломляется линзой. Эйконал этого луча от точки  $F_0$  до плоского фронта ( $y = b + f_0$ ) определяется формулой  $L_0 = 2f_0 + (n + 1)b$ , где  $f_0$  – расстояние от точки  $F_0$  до поверхности линзы.

Рассмотрим другой луч, выходящий из фокуса  $F_0$  и падающий на поверхность линзы в точке  $P$  с координатами  $(x_p, y_p)$ . Луч преломляется линзой, падает на зеркало в точке  $Q$  с координатами  $(x_q, y_q)$  и отражается от него. Эйконал этого луча определяется формулой

$$L = \sqrt{x_p^2 + (f_0 + b - y_p)^2} + nl_{PQ} + f_0 + b - y_p - l_{PQ} \frac{\sqrt{n^2 + S_{FP}^2} - S_{FP}y'_p}{n\sqrt{1 + y_p'^2}}, \tag{1}$$

где

$$y'_p = dy_1/dx|_{x = x_p};$$

$$S_{FP} = \frac{x_p - y'_p(b + f_0 - y_p)}{\sqrt{(x_p - y'_p(b + f_0 - y_p))^2 + (x_p y'_p + b + f_0 - y_p)^2}};$$

$l_{PQ}$  – расстояние от точки  $P$  до точки  $Q$  (рис. 2).

Потребуем, чтобы все лучи, выходящие из точки  $F_0$ , после преломления линзой и отражения от зеркала были параллельны оси  $y$ . Для этого необ-

ходимо равенство эйконолов всех лучей от источника до фронта. Приравняем эйконал произвольного луча эйконалу осевого луча:

$$\sqrt{x_p^2 + (f_0 + b - y_p)^2} + nl_{PQ} + f_0 + b - y_p - l_{PQ} \frac{\sqrt{n^2 + S_{FP}^2} - S_{FP}y_p'}{n\sqrt{1 + y_p'^2}} = 2f_0 + (1 + n)b. \quad (2)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$l_{PQ} = n\sqrt{1 + y_p'^2} \frac{f_0 + nb + y_p - \sqrt{x_p^2 + (f_0 + b - y_p)^2}}{\left( n^2\sqrt{1 + y_p'^2} + \sqrt{n^2 + S_{FP}^2} - S_{FP}y_p' \right)}. \quad (3)$$

Координаты точки  $Q$  определяются формулой

$$\begin{aligned} x_Q &= x_p + \frac{f_0 + nb + y_p - \sqrt{x_p^2 + (f_0 + b - y_p)^2}}{\left( n^2\sqrt{1 + y_p'^2} + \sqrt{n^2 + S_{FP}^2} - S_{FP}y_p' \right)} \times \\ &\quad \times \left( y_p'\sqrt{n^2 + S_{FP}^2} + S_{FP} \right), \\ y_Q &= y_p + \frac{f_0 + nb + y_p - \sqrt{x_p^2 + (f_0 + b - y_p)^2}}{\left( n^2\sqrt{1 + y_p'^2} + \sqrt{n^2 + S_{FP}^2} - S_{FP}y_p' \right)} \times \\ &\quad \times \left( \sqrt{n^2 + S_{FP}^2} - S_{FP}y_p' \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Множество точек  $Q$  образует начальный участок зеркала.

Первая производная функции  $y_2(x) = y_Q(x_Q)$ , описывающей поверхность начального участка зеркала, определяется формулой

$$\begin{aligned} y_Q'(x_Q) &= \frac{n \sin(\alpha_{PQ})}{1 + n \cos(\alpha_{PQ})} = \\ &= \frac{y_p'\sqrt{n^2 + S_{FP}^2} + S_{FP}}{\sqrt{1 + y_p'^2} + \sqrt{n^2 + S_{FP}^2} - S_{FP}y_p'}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для реализации непрерывности функций, описывающих форму поверхности зеркала и линзы, и их производных на стыках ( $A, D$ ) начальных участков с соседними необходимо, чтобы луч плоской волны, падающей на зеркало под углом  $\delta$  к оси  $y$ , после отражения в точке  $D$  попадал в точку  $A$ , а после преломления в точке  $A$  — в фокус  $F_1$ . Из геометрии на рис. 2 нетрудно найти координаты этого фокуса, а также фокуса  $F_2$ , учитывая, что он симметричен фокусу  $F_1$  относительно оси  $y$ :

$$\begin{aligned} x_{F_1} &= -x_0 - f \frac{nS_{AD} - y_0'\sqrt{1 - n^2S_{AD}^2}}{\sqrt{1 + y_0'^2}}; \quad x_{F_2} = -x_{F_1}; \\ y_{F_1} &= y_0 - f \frac{nS_{AD}y_0' + \sqrt{1 - n^2S_{AD}^2}}{\sqrt{1 + y_0'^2}}; \quad y_{F_2} = y_{F_1}; \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$S_{AD} = \frac{(x_D - x_A) + y_A'(y_D - y_A)}{\sqrt{((x_D - x_A) + y_A'(y_D - y_A))^2 + ((x_D - x_A)y_A' - (y_D - y_A))^2}};$$

$y_0 = y_{10}(-x_0)$ ;  $y_A' = dy_1/dx|_{x = x_A}$ , а  $f$  — расстояние от края начального участка линзы до фокуса.

Рассмотрим луч, который выходит из фокуса  $F_1$ , падает на линзу в точке  $A$ , преломляется, падает в точку  $D$ , отражается от зеркала и выходит под углом  $\delta$  к оси  $Y$ . Этот угол определяется формулой

$$\delta = \arcsin \left( \frac{n((x_D - x_A) - y_D'(y_D - y_A))}{\sqrt{((x_D - x_A) - y_D'(y_D - y_A))^2 + ((x_D - x_A)y_D' + (y_D - y_A))^2}} \right) + \arctg(y_D'), \quad (7)$$

где  $y_D' = dy_2/dx|_{x = x_D}$ .

Для определения нового участка зеркала предположим, что луч из фокуса  $F_1$  падает на начальный участок линзы в точке  $M$  с координатами  $(x_M, y_M)$ ,  $(-x_0 \leq x_M \leq x_0)$ , преломляется, падает на зеркало в точке  $N$  с координатами  $(x_N, y_N)$  и отражается под

углом  $\delta$  к оси  $y$  (рис. 3). Отсюда для угла между осью  $y$  и падающим из точки  $F_1$  в точку  $M$  лучом получаем  $\beta_M = \arctg((x_M - x_{F_1})/(y_{F_1} - y_M))$ . Угол между осью  $y$  и лучом, проходящим через линзу от точки  $M$  до точки  $N$ , определяется формулой

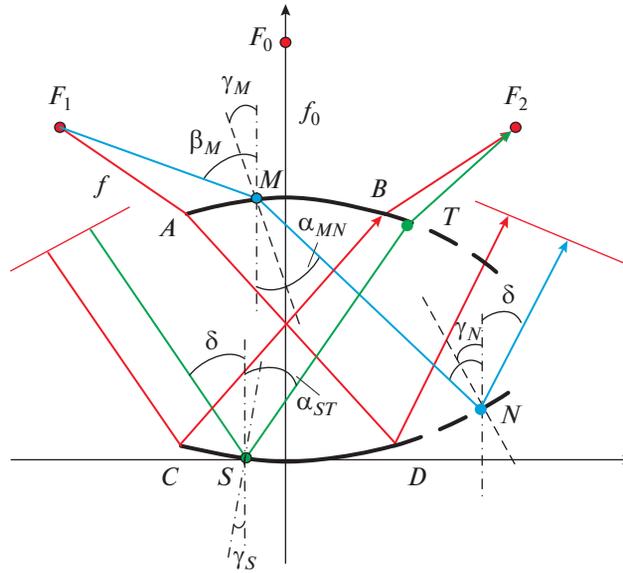


Рис. 3. К определению нового участка зеркала.

$$\alpha_{MN} = \arcsin \left( \frac{(x_M - x_{F_1}) - y'_M(y_M - y_{F_1})}{n \sqrt{((x_M - x_{F_1}) - y'_M(y_M - y_{F_1}))^2 + ((x_M - x_{F_1})y'_M + (y_M - y_{F_1}))^2}} \right) + \arctg(-y'_M), \quad (8)$$

где  $y'_M = dy_1/dx|x = x_M$ .

Из условия равенства эйконалов всех лучей, которые выходят из фокуса, после преломления линзой и отражения от зеркала, получаем уравнение

$$\sqrt{(x_M - x_{F_1})^2 + (y_M - y_{F_1})^2} + nl_{MN} - x_N \sin(\delta) - y_N \cos(\delta) = f + nl_0 - x_D \sin(\delta) - y_D \cos(\delta), \quad (9)$$

где  $l_0 = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$ ;  $l_{MN}$  – расстояние от точки  $M$  до точки  $N$ ,  $\delta$  – угол между выходящими лучами и осью  $y$ .

Решение уравнения (9) имеет вид

$$l_{MN} = \frac{f - \sqrt{(x_M - x_{F_1})^2 + (y_M - y_{F_1})^2} + nl_0 + (x_M - x_A) \sin(\delta) + (y_M - y_A) \cos(\delta)}{n - \sin(\alpha_{MN}) \sin(\delta) + \cos(\alpha_{NM}) \cos(\delta)}. \quad (10)$$

Зная длину  $l_{MN}$  и угол  $\alpha_{MN}$ , можно определить координаты точки  $N$  по формулам

$$\begin{aligned} x_N &= x_M + l_{MN} \sin(\alpha_{MN}), \\ y_N &= y_M - l_{MN} \cos(\alpha_{MN}). \end{aligned} \quad (11)$$

Множество точек  $N$  образует новый участок зеркала. При этом функции  $y_2(x)$  и ее первая производная непрерывны в точке  $D$  стыка начального участка зеркала с новым (соседним) участком.

Из законов преломления и отражения в точке  $N$  получим

$$y'_N(x_N) = \frac{n \sin(\alpha_{MN}) - \sin(\delta)}{n \cos(\alpha_{MN}) + \cos(\delta)}. \quad (12)$$

Для определения нового участка линзы рассмотрим падение плоской волны на начальный уча-

сток зеркала. Пусть один из лучей падает на зеркало в точке  $S$  с координатами  $(x_S, y_S)$  под углом  $\delta$  к оси  $y$ . Этот луч отражается от зеркала, проходит через линзу, после преломления выходит из точки  $T$  с координатами  $(x_T, y_T)$  и проходит через фокус  $F_2$  (см. рис. 2). Угол между осью  $Y$  и отрезком  $ST$  определяется формулой

$$\alpha_{ST} = \arcsin \left( \frac{w(1 + y'_D y'_S) + (y'_D - y'_S) \sqrt{1 - w^2}}{\sqrt{(y'_D - y'_S)^2 + (1 + y'_D y'_S)^2}} \right) - \arctg(y'_S), \quad (13)$$

где  $y'_S = dy/dx|x = x_S$ ;

$$W = \frac{((x_D - x_A) - y'_D(y_D - y_A))}{\sqrt{((x_D - x_A) - y'_D(y_D - y_A))^2 + ((x_D - x_A)y'_D + (y_D - y_A))^2}}$$

Из условия равенства эйконалов лучей получаем уравнение

$$d_{SC} + nl_{ST} + \sqrt{(x_S + l_{ST} \sin(\alpha_{ST}) - x_{F_2})^2 + (y_S + l_{ST} \cos(\alpha_{ST}) - y_{F_2})^2} = nl_0 + f, \tag{14}$$

где  $d_{SC} = (x_S - x_C) \sin(\delta) - (y_S - y_C) \cos(\delta)$ .

Решение уравнения (14) имеет вид

$$l_{PQ} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \tag{15}$$

где  $A = n^2 - 1$ ;  $B = (x_{F_2} - x_S) \sin(\alpha_{ST}) + (y_{F_2} - y_S) \times \cos(\alpha_{ST}) + n(d_{SC} - f - l_0)$ ;  $C = (d_{SC} - f - l_0)^2 + (x_S - x_{F_2})^2 - (y_S - y_{F_2})^2$ .

Координаты точки  $T$  нового отрезка линзы рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} x_T &= x_S + l_{ST} \sin(\alpha_{ST}), \\ y_T &= y_S + l_{ST} \cos(\alpha_{ST}). \end{aligned} \tag{16}$$

Из закона преломления находим первую производную функции, описывающую новый участок линзы:

$$y'_T(x_T) = \frac{\sin(\beta_T) - n \sin(\alpha_{ST})}{\cos(\beta_T) - n \cos(\alpha_{ST})}, \tag{17}$$

где  $\beta_T = \arctg((x_{F_2} - x_T)/(y_{F_2} - y_T))$ .

Множество точек  $T$  образует новый участок линзы. При этом функции  $y_1(x)$  и ее первая производная также непрерывны на стыке  $B$  начального участка зеркала с новым (соседним) участком.

Непрерывность функций, описывающих поверхности линзы и зеркала и их первых производных, обеспечивает непрерывность фазового распределения поля на выходе системы в приближении геометрической оптики. Для обеспечения непрерывности амплитудного распределения необходимо, чтобы вторые производные функций, описывающих поверхности линзы и зеркала в местах стыков соседних участков также были непрерывными. Для этого необходимо и достаточно удовлетворить этому условию для точек стыков с начальным участком зеркала. Непрерывность вторых производных в остальных точках поверхности линзы и зеркала обеспечивается автоматически.

Вторую производную функций  $y_Q(x_Q)$ ,  $y_N(x_N)$ , описывающих начальный и второй участок поверхности зеркала, можно получить дифференцированием (5) и (12) по  $x_p$  и  $x_M$  соответственно. При совпадении точек  $Q$  и  $D$ ,  $D$  и  $N$  заменим  $x_p$  на  $-x_0$ , а  $x_M$  на  $x_0$ . В результате, получим уравнение, решение которого обеспечивает непрерывность вторых производных функции  $y_1(x)$ :

$$\frac{\alpha'_M(qS_l - n\sqrt{q^2 + 1} - C_l)v_0^2(q^2 + 1)}{(n + C_l + \sqrt{q^2 + 1})^2(v_0^2\sqrt{q^2 + 1} + (u'_0v_0 - u_0v'_0)q + \alpha'_M)} + \frac{\alpha'_G(n + C_p)}{(n + C_p + 1)^2(1 + l'C_p + lC_p\alpha'_G)} = 0, \tag{18}$$

где

$$u'_0 = S_l - S_e - y'_0(C_l + C_e); \quad u_0 = n\sqrt{(2x_0 + lS_p)^2 + (lC_p)^2} + (2x_0 + lS_p)S_l + lC_pC_l;$$

$$v_0 = n - ((2x_0 + lS_p)S_l + lC_pC_l)/(lC_p\sqrt{q^2 + 1}); \quad v'_0 = -\alpha'_M(qC_l + S_l)/\sqrt{q^2 + 1};$$

$$\alpha'_M = \frac{y''_0}{1 + y_0'^2} + \frac{(C_e - S_e y'_0)(\beta'_M(1 + y_0'^2) + y_0'')}{(1 + y_0'^2)\sqrt{n^2(1 + y_0'^2) - (S_e + C_e y'_0)^2}};$$

$$\beta'_M = \frac{C_e - y'_0 S_e}{f(C_e^2 - S_e^2)}; \quad S_e = \frac{nS_b - y'_0\sqrt{1 - n^2 S_b^2}}{\sqrt{1 + y_0'^2}}; \quad C_e = \frac{nS_b y'_0 + \sqrt{1 - n^2 S_b^2}}{\sqrt{1 + y_0'^2}}; \quad S_b = \frac{2x_0 + l(y'_0 C_p + S_p)}{\sqrt{1 + y_0'^2}};$$

$$q = \frac{2x_0 + lS_p}{lC_p}; \quad S_l = \frac{nS_r(nC_p + 1) - nS_p\sqrt{1 - n^2 S_r^2}}{\sqrt{n^2 S_r^2 + (nC_p + 1)^2}}; \quad C_l = \frac{n^2 S_r S_p + (nC_p + 1)\sqrt{1 - n^2 S_r^2}}{\sqrt{n^2 S_r^2 + (nC_p + 1)^2}}; \quad h = \frac{nS_p}{nC_p + 1};$$

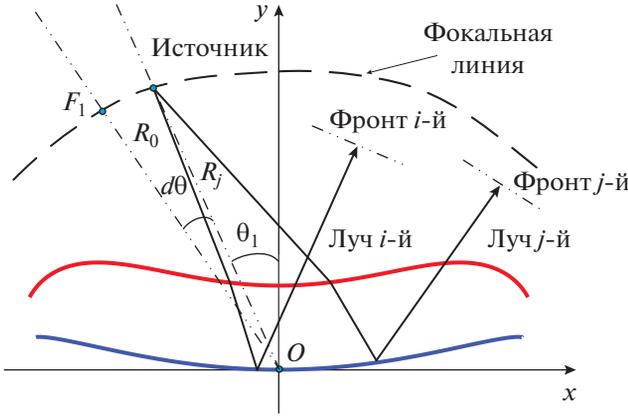


Рис. 4. Геометрия лучей в зеркально-линзовой системе.

стояние  $b$  между центральными точками на поверхности линзы и зеркала (толщина линзы), полуразмер  $x_0$  начального отрезка поверхности линзы, расстояние  $f$  от конца начального отрезка поверхности линзы до фокуса  $F_1$ , расстояние  $f_0$  от центральной точки поверхности линзы до фокуса начальной системы  $F_0$ . Будем синтезировать бифокальную систему с начальным отрезком зеркала в виде полинома второго порядка  $y_{10}(x) = ax^2 + b$ .

Подставляя  $y_0 = ax_0^2 + b$ ,  $y'_0 = 2ax_0$ ,  $y''_0 = 2a$  в уравнение (18) и решая его с использованием стандартной численной процедуры, находим параметр  $a$ . Реализуя описанный выше алгоритм синтеза новых отрезков  $m$  раз, находим форму поверхности линзы и зеркала, которые имеют непрерывные первые и вторые производные.

Задача оптимизации состоит в нахождении геометрических параметров системы, а также формы фокальной кривой, обеспечивающих минимальную средне-квадратическую абберацию (СКА) эйконала на выходе ДОС, которую будем определять по формуле

$$\sigma = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (L_i - L_0)^2}, \tag{19}$$

где  $L_i$  – эйконал луча с номером  $i$ ;  $k$  – количество учтенных лучей,  $D$  – размер апертуры системы;  $L_0$  – эйконал луча, относительно которого СКА имеет минимальное значение (далее – опорный луч).

Для вычисления СКА системы по формуле (19) необходимо найти направление фронта и величину эйконала  $L_0$  опорного луча, а также отличие эйконалов всех остальных лучей от эйконала этого луча. Если источник находится в фокусе, то углы выхода всех лучей одинаковые и определяются формулой (7). При смещении положения источника углы выхода лучей будут разные. Для каждого положения источника найдем  $k$  лучей, которые выходят из источника, преломляются линзой и отражаются от зеркала. Далее выбирая каждый из этих лучей в качестве опорного по формуле (19) найдем СКА относительно каждого из опорных лучей с соответствующим (ортогональным) фронтом (рис. 4). Выберем из полученных величин СКА минимальное значение и определим соответствующее направление излучения. Полученное приближенное значение СКА можно уточнить, меняя угол выхода опорного луча вблизи найденного значения и определяя минимум СКА.

Для определения фокальной кривой найдем геометрическое место положений источника (см. рис. 4), которые обеспечивают наименьшую величину СКА. Декартовые и полярные координаты ис-

$$S_r = \frac{q - h}{\sqrt{(q - h)^2 + (1 + qh)^2}};$$

$$l = \frac{f_0 + y_0 + nb - \sqrt{x_0^2 + (b + f_0 - y_0)^2}}{n + C_p};$$

$$l' = \frac{(y'_0 - F_p + lS_p\alpha_G)}{n + C_p}; \quad F_p = \frac{x_0 - y'_0(b + f_0 - y_0)}{\sqrt{x_0^2 + (b + f_0 - y_0)^2}};$$

$$\alpha_G = \frac{y''_0}{1 + y_0'^2} + \frac{C_x}{\sqrt{n^2 - S_x^2}} \left( \beta'_p - \frac{y''_0}{1 + y_0'^2} \right);$$

$$C_x = \frac{b + f_0 - y_0 + x_0 y'_0}{\sqrt{(x_0 - (b + f_0 - y_0)y'_0)^2 + (b + f_0 - y_0 + x_0 y'_0)^2}};$$

$$S_x = \frac{x_0 - (b + f_0 - y_0)y'_0}{\sqrt{(x_0 - (b + f_0 - y_0)y'_0)^2 + (b + f_0 - y_0 + x_0 y'_0)^2}};$$

$$C_p = \frac{\sqrt{n^2 + S_t^2} - S_t y'_0}{n\sqrt{1 + y_0'^2}}; \quad S_p = \frac{y'_0 \sqrt{n^2 + S_t^2} + S_t}{n\sqrt{1 + y_0'^2}};$$

$$S_t = \frac{x_0 - y'_0(b + f_0 - y_0)}{\sqrt{(x_0 - y'_0(b + f_0 - y_0))^2 + (x_0 y'_0 + b + f_0 - y_0)^2}};$$

$$\beta'_p = \frac{x_0 y'_0 + b + f_0 - y_0}{\sqrt{x_0^2 + (b + f_0 - y_0)^2}};$$

$y_0, y'_0, y''_0$  – значения соответственно функции  $y_1(x)$ , ее первой и второй производной в точке  $B$  с координатами  $(x_0, y_0)$ .

## 2. СИНТЕЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЗЕРКАЛЬНО-ЛИНЗОВОЙ СИСТЕМЫ

Для синтеза зеркально-линзовой бифокальной системы зададим исходные параметры: рас-

точника связаны формулами  $x_{F_j} = R_j \sin(\theta_j)$ ,  $y_{F_j} = R_j \cos(\theta_j)$ . Задача состоит в нахождении оптимальной функции  $R(\theta)$ . Для угла  $\theta_j$ , соответствующего положению фокуса, эта величина известна ( $R_0 = \sqrt{x_{F_1}^2 + y_{F_1}^2}$ ). Далее, уменьшая угол  $\theta_j$  на некоторое малое значение  $\xi$ , находим в окрестности  $R_0$  значение  $R_{j+1}(\theta_0 - \xi)$  с использованием стандартной процедуры нахождения минимума. Применяя описанный алгоритм многократно, находим значения  $R_j(\theta_j)$  для 20 точек. Далее повторяем процедуру в сторону увеличения  $\theta_j$  до необходимой величины, которая определяется углом зрения системы. Используя сплайн-интерполяцию определяем искомую функцию  $R(\theta)$ .

При решении задачи синтеза бифокальной зеркально-линзовой системы было замечено, что описанный выше алгоритм позволяет получить аналитическое решение не для всех наборов исходных параметров. Решение перестает существовать в двух случаях: в первом алгоритм перестает работать из-за того, что уравнение (18) не имеет действительного корня, а во втором – когда в процессе синтеза у зеркала появляется точка возврата (рис. 5а). В последнем случае бифокальной системы зависимость СКА от угла зрения имеет вид, соответствующий трехфокальной системе (рис. 5б).

Набор параметров, при котором алгоритм перестает работать, будем называть критическим. При увеличении числа синтезированных отрезков у зеркала всегда появляются точки возврата, которые и определяют предельный размер апертуры системы.

Будем оптимизировать систему с фиксированным углом зрения, толщиной линзы  $b = 0.102$  и коэффициентом преломления  $n = 1.5$ . Угол зрения определяется отношением  $x_0/b$ , поэтому будем фиксировать параметр  $x_0$ . В результате параметрами оптимизации являются: расстояние  $f$  от края начального участка линзы до фокуса  $F_1$  и расстояние  $f_0$  от фокуса начальной системы  $F_0$  до поверхности линзы. Проведем исследование величины СКА в зависимости от этих двух параметров.

Линии уровня величины  $10^5 \sigma$  в зависимости от величин  $f_0$  и  $f/f_0$  при фиксированных значениях  $n$  и  $b$  показаны на рис. 6а–6в для углов зрения 50, 70 и 100 град при  $x_0 = 0.0129, 0.0181$  и  $0.0265$  соответственно. Видно, что минимальная величина СКА достигается при следующих наборах параметров:  $f_0 = 0.722, f/f_0 = 0.923$  (для угла зрения 50 град),  $f_0 = 0.794, f/f_0 = 0.863$  (для угла зрения 70 град) и  $f_0 = 0.951, f/f_0 = 0.719$  (для угла зрения 100 град), ко-

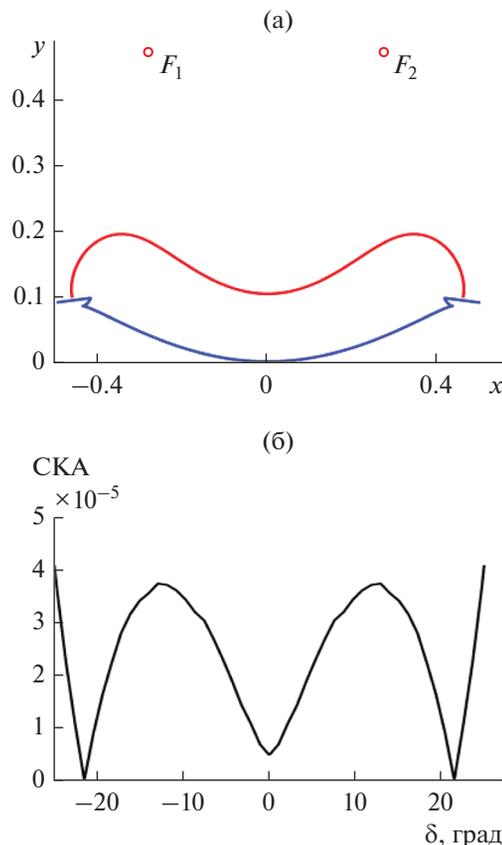


Рис. 5. Бифокальная зеркально-линзовая система с параметрами  $n = 1.5, f = 0.6201, f_0 = 0.683, x_0 = 0.01295, b = 0.1024$ : а) геометрия системы, б) зависимость СКА от угла зрения.

торые в отличие от бифокальной двухзеркальной системы [11] находятся достаточно далеко от границы области существования решения.

На рис. 7а–7в показаны зависимости СКА синтезированных систем с оптимальными параметрами от угла зрения. Как видно из рисунков, максимальная величина СКА зеркально-линзовых систем с оптимальными параметрами для углов зрения 50, 70 и 100 град составляет соответственно  $2.1 \times 10^{-5}, 5.2 \times 10^{-5}$  и  $1.3 \times 10^{-4}$ . При этом величина апертуры  $D$  бифокальных систем равна соответственно 0.707, 0.789 и 0.850.

Для анализа полученных результатов удобно считать все размеры относительно апертуры системы. Для этого достаточно умножить все размерные параметры на множитель, равный обратной величине  $D$ . В результате для систем с  $D = 1$  и углами зрения 50, 70 и 100 град величина  $f_0$  равна, соответственно, 1.02, 1.01 и 1.12, а толщина линзы  $b - 0.145, 0.130$  и  $0.120$ .

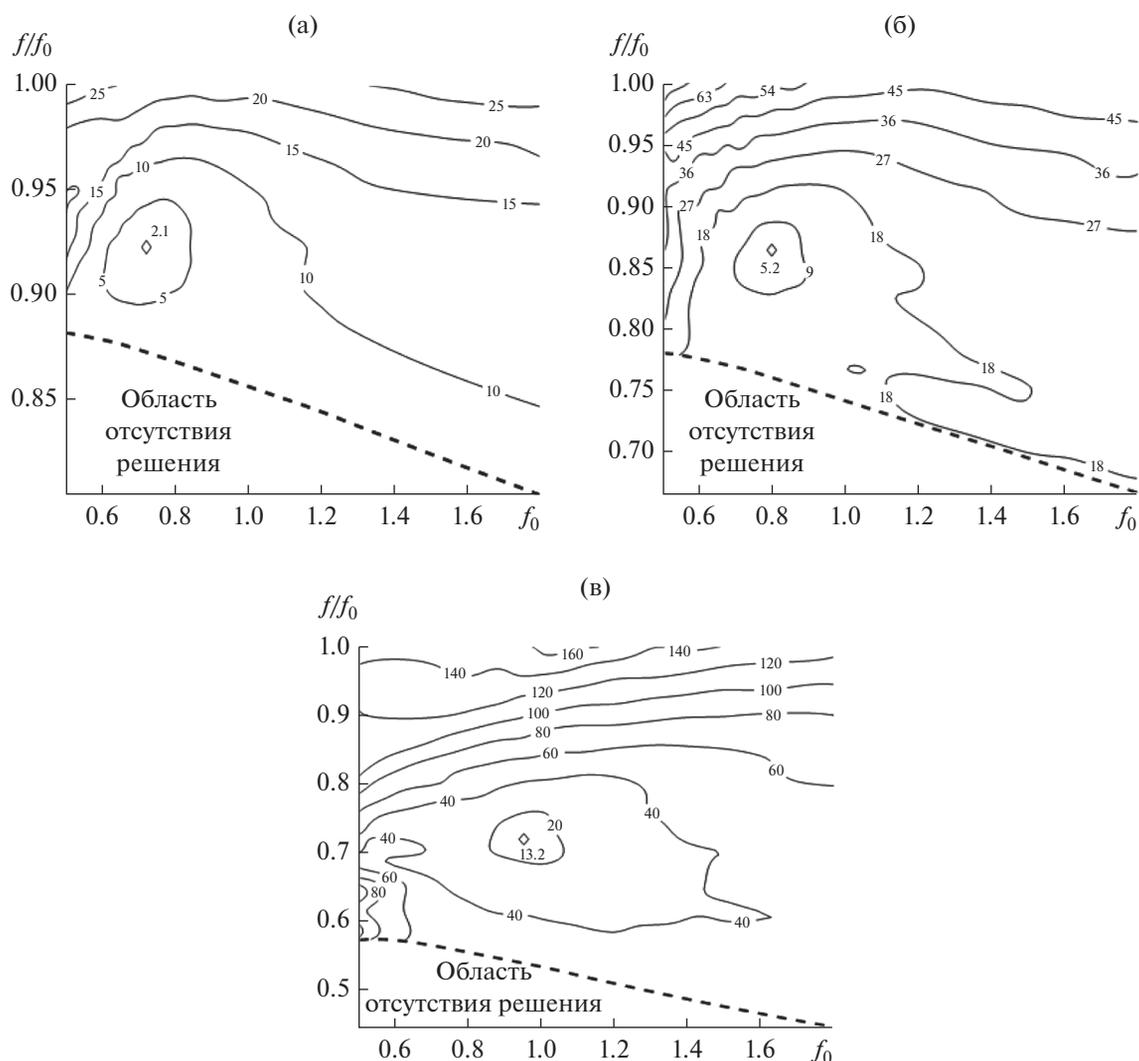


Рис. 6. Линии уровня  $10^5 \sigma$  бифокальной зеркально-линзовой системы с коэффициентом преломления  $n = 1.5$  и толщиной  $b = 0.102$  при  $x_0 = 0.0129$  (а),  $0.0181$  (б) и  $0.0265$  (в).

На рис. 8 показаны фокальные кривые синтезированных систем с оптимальными параметрами для углов зрения  $50$ ,  $70$  и  $100$  град.

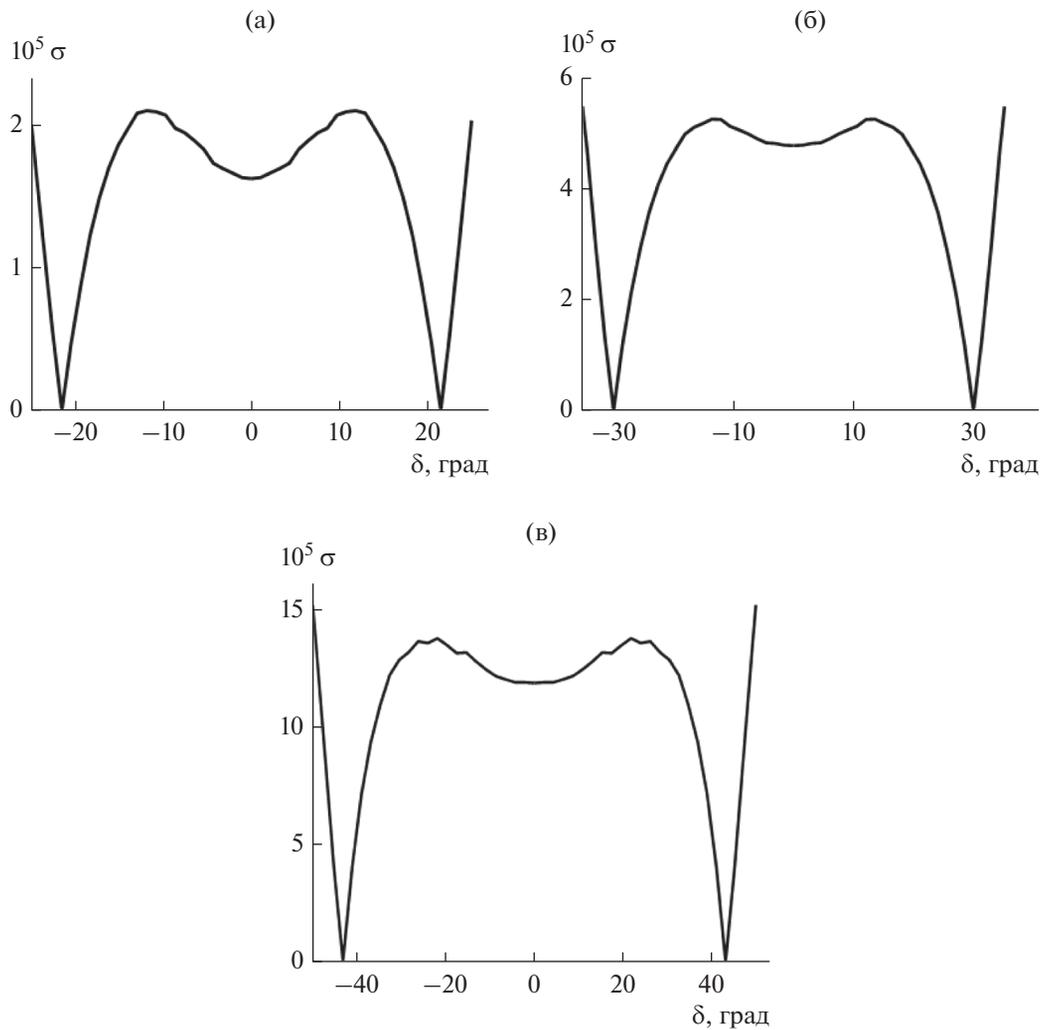
Отметим, что полученные величины СКА в два-три раза превышают соответствующие величины для двухзеркальных бифокальных систем синтезированных и оптимизированных в [11], но при этом для угла зрения  $70^\circ$  – в девять раз меньше аналогичной величины для бифокальной зеркально-линзовой системы, синтезированной в работе [5].

С увеличением угла зрения от  $50$  до  $100$  град величина СКА увеличивается в пять раз, угловой размер фокальной линии – примерно в два раза, толщина линзы уменьшается на  $17\%$ , а продольный размер системы ( $f_0 + b$ ) увеличивается на  $6\%$ .

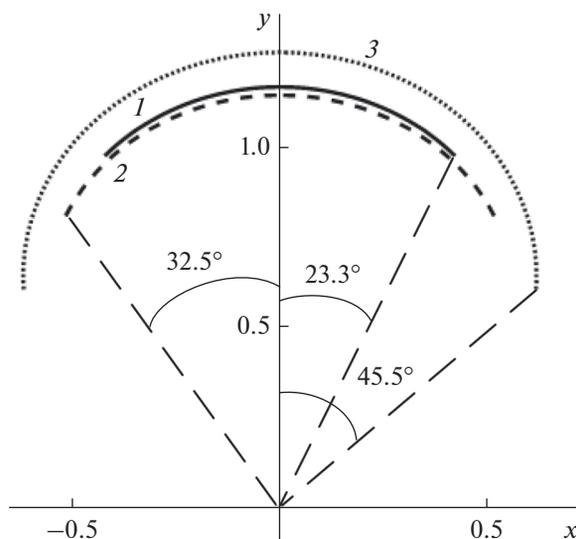
## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Развитая в работе методика позволяет синтезировать и оптимизировать бифокальные зеркально-линзовые цилиндрические системы по минимуму СКА.
2. Синтезированная и оптимизированная в работе система имеют на порядок меньшую величину СКА, чем известная бифокальная зеркально-линзовая система с аналогичным углом зрения.
3. Продольный размер бифокальных зеркально-линзовых систем с оптимальными параметрами слабо зависит от угла зрения и близок к размеру апертуры.



**Рис. 7.** Зависимость  $10^5 \sigma$  от угла зрения оптимальной бифокальной зеркально-линзовой системы с  $n = 1.5$ ,  $b = 0.1024$  и тремя наборами параметров: а)  $f = 0.666$ ,  $f_0 = 0.722$ ,  $x_0 = 0.0129$ ; б)  $f = 0.685$ ,  $f_0 = 0.794$ ,  $x_0 = 0.01812$ ; в)  $f = 0.683$ ,  $f_0 = 0.951$ ,  $x_0 = 0.0265$ .



**Рис. 8.** Фокальные кривые синтезированных систем с углами зрения 50 (1), 70 (2) и 100 град (3).

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-006.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калошин В.А.* // Тр. 13-й Междунар. Крымской конф. СВЧ техника и телекоммуникационные технологии, Crimico-2003. 8–12 сент. 2003. Севастополь: Вебер, 2003. С. 383.
2. *Ettorre M., Gandini E., Sauleau R.* // Proc. 5th Europ. Conf. on Antennas and Propagation (EUCAP). Rome. 11–15 Sept. 2011. N.Y.: IEEE, 2011. P. 2947.
3. *Tekkouk K., Ettorre M., Le Coq L., Sauleau R.* // IEEE Trans. 2016. V. AP-64. № 2. P. 504.
4. *Калошин В.А., Ле Д.Т., Фролова Е.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 8. С. 768.
5. *Калошин В.А., Ле Д.Т., Ви У.Н.* // Журн. радиоэлектроники. 2020. № 3. <http://jre.cplire.ru/jre/mar20/13/text.pdf>.
6. *Калошин В.А., Ле Д.Т.* // Журн. радиоэлектроники 2020. № 4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr20/4/text.pdf>.
7. *Калошин В.А., Нгуен К.Т.* // Журн. радиоэлектроники. 2020. № 7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul20/9/text.pdf>.
8. *Калошин В.А., Нгием Х.Д., Фролова Е.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan18/3/text.pdf>.
9. *Банков С.Е., Фролова Е.В.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 463.
10. *Калошин В.А., Фролова Е.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 12. <http://jre.cplire.ru/jre/dec15/19/text.pdf>.
11. *Калошин В.А., Ви Ут Нам* // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 140.