

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

УДК 621.396.96:551.5

**ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРОСТРАНЕНИЯ
УЛЬТРАКОРОТКИХ РАДИОВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ТРОПОСФЕРЕ
ДЛЯ ТРИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ИНДЕКСА ПРЕЛОМЛЕНИЯ.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

© 2022 г. В. А. Светличный^а, О. В. Смирнова^а, *

^а СПИИРАН – Научно-техническое Бюро Высочайших Технологий,
14-я линия Васильевского острова, 39, Санкт-Петербург, 199178 Российская Федерация

*E-mail: sov@oogis.ru

Поступила в редакцию 23.03.2021 г.

После доработки 19.07.2021 г.

Принята к публикации 07.09.2021 г.

Построено аналитическое решение задачи о поле вертикального электрического и магнитного диполя в неоднородной тропосфере над импедансной поверхностью для трилинейной модели вертикального профиля индекса преломления. Задача решена в декартовой системе координат, кривизна Земного шара учитывается в параболическом приближении. Выполнено асимптотическое исследование характеристического уравнения и показано, что корни горизонтальной ветви спектра нормальных волн существуют при любых знаках градиента индекса преломления в первых двух участках трилинейного профиля. Выявлено ограничение применимости параболического приближения для учета кривизны Земли в подобных задачах.

DOI: 10.31857/S0033849422030147

Данная работа продолжает исследование характеристик распространения УКВ-радиоволн в неоднородной по высоте тропосфере на основе метода нормальных волн и нового метода численного нахождения корней характеристического уравнения, начатое в работе [1]. В ней использована более сложная трилинейная модель вертикального профиля индекса преломления тропосферы. Ранее она была применена в работах [2–4], однако в них аналитическая часть решения граничной задачи не была доведена до расчетных формул в той форме, которая является канонической для поля в слоистой тропосфере [5], и в указанных публикациях недостаточно информации о результатах исследования спектра нормальных волн, а также особенностей формирования поля в данной задаче. Необходимость подобного исследования, на наш взгляд, обусловлена тем, что, несмотря на большое количество публикаций, посвященных изучению характеристик распространения радиоволн в неоднородной тропосфере, закономерности формирования поля в различных условиях выяснены далеко не в полной мере. Метод нормальных волн подходит для этой цели в большей степени, чем широко применяющиеся для расчета поля численные пошаговые методы решения волнового параболического уравнения [6, 7].

В работе использована декартова система координат с осью z , направленной вертикально

вверх, кривизна земного шара учитывается в параболическом приближении линейно растущей с высотой z добавкой к обычному индексу преломления $N(z)$. Соответственно, вертикальный профиль модифицированного индекса преломления тропосферы описывается выражением

$$M(z) = \begin{cases} N_1 + g_1 z, & 0 \leq z \leq h_1 \\ N_2 + g_2 z, & h_1 \leq z \leq h_2, \\ g_3 z, & z > h_2 \end{cases}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= N(0) - N(h_2) - \tilde{g}_3 h_2; \\ N_2 &= - \left[\frac{N(h_2) - N(h_1)}{h_2 - h_1} + \tilde{g}_3 \right] h_2; \\ g_1 &= \frac{N(h_1) - N(0)}{h_1} + \frac{1}{a}; \\ g_2 &= \frac{N(h_2) - N(h_1)}{h_2 - h_1} + \frac{1}{a}; \quad g_3 = \frac{1}{a} - \tilde{g}_3; \end{aligned} \quad (2)$$

a – радиус Земли, $-\tilde{g}_3$ – градиент индекса преломления тропосферы $N(z)$ в области $z > h_2$ (в модели стандартной тропосферы принимается $\tilde{g}_3 = 0.039 \times 10^{-6} \text{ м}^{-1}$). Как видно из (2), в профиль $M(z)$ введен отрицательный сдвиг на $N(h_2) + \tilde{g}_3 h_2$, удобный с точки зрения численных расчетов на

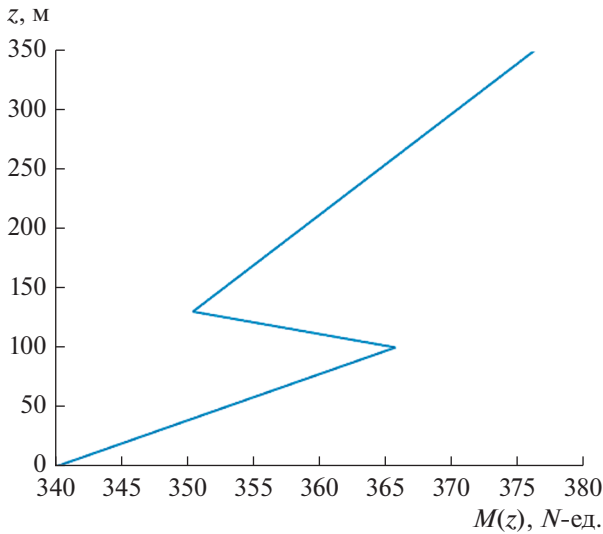


Рис. 1. Модель вертикального профиля индекса преломления $M(z)$.

ЭВМ. Сдвиг приводит к несущественной перенормировке волнового числа $k_0 = \omega/c$. Схематически трилинейный M -профиль показан на рис. 1. Задаваемыми параметрами являются значения индекса преломления на трех высотах: $N(0)$, $N(h_{1,2})$ и градиент индекса преломления $-\tilde{g}_3$ в области $z > h_2$.

В качестве источника поля выбраны точечный вертикальный электрический или магнитный диполь, расположенный на высоте z_0 , зависимость поля от времени — гармоническая $\exp(-i\omega t)$, поле описывается при помощи однокомпонентного векторного потенциала Герца $\Pi(\vec{r}, z)$, который удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Pi + k_0^2 [1 + 2M(z)] \Pi = -M_{\text{ст}0} \delta(\vec{r}) \delta(z - z_0), \quad (3)$$

где $M_{\text{ст}0}$ — комплексная амплитуда магнитного момента в случае магнитного диполя (для электрического диполя $M_{\text{ст}0}$ следует заменить на $P_{\text{ст}0}/\epsilon_0$ — комплексную амплитуду электрического дипольного момента, деленную на электрическую постоянную). На подстилающей (морской) поверхности ($z = 0$) для $\Pi(\vec{r}, z)$ задается импедансное граничное условие, а при $z \rightarrow \infty$ — условие излучения в трактовке В.А. Фока [5].

Для решения поставленной граничной задачи применим преобразование Фурье по горизонтальным координатам:

$$\tilde{\Pi}(\vec{r}, z) = \int d^2 \vec{k} \exp(i \vec{k} \vec{r}) \Pi(\vec{k}, z),$$

введем приведенную высоту $y = k_0 z / m_e$, где $m_e = \sqrt[3]{k_0 a_e / 2}$, $a_e = g_3^{-1}$, и вместо волнового числа k

используем обычную спектральную переменную $t = m_e^2 (k^2 - k_0^2) / k_0^2$ [5]. Будем считать для определенности, что источник поля находится в интервале высот $0 < z_0 < h_1$. Тогда дифференциальные уравнения для образа Фурье потенциала Герца в каждой из трех областей $0 \leq z \leq h_1$, $h_1 \leq z \leq h_2$, $z \geq h_2$ примут вид

$$\frac{d^2 \tilde{\Pi}^{(1)}(t, y, y_0)}{dy^2} - (t - y_1 - p_1^3 y) \tilde{\Pi}^{(1)}(t, y, y_0) = -\frac{M_{\text{ст}0} m_e}{4\pi^2 k_0} \delta(y - y_0); \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\Pi}^{(2)}(t, y, y_0)}{dy^2} - (t - y_2 - p_2^3 y) \tilde{\Pi}^{(2)}(t, y, y_0) = 0;$$

$$\frac{d^2 \tilde{\Pi}^{(3)}(t, y, y_0)}{dy^2} - (t - y) \tilde{\Pi}^{(3)}(t, y, y_0) = 0,$$

где $y_{1,2} = 2N_{1,2} m_e^2$, $p_{1,2} = \sqrt[3]{g_{1,2} / g_3}$. Их решения выражаются через линейные комбинации функций Эйри $w_{1,2}(\tilde{z})$ различных аргументов с произвольными коэффициентами. Подчиняя полученные решения вместе с их производными по y условиям непрерывности на границах $z = h_{1,2}$, импедансному граничному условию на морской поверхности

$$\left[\frac{d\tilde{\Pi}^{(1)}(t, y, y_0)}{dy} + q \tilde{\Pi}^{(1)}(t, y, y_0) \right]_{y=0} = 0 \quad (5)$$

($q = im_e \delta$, δ — приведенный поверхностный импеданс подстилающей поверхности) и условию излучения $\tilde{\Pi}^{(3)}(t, y, y_0) \approx w_1(t - y)$ при $y \rightarrow \infty$, определяем эти коэффициенты и приходим после ряда преобразований к выражениям для потенциала Герца в виде двукратных интегралов Фурье в указанных трех областях изменения высоты:

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}(r; y, y_0) &= \frac{iM_{\text{ст}0} m_e}{8\pi^2 k_0 p_1} \int d^2 \vec{k} \frac{\exp(i \vec{k} \vec{r})}{1 - R_1(t) R_2(t)} \times \\ &\times \left[w_1 \left(\frac{t - y_1}{p_1^2} - p_1 y_> \right) - R_2(t) w_2 \left(\frac{t - y_1}{p_1^2} - p_1 y_> \right) \right] \times \\ &\times \left[w_2 \left(\frac{t - y_1}{p_1^2} - p_1 y_< \right) - R_1(t) w_1 \left(\frac{t - y_1}{p_1^2} - p_1 y_< \right) \right], \\ &0 \leq y \leq y_{h1}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(r; y, y_0) &= \frac{M_{\text{ст}0} m_e}{4\pi^2 k_0 p_2} \int d^2 \vec{k} \frac{\exp(i \vec{k} \vec{r})}{1 - R_1(t) R_2(t)} \times \\ &\times \left[w_1 \left(\frac{t - y_2}{p_2^2} - p_2 y \right) - \tilde{R}_2(t) w_2 \left(\frac{t - y_2}{p_2^2} - p_2 y \right) \right] \times \\ &\times \left[w_2 \left(\frac{t - y_1}{p_1^2} - p_1 y_0 \right) - R_1(t) w_1 \left(\frac{t - y_1}{p_1^2} - p_1 y_0 \right) \right] \times \\ &\times \frac{F_{12}^{(2)}(t)}{Z_2(t)}, \quad y_{h1} \leq y \leq y_{h2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(3)}(r; y, y_0) = & -\frac{iM_{\text{ст}0}m_e}{2\pi^2 k_0 p_2} \times \\ & \times \int d^2\vec{k} \frac{\exp(i\vec{k}\vec{r})}{1 - R_1(t)R_2(t)} \frac{w_1(t-y)}{Z_2(t)} \times \\ & \times \left[w_2 \left(\frac{t-y_1}{p_1^2} - p_1 y_0 \right) - R_1(t) w_1 \left(\frac{t-y_1}{p_1^2} - p_1 y_0 \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$y \geq y_{h2};$

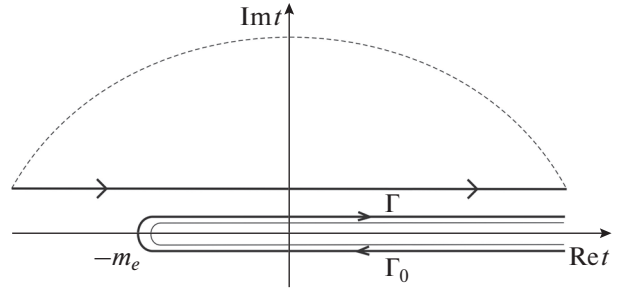


Рис. 2. Разрез, исходный Γ_0 и развернутый Γ контуры интегрирования.

где

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \frac{F_2^{(0)}(t)}{F_1^{(0)}(t)}; \\ R_2(t) &= \frac{F_{12}^{(2)}(t)F_{11}^{(1)}(t) - F_{11}^{(2)}(t)F_{21}^{(1)}(t)}{F_{12}^{(2)}(t)F_{12}^{(1)}(t) - F_{11}^{(2)}(t)F_{22}^{(1)}(t)}; \\ \tilde{R}_2(t) &= \frac{F_{11}^{(2)}(t)}{F_{12}^{(2)}(t)}; \\ Z_2(t) &= F_{12}^{(2)}(t)F_{12}^{(1)}(t) - F_{11}^{(2)}(t)F_{22}^{(1)}(t); \\ F_{nm}^{(1)}(t) &= w'_n(\tilde{t}_2)w_m(\tilde{t}_1) - \frac{p_1}{p_2}w_n(\tilde{t}_2)w'_m(\tilde{t}_1); \\ F_{nm}^{(2)}(t) &= \frac{1}{p_2}w'_n(\tilde{t}_4)w_m(\tilde{t}_3) - w_n(\tilde{t}_4)w'_m(\tilde{t}_3); \\ F_n^{(0)}(t) &= w'_n(\tilde{t}_0) - \frac{q}{p_1}w_n(\tilde{t}_0), \end{aligned} \quad (9)$$

причем $\tilde{t}_0 = \frac{t-y_1}{p_1^2}$; $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_0 - p_1 y_{h1}$; $\tilde{t}_{2,3} = \frac{t-y_2}{p_2^2} - p_2 y_{h1,2}$; $\tilde{t}_4 = t - y_{h2}$. Нижние индексы у функций в (10) принимают значения $n, m = 1, 2$, $y_>$ и $y_<$ – большая и меньшая из величин y, y_0 , а $y_0 = k_0 z_0 / m_e$, $y_{h1,2} = k_0 h_{1,2} / m_e$ – приведенные высоты расположения источника и границ слоев тропосферы.

Интегралы в (6)–(8) сводятся к однократным, поскольку те части подынтегральных функций, которые являются функциями спектральной переменной t , не зависят от угловой переменной на плоскости двумерных волновых векторов \vec{k} :

$$\begin{aligned} \Pi^{(j)}(r; y, y_0) &= \int d^2\vec{k} \exp(i\vec{k}\vec{r}) \tilde{\Pi}^{(j)}(t; y, y_0) = \\ &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} dk k H_0^{(1)}(kr) \tilde{\Pi}^{(j)}(t; y, y_0). \end{aligned} \quad (11)$$

После этого переходим к переменной интегрирования $t = m_e^2 (\kappa^2 - k_0^2) / k_0^2$. Ветвь корня в обратном преобразовании $\kappa = k_0 \sqrt{1 + t / m_e^2}$ фиксируем условием $\text{Im} \sqrt{t + m_e^2} \geq 0$, для чего на комплексной плоскости (t) проведем разрез так, как показано на рис. 2. Исходный контур интегрирования Γ_0

охватывает разрез и обходит его по часовой стрелке. Поскольку при такой фиксации ветви корня мнимая часть аргумента функции Ганкеля на всей комплексной плоскости (t) больше нуля и эта функция стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, то возникает идея “разогнуть” исходный контур в прямую $(-\infty + i0, \infty + i0)$, а затем вычислить интеграл с помощью леммы Жордана, замкнув его полуокружностью бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости. Каких-либо других точек ветвления подынтегральная функция не имеет; из физических соображений ясно, что полюсов в нижней полуплоскости (т.е. корней характеристического уравнения $1 - R_1(t)R_2(t) = 0$) не может быть (см. ниже). Однако при этом остальная часть подынтегральной функции должна обеспечить возможность указанной деформации исходного контура и замыкания его в верхней полуплоскости. Для этого было исследовано ее поведение при $t \rightarrow \infty$ как в нижней, так и верхней полуплоскости (t) с использованием асимптотических разложений для функций Эйри. Поскольку это исследование довольно громоздко, соответствующие результаты вынесены в Приложение. В итоге было установлено, что рассматриваемые части подынтегральных функций в (6)–(8) не препятствуют описанной выше деформации исходного контура интегрирования в нижней полуплоскости $\text{Im} t < 0$, так как они быстро убывают при $t \rightarrow \infty$. Иное положение имеет место в верхней полуплоскости $\text{Im} t > 0$. Здесь функции $\tilde{\Pi}^{(1,2)}(t; y, y_0)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, тогда как $\tilde{\Pi}^{(3)}(t; y, y_0)$ стремится к нулю только в секторе $0 \leq \arg t \leq \pi/3$ и растет в секторе $\pi/3 < \arg t \leq \pi$ при достаточно больших y как $t \exp[(y + y_0 - 2y_{h2})\sqrt{t}]$ (см. Приложение, формула (П.6)). Заметим, однако, что интеграл по развернутому контуру $(-\infty + i0, \infty + i0)$ сходится, в том числе на левом конце интервала интегрирования, где функции $\tilde{\Pi}^{(1,2,3)}(t; y, y_0)$ убывают как

$t^{-1/2}$. Тем не менее из-за стремления к нулю функции Ганкеля при $t \rightarrow \infty$

$$H_0^{(1)}\left(k_0 r \sqrt{1+t/m_e^2}\right) \approx \sqrt{2/\left(\pi k_0 r \sqrt{1+t/m_e^2}\right)} \exp\left[i\left(k_0 r \sqrt{1+t/m_e^2} - \pi/4\right)\right],$$

применить лемму Жордана все же можно, если $\operatorname{Re}\left[k_0(z+z_0-2h_2+ir)\sqrt{t}\right] < 0$ – тогда произведение функции Ганкеля на растущую экспоненту быстро стремится к нулю и в секторе $\pi/3 < \arg t \leq \pi$. Фактически достаточно, чтобы это неравенство выполнялось на луче $\arg t = \pi/3$, что дает $r > \sqrt{3}(z+z_0-2h_2)$. Данное условие не является сколько-нибудь существенным ограничением, поскольку в прикладных задачах обычно горизонтальные расстояния от источника до точки наблюдения гораздо больше, чем размер области расчета поля по вертикали.

Следует отметить, что выявленное ограничение возможности применения леммы Жордана характерно уже для задачи о поле источника над сферической подстилающей поверхностью в однородной тропосфере, если ее решать в рассматриваемом приближении. В конечном счете, это связано с ограниченной применимостью метода учета кривизны Земли в параболическом приближении – строго говоря, необходимо решать задачу в сферической системе координат, и лишь на последнем этапе асимптотически упрощать полученные расчетные формулы для того, чтобы легче было находить корни характеристического уравнения и получать другие численные результаты. В случае однородной тропосферы можно обосновать возможность применения леммы Жордана при решении задачи в сферической системе координат, используя асимптотики Дебая для функций Риккати–Бесселя, но при этом нужно учитывать явление Стокса. Однако возможности построения аналитического решения задачи в сферической системе координат для различных профилей $N(z)$ весьма ограничены, а в то же время рассматриваемый подход имеет широкую область применимости, позволяющую решать различные прикладные вопросы.

После вычисления интегралов по вычетам аргумент функции Ганкеля в подынтегральных выражениях упрощается:

$$kr = k_0 r \sqrt{1+t/m_e^2} \approx k_0 r \left(1+t/2m_e^2\right),$$

поскольку корни характеристического уравнения считаются удовлетворяющими условию $t/m_e^2 \ll 1$, и эта функция заменяется ее асимптотикой при

$k_0 r \gg 1$. Затем полученные выражения для потенциала Герца преобразуются к стандартной форме

$$\Pi(r; y, y_0) = \frac{M_{\text{CTO}} \exp(ik_0 r)}{4\pi r} V(x; y, y_0), \quad (12)$$

где $V(x; y, y_0)$ – функция ослабления поля, которая имеет вид

$$V(x; y, y_0) = 2\sqrt{i\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \Lambda_s \exp(it_s x) f_s(y) f_s(y_0). \quad (13)$$

Здесь t_s – корни характеристического уравнения, $x = k_0 r / 2m_e^2$ – приведенное горизонтальное расстояние от источника, $f_s(y)$ – высотные множители нормальных волн, которые описываются в различных интервалах изменения высоты такими формулами

$$\begin{aligned} f_s(y) &\equiv f_s^{(1)}\left(\frac{t_s - y_1}{p_1^2} - p_1 y\right) = \\ &= \frac{i}{2} \left[F_1^{(0)}(t_s) w_2 \left(\frac{t_s - y_1}{p_1^2} - p_1 y\right) - \right. \\ &\quad \left. - F_2^{(0)}(t_s) w_1 \left(\frac{t_s - y_1}{p_1^2} - p_1 y\right) \right], \quad 0 \leq y \leq y_{h1}; \\ f_s(y) &\equiv f_s^{(2)}\left(\frac{t_s - y_2}{p_2^2} - p_2 y\right) = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left[F_{22}^{(1)}(t_s) F_1^{(0)}(t_s) - F_{21}^{(1)}(t_s) F_2^{(0)}(t_s) \right] \times \right. \\ &\quad \times w_1 \left(\frac{t_s - y_2}{p_2^2} - p_2 y\right) - \\ &\quad \left. - \left[F_{12}^{(1)}(t_s) F_1^{(0)}(t_s) - F_{11}^{(1)}(t_s) F_2^{(0)}(t_s) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times w_2 \left(\frac{t_s - y_2}{p_2^2} - p_2 y\right) \right\}, \quad y_{h1} \leq y \leq y_{h2}; \\ f_s(y) &\equiv f_s^{(3)}(t_s - y) = \\ &= 2i \frac{p_1 F_2^{(0)}(t_s) w_1(t_s - y)}{p_2 F_{12}^{(2)}(t_s) F_{12}^{(1)}(t_s) - F_{11}^{(2)}(t_s) F_{22}^{(1)}(t_s)}, \quad y \geq y_{h2}, \end{aligned} \quad (14)$$

Λ_s – коэффициенты возбуждения нормальных волн,

$$\begin{aligned} \Lambda_s^{-1} &= \frac{1}{p_1} \left(\frac{t_s - y_1}{p_1^2} - \frac{q^2}{p_1^2} \right) + \left(\frac{t_s - y_2}{p_2^3} - \frac{t_s - y_1}{p_1^3} \right) \times \\ &\times \left[f_s^{(2)} \left(\frac{t_s - y_2}{p_2^2} - p_2 y_{h1} \right) \right]^2 + p_1^2 \left(\frac{1}{p_1^3} - \frac{1}{p_2^3} \right) \times \\ &\times \left[f_s^{(2)} \left(\frac{t_s - y_2}{p_2^2} - p_2 y_{h1} \right) \right]^2 + \left(t_s - \frac{t_s - y_2}{p_2^3} \right) \times \\ &\times \left[f_s^{(3)}(t_s - y_{h2}) \right]^2 + \left(\frac{1}{p_3} - 1 \right) \left[f_s^{(3)}(t_s - y_{h2}) \right]^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Штрихи у высотных множителей в (15) означают производную по полным аргументам тех функций Эйри в них, которые зависят от переменной высоты y . Попутно отметим, что высотные множители непрерывны вместе с первой производной по переменной y при переходе через границы слоев $y = y_{h1,2}$.

Вид представления (13) функции ослабления в данной задаче полностью соответствует общей записи этой функции для поля в слоистой среде в работе В.А. Фока [5]. Более того, оказалось, что выражение (15) для коэффициентов возбуждения нормальных волн, которое сначала было получено в данной работе в результате описанного хода решения задачи и преобразований полученных выражений, может быть выведено гораздо проще с помощью формулы, которая следует из [5, с. 305, формула (6.27)]:

$$\Lambda_s^{-1} = \int_0^{\infty \exp(i\pi/3)} f_s^2(y) dy, \quad (16)$$

причем интеграл в (16) легко вычисляется, поскольку

$$\int_a^b W^2(\tilde{y}) d\tilde{y} = \left\{ \tilde{y} W^2(\tilde{y}) - \left[\frac{dW(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right]^2 \right\}_a^b, \quad (17)$$

где $W(\tilde{y})$ – любое решение однородного уравнения Эйри, каковыми и являются высотные множители (14). Приведение функции ослабления к стандартной форме (13) имеет еще и тот смысл, что при этом достаточно рассмотреть случай, когда источник поля расположен в области высот $0 < z < h_1$, и нет необходимости заново решать задачу для случаев, когда он расположен в других областях, поскольку в силу известной теоремы взаимности $V(x; y, y_0) = V(x; y_0, y)$.

Характеристическое уравнение $1 - R_1(t)R_2(t) = 0$ данной задачи, которое служит для нахождения комплексных постоянных распространения нормальных волн (спектра), целесообразно записать в следующем виде:

$$D(t) \equiv F_{12}^{(2)}(t) \left[F_{12}^{(1)}(t) F_1^{(0)}(t) - F_{11}^{(1)}(t) F_2^{(0)}(t) \right] - F_{11}^{(2)}(t) \left[F_{22}^{(1)}(t) F_1^{(0)}(t) - F_{21}^{(1)}(t) F_2^{(0)}(t) \right] = 0. \quad (18)$$

Нетрудно убедиться, что при $N(z) \equiv 0$ полученное решение переходит в известную формулу [5] для функции ослабления поля над сферической Землей в случае однородной среды (вакуума). Действительно, при этом параметры в выражениях (14)–(15) равны: $y_{1,2} = 0$, $g_{1,2,3} = 1/a$, $p_{1,2} = 1$, $\tilde{t}_0 = t$, $\tilde{t}_{1,2} = t - y_{h1}$, $\tilde{t}_{3,4} = t - y_{h2}$, соответственно, находим

$$F_{nn}^{(1,2)}(t) = 0, \quad F_{12}^{(1,2)}(t) = -F_{21}^{(1,2)}(t) = -2i;$$

$$F_{1,2}^{(0)}(t) = w_{1,2}'(t) - q w_{1,2}(t);$$

$$R_2(t) = 0, \quad \tilde{R}_2(t) = 0,$$

поэтому во всех трех областях высотные множители равны $f_s(y) = w_1(t_s - y)/w_1(t_s)$ и $\Lambda_s = 1/(t_s - q^2)$, а характеристическое уравнение приобретает вид $F_1^{(0)}(t) = 0$.

В Приложении выводятся асимптотические формулы для подынтегральных функций $\tilde{\Pi}^{(j)}(t; y, y_0)$ и выполняется асимптотический анализ корней характеристического уравнения задачи при $|t| \gg 1$.

Вторая часть работы будет посвящена численному исследованию спектра нормальных волн в данной задаче, а также особенностей формирования поля в зависимости от длины радиоволны, высоты расположения источника и параметров тропосферы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Исследуем поведение подынтегральных функций $\tilde{\Pi}^{(j)}(t; y, y_0)$, $j = 1, 2, 3$ в формулах (6)–(8) при $t \rightarrow \infty$ на комплексной плоскости (t), используя асимптотические разложения для функций Эйри $w_{1,2}(t)$ и их производных. В верхней полуплоскости они получаются на основе формул из [8] для функций $Ai(t)$, $Bi(t)$, учитывающих явление Стокса:

$$\begin{aligned} w_1(t) &\approx \frac{1}{\sqrt[4]{t}} \begin{cases} \exp\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right) \left(1 + \frac{5}{48t^{3/2}}\right) + i \exp\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}\right) \left(1 - \frac{5}{48t^{3/2}}\right), & 0 \leq \arg t \leq \frac{2\pi}{3}; \\ i \exp\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}\right) \left(1 - \frac{5}{48t^{3/2}}\right), & \frac{2\pi}{3} < \arg t \leq \pi; \end{cases} \\ w_1'(t) &\approx \sqrt[4]{t} \begin{cases} \exp\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right) \left(1 - \frac{7}{48t^{3/2}}\right) - i \exp\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}\right) \left(1 + \frac{7}{48t^{3/2}}\right), & 0 \leq \arg t \leq \frac{2\pi}{3}; \\ i \exp\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}\right) \left(1 + \frac{7}{48t^{3/2}}\right), & \frac{2\pi}{3} < \arg t \leq \pi; \end{cases} \\ w_2(t) &= \frac{1}{\sqrt[4]{t}} \exp\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right) \left(1 + \frac{5}{48t^{3/2}}\right), \quad 0 \leq \arg t \leq \pi; \\ w_2'(t) &\approx \sqrt[4]{t} \exp\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right) \left(1 - \frac{7}{48t^{3/2}}\right), \quad 0 \leq \arg t \leq \pi. \end{aligned} \quad (П.1)$$

Оказалось, что в данной задаче необходимо учитывать малые поправки порядка $t^{-3/2}$ в множителях после экспонент, которые были найдены с помощью асимптотических разложений для функций Эйри, приведенных в [5, 10]. Учитывая тождество $[w_1(t)]^* = w_2(t^*)$ [9], получаем из (П.1) асимптотики функций Эйри и их производных в нижней полуплоскости $\text{Im } t < 0$ (формулы получаются из (П.1) взаимной заменой индексов функций Эйри 1 и 2, i на $-i$ в соответствующих “зеркальных” относительно вещественной оси секторах). Аргументы функций Эйри изменяются в интервале $[-\pi, \pi]$, разрыв асимптотик имеет место на линиях анти-Стокса $\arg t = 0, 2\pi/3$ для $w_1(t)$, $\arg t = 0, -2\pi/3$ для $w_2(t)$.

С помощью формул (П.1) последовательно выводятся асимптотики функций (10) и коэффициентов отражения (9) в различных секторах, а затем и асимптотики подынтегральных функций в (6)–(8). При этом необходимо сохранять в экспонентах асимптотик функций Эйри не только главные члены порядка $t^{3/2}$, но и следующие за ними слагаемые порядка \sqrt{t} , но, как показал анализ, не всегда необходимо учитывать малые поправки в множителях при экспонентах. После выполнения подготовительных мероприятий получают асимптотические выражения для подынтегральных функций в (6)–(8) в верхней полуплоскости $\text{Im } t > 0$. Для первой из них имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(1)}(t; y, y_0) = & i \frac{|p_1|}{\sqrt{t}} \left\{ \sum_{\mp} \left[\exp(\text{sign } p_1 (y_{>} \mp y_{<}) \sqrt{t}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + i \frac{X_1}{X_3} \exp(\text{sign } p_1 (2y_{hl} - y_{>} \mp y_{<}) \sqrt{t}) \right] \right\} \times \\ & \times \left[1 - i \frac{X_1}{X_3} \exp(2\text{sign } p_1 y_{hl} \sqrt{t}) \right]^{-1}, \quad \frac{2\pi}{3} < \arg t \leq \pi. \\ \tilde{\Pi}^{(1)}(t; y, y_0) = & i (|p_1|/\sqrt{t}) \left\{ \exp(-2/3 t^{3/2} + y_{h2} \sqrt{t}) \times \right. \\ & \times \left[iX_3 \exp(-\text{sign } p_1 (y_{hl} - y_{>}) \sqrt{t}) - \right. \\ & \left. - X_1 \exp(\text{sign } p_1 (y_{hl} - y_{>}) \sqrt{t}) \right] + \\ & \left. + \exp(2/3 t^{3/2} - y_{h2} \sqrt{t}) \times \right. \\ & \times \left[iX_4 \exp(-\text{sign } p_1 (y_{hl} - y_{>}) \sqrt{t}) - \right. \\ & \left. - X_2 \exp(\text{sign } p_1 (y_{hl} - y_{>}) \sqrt{t}) \right\} \times \\ & \times \left[\sum_{\pm} \exp(\pm \text{sign } p_1 y_{<} \sqrt{t}) \right] \times \\ & \times \left\{ \exp(-2/3 t^{3/2} + y_{h2} \sqrt{t}) \times \right. \\ & \times \left[iX_3 \exp(-\text{sign } p_1 y_{hl} \sqrt{t}) + \right. \\ & \left. \left. + X_1 \exp(\text{sign } p_1 y_{hl} \sqrt{t}) \right] \times \right. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned} & + \exp(2/3 t^{3/2} - y_{h2} \sqrt{t}) \left[iX_4 \exp(-\text{sign } p_1 y_{hl} \sqrt{t}) + \right. \\ & \left. + X_2 \exp(\text{sign } p_1 y_{hl} \sqrt{t}) \right] \Big\}^{-1}, \quad 0 \leq \arg t \leq 2\pi/3. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} X_1 &= S_{12}^{(2)} S_{11}^{(1)} \exp(-\alpha_2) - S_{11}^{(2)} S_{21}^{(1)} \exp(\alpha_2); \\ X_2 &= S_{22}^{(2)} S_{11}^{(1)} \exp(-\alpha_2) - S_{21}^{(2)} S_{21}^{(1)} \exp(\alpha_2); \\ X_3 &= S_{12}^{(2)} S_{12}^{(1)} \exp(-\alpha_2) - S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \exp(\alpha_2); \\ X_4 &= S_{22}^{(2)} S_{12}^{(1)} \exp(-\alpha_2) - S_{21}^{(2)} S_{22}^{(1)} \exp(\alpha_2); \\ \alpha_1 &= \text{sign } p_1 y_{hl} \sqrt{t}; \\ \alpha_2 &= \text{sign } p_2 (y_{h2} - y_{hl}) \sqrt{t}; \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

$$\begin{aligned} S_{11}^{(1)} &= \begin{cases} (|p_2|^3 - |p_1|^3)/8t^{3/2}, & p_1/p_2 > 0; \\ 1, & p_1/p_2 < 0 \end{cases}; \\ S_{12}^{(1)} &= -i \begin{cases} 1, & p_1/p_2 > 0 \\ (|p_1|^3 + |p_2|^3)/8t^{3/2}, & p_1/p_2 < 0 \end{cases}; \\ S_{21}^{(1)} &= i \begin{cases} 1, & p_1/p_2 > 0 \\ -(|p_1|^3 + |p_2|^3)/8t^{3/2}, & p_1/p_2 < 0 \end{cases}; \\ S_{22}^{(1)} &= \begin{cases} (|p_1|^3 - |p_2|^3)/8t^{3/2}, & p_1/p_2 > 0; \\ 1, & p_1/p_2 < 0 \end{cases}; \\ S_{11}^{(2)} &= \begin{cases} (|p_2|^3 - 1)/8t^{3/2}, & p_2 > 0; \\ 1, & p_2 < 0 \end{cases}; \\ S_{12}^{(2)} &= -i \begin{cases} -1, & p_2 > 0 \\ (|p_2|^3 + 1)/8t^{3/2}, & p_2 < 0 \end{cases}; \\ S_{21}^{(2)} &= i \begin{cases} -1, & p_2 > 0 \\ -(|p_2|^3 + 1)/8t^{3/2}, & p_2 < 0 \end{cases}; \\ S_{22}^{(2)} &= \begin{cases} -(|p_2|^3 - 1)/8t^{3/2}, & p_2 > 0 \\ 1, & p_2 < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Далее находим асимптотику подынтегральной функции в (7):

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(2)}(t; y, y_0) = & \frac{|p_2|}{\sqrt{t}} \frac{S_{12}^{(2)}}{X_3} \left\{ \exp[-\text{sign } p_2 (y_{h2} - y) \sqrt{t}] + \right. \\ & \left. + i \frac{S_{11}^{(2)}(p_2)}{S_{12}^{(2)}(p_2)} \exp[\text{sign } p_2 (y_{h2} - y) \sqrt{t}] \right\} \times \\ & \times \left[\sum_{\pm} \exp(\text{sign } p_1 (y_{hl} \pm y_0) \sqrt{t}) \right] \times \\ & \times \left[1 - i \frac{X_1}{X_3} \exp(2\text{sign } p_1 y_{hl} \sqrt{t}) \right]^{-1}, \\ & 2\pi/3 < \arg t \leq \pi; \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(2)}(t; y, y_0) = & i \frac{|p_2|}{\sqrt{t}} \left\{ \exp[-\text{sign } p_2 (y_{h2} - y) \sqrt{t}] + \right. \\ & \left. + i \bar{T}_+ \exp[\text{sign } p_2 (y_{h2} - y) \sqrt{t}] \right\} \times \\ & \times \left[\sum_{\pm} \exp(\pm \text{sign } p_1 y_0 \sqrt{t}) \right] \left[\exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2} + y_{h2} \sqrt{t}\right) S_{12}^{(2)} + \right. \\ & \left. + \exp\left(\frac{2}{3} t^{3/2} - y_{h2} \sqrt{t}\right) S_{22}^{(2)}(p_2) \right] \left\{ \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2} + y_{h2} \sqrt{t}\right) \times \right. \\ & \times (iX_3 \exp(-\alpha_1) + X_1 \exp(\alpha_1)) + \exp\left(\frac{2}{3} t^{3/2} - y_{h2} \sqrt{t}\right) \times \\ & \left. \times (iX_4 \exp(-\alpha_1) + X_2 \exp(\alpha_1)) \right\}^{-1}, \quad 0 \leq \arg t \leq 2\pi/3, \end{aligned}$$

где

$$\bar{T}_+ = \frac{S_{21}^{(2)} \exp\left(\frac{2}{3} t^{3/2} - y_{h2} \sqrt{t}\right) + S_{11}^{(2)} \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2} + y_{h2} \sqrt{t}\right)}{S_{22}^{(2)} \exp\left(\frac{2}{3} t^{3/2} - y_{h2} \sqrt{t}\right) + S_{12}^{(2)} \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2} + y_{h2} \sqrt{t}\right)}.$$

Наконец, приведем асимптотику подынтегральной функции в (8):

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(3)}(t; y, y_0) = & -\frac{|p_2|}{2X_3 \sqrt{t}} \exp[(y - y_{h2}) \sqrt{t}] \times \\ & \times \left\{ \sum_{\mp} \exp[\text{sign } p_1 (y_{h1} \mp y_0) \sqrt{t}] \right\} \times \quad (\text{П.6}) \\ & \times \left[1 - i X_1 / X_3 \exp(2 \text{sign } p_1 y_{h1} \sqrt{t}) \right]^{-1}, \\ & 2\pi/3 < \arg t \leq \pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(3)}(t; y, y_0) = & -\frac{|p_2|}{2\sqrt{t}} \sum_{\mp} \left\{ \exp\left[\frac{2}{3} t^{3/2} - (y \mp \text{sign } p_1 y_0) \sqrt{t}\right] + \right. \\ & \left. + i \exp\left[-\frac{2}{3} t^{3/2} + (y \mp \text{sign } p_1 y_0) \sqrt{t}\right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2} + y_{h2} \sqrt{t}\right) (iX_3 \exp(-\alpha_1) + X_1 \exp(\alpha_1)) + \right. \\ & \left. + \exp\left(\frac{2}{3} t^{3/2} - y_{h2} \sqrt{t}\right) (iX_4 \exp(-\alpha_1) + X_2 \exp(\alpha_1)) \right\}^{-1}, \\ & 0 < \arg t \leq 2\pi/3. \end{aligned}$$

Асимптотические разложения подынтегральных функций в (6)–(8) в нижней полуплоскости $\text{Im } t < 0$ проще и получаются тем же способом, что и в верхней, причем результаты имеют одинаковый вид во всей полуплоскости, хотя выкладки приходится выполнять отдельно для секторов $0 \geq \arg t \geq -2\pi/3$ и $-2\pi/3 > \arg t \geq -\pi$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(1)}(t; y, y_0) \approx & -i \frac{|p_1|}{\sqrt{t}} \sum_{\mp} \left\{ \exp[-\text{sign } p_1 (y_{>} \mp y_{<})] + \right. \\ & \left. + iT \exp[-\text{sign } p_1 (2y_{h1} - y_{>} \mp y_{<}) \sqrt{t}] \right\} \times \quad (\text{П.7}) \\ & \times \left[1 - iT \exp(-2 \text{sign } p_1 y_{h1} \sqrt{t}) \right]^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(2)}(t; y, y_0) \approx & -\frac{|p_2|}{\sqrt{t}} \left\{ \exp[\text{sign } p_2 (y_{h2} - y) \sqrt{t}] + \right. \\ & \left. + i \frac{\tilde{S}_{11}^{(2)}}{\tilde{S}_{12}^{(2)}} \exp[-\text{sign } p_2 (y_{h2} - y) \sqrt{t}] \right\} \times \quad (\text{П.8}) \\ & \times \left\{ \sum_{\mp} \exp[-\text{sign } p_1 (y_{h1} \mp y_0) \sqrt{t}] \right\} \times \\ & \times \frac{\tilde{S}_{12}^{(2)}}{\tilde{X}_3} \left[1 - iT \exp(-2 \text{sign } p_1 y_{h1} \sqrt{t}) \right]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(3)}(t; y, y_0) \approx & \left(\frac{|p_2|}{2\sqrt{t}} \right) \exp[-(y - y_{h2}) \sqrt{t}] \times \\ & \times \left\{ \sum_{\mp} \exp[-\text{sign } p_1 (y_{h1} \mp y_0) \sqrt{t}] \right\} \times \quad (\text{П.9}) \\ & \times (1/\tilde{X}_3) \left[1 - iT \exp(-2 \text{sign } p_1 y_{h1} \sqrt{t}) \right]^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$T = \frac{\tilde{S}_{12}^{(2)} \tilde{S}_{11}^{(1)} \exp(\alpha_2) - \tilde{S}_{11}^{(2)} \tilde{S}_{21}^{(1)} \exp(-\alpha_2)}{\tilde{S}_{12}^{(2)} \tilde{S}_{12}^{(1)} \exp(\alpha_2) - \tilde{S}_{11}^{(2)} \tilde{S}_{22}^{(1)} \exp(-\alpha_2)} \equiv \frac{\tilde{X}_1}{\tilde{X}_3},$$

а параметры $\tilde{S}_{ij}^{(1,2)}$, являющиеся функциями аргумента \sqrt{t} , получаются из формул (П.4) по правилу: $\tilde{S}_{ij}^{(1,2)}(\sqrt{t}) = S_{ij}^{(1,2)}(-\sqrt{t})$. Таким образом, асимптотики всех функций $\tilde{\Pi}^{(j)}(t; y, y_0)$, $j = 1, 2, 3$ непрерывны при переходе через полюсь $t > 0$. Они остаются непрерывными и при переходе через полюсь $t < 0$. Чтобы убедиться в этом, нужно, обратившись, например, к формулам (П.2) и (П.8), учесть, что при подходе к вещественной оси из нижней (верхней) полуплоскости следует полагать $\sqrt{t} = \mp i \sqrt{|t|}$, и принять во внимание соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ij}^{(1,2)}(\sqrt{t}) = S_{ij}^{(1,2)}(-\sqrt{t}); \quad \tilde{S}_{11}^{(1,2)}(\sqrt{t}) = S_{22}^{(1,2)}(\sqrt{t}); \\ \tilde{S}_{12}^{(1,2)}(\sqrt{t}) = -S_{21}^{(1,2)}(\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Анализ всех приведенных формул показывает, что функции $\tilde{\Pi}^{(1,2)}(t; y, y_0)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ на всей комплексной плоскости. В то же время функция $\tilde{\Pi}^{(3)}(t; y, y_0)$ стремится к нулю только в нижней полуплоскости и в секторе $0 < \arg t < \pi/3$ верхней полуплоскости, тогда как в секторе $\pi/3 < \arg t < \pi$, где асимптотика этой функции описывается формулой (П.6), при достаточно больших значениях приведенной высоты y точки наблюдения оба слагаемых в ней неограниченно возрастают, если $t \rightarrow \infty$.

Теперь выполним асимптотический анализ корней характеристического уравнения. В секторе $2\pi/3 + \varepsilon < \arg t \leq \pi$ асимптотическое представ-

ление уравнения (18) получается, если записать условие обращения в нуль знаменателя в формулах (П.2), (П.5) и (П.6):

$$S_{12}^{(2)} S_{12}^{(1)} \exp(-\alpha_1 - \alpha_2) - S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \exp(-\alpha_1 + \alpha_2) - i \left[S_{12}^{(2)} S_{11}^{(1)} \exp(\alpha_1 - \alpha_2) - S_{11}^{(2)} S_{21}^{(1)} \exp(\alpha_1 + \alpha_2) \right] = 0.$$

При этом считается, что $|t|$ велико, но, конечно, поэтому формулы для величин $X_{1,3}$ не упрощаются. Перебирая все возможные знаки параметров $p_{1,2}$, убеждаемся, что это уравнение фактически не зависит от них:

$$K_2 \exp(y_{h2} \sqrt{t}) - \exp(-y_{h2} \sqrt{t}) + K_1 \left\{ K_2 \exp[(y_{h2} - 2y_{h1}) \sqrt{t}] + \exp[-(y_{h2} - 2y_{h1}) \sqrt{t}] \right\} = 0,$$

где $K_1 = (p_1^3 - p_2^3)/(8t^{3/2})$, $K_2 = (p_2^3 - 1)/(8t^{3/2})$. Его удобнее записать иначе:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(y_{h2} \sqrt{t} + \ln \sqrt{K_2}) = \\ = -K_1 \operatorname{ch}[(y_{h2} - 2y_{h1}) \sqrt{t} + \ln \sqrt{K_2}]. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

В таком виде это трансцендентное уравнение решается методом последовательных приближений. Так как $|t| \gg 1$, $|K_1| \ll 1$, то, предполагая, что правая часть (П.10) мала, в первом приближении имеем $\operatorname{sh}(y_{h2} \sqrt{t} + \ln \sqrt{K_2}) \approx 0$, откуда находим

$$\begin{aligned} y_{h2} \sqrt{t} + \ln \sqrt{(p_2^3 - 1)/(8t^{3/2})} = i\pi s; \\ \sqrt{t_s^{(0)}} = i\pi s / y_{h2}; \\ \sqrt{t_s^{(1)}} = \frac{1}{y_{h2}} \left\{ i\pi \left(s + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{8\pi^3 s^3}{(1 - p_2^3) y_{h2}^3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Поскольку $\operatorname{Im} \sqrt{t} > 0$, то целое $s > 0$ (и велико). Теперь необходимо убедиться, что ненулевая правая часть уравнения (П.10) дает лишь малую поправку к найденному первому приближению. Для этого вычисляем ее при $t = t_s^{(1)}$ и получаем уравнение

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(y_{h2} \sqrt{t} + \ln \sqrt{K_2}) \approx \frac{p_1^3 - p_2^3}{2(1 - p_2^3)} \times \\ \times \left[\frac{(1 - p_2^3) y_{h2}^3}{8i\pi^3 s^3} \right]^{1 - y_{h1}/y_{h2}} \exp \left[-i\pi s \left(1 - 2 \frac{y_{h1}}{y_{h2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Так как правая часть (П.12) действительно оказалась малой, то следующее приближение для решения уравнения (П.10) легко находится:

$$\begin{aligned} \sqrt{t_s^{(2)}} = \frac{1}{y_{h2}} \left\{ i\pi s + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{8i\pi^3 s^3}{(1 - p_2^3) y_{h2}^3} \right] + \right. \\ \left. + (-1)^s \frac{p_1^3 - p_2^3}{2(1 - p_2^3)} \left[\frac{(1 - p_2^3) y_{h2}^3}{8i\pi^3 s^3} \right]^{1 - \frac{y_{h1}}{y_{h2}}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-i\pi s \left(1 - 2 \frac{y_{h1}}{y_{h2}} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что при $s \gg 1$ поправка к первому приближению мала по сравнению с логарифмическим членом. Значит, достаточным является уже первое приближение (П.11). Видно, что $\operatorname{Re} \sqrt{t_s^{(1)}} > 0$, $\operatorname{Re} \sqrt{t_s^{(1)}} \ll \operatorname{Im} \sqrt{t_s^{(1)}}$, т.е. найденные корни попадают в сектор $2\pi/3 + \varepsilon < \arg t \leq \pi$. Они описывают нормальные волны горизонтальной ветви спектра в данной задаче с большими номерами s .

Можно убедиться, что асимптотика характеристического уравнения (18) в секторе $0 \leq \arg t < \pi/3 - \varepsilon$ и во всей нижней полуплоскости $\operatorname{Im} t < 0$ (см. формулы (П.7)–(П.9)) имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(y_{h2} \sqrt{t} - \ln \sqrt{K_2}) = \\ = -K_1 \operatorname{sh}[(y_{h2} - 2y_{h1}) \sqrt{t} - \ln \sqrt{K_2}]. \end{aligned}$$

Решая его тем же методом, что и (П.10), в первом приближении получаем

$$\sqrt{t_s^{(1)}} = \frac{1}{y_{h2}} \left\{ i\pi \left(s + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{8\pi^3 s^3}{(1 - p_2^3) y_{h2}^3} \right] \right\}. \quad (\text{П.13})$$

Поправка следующего порядка малости мала по сравнению с логарифмом. Для сектора $0 \leq \arg t < \pi/3 - \varepsilon$ в (П.13) следует считать $s > 0$, тогда как для нижней полуплоскости $s < 0$. В обоих случаях корни (П.13) не принадлежат той области изменения $\arg t$, к которой относится рассматриваемая асимптотика характеристического уравнения: так, $\arg t_s < -\pi$ при $s < 0$. Это подтверждает высказанное выше предположение об отсутствии корней характеристического уравнения (18) в нижней полуплоскости $0 > \arg t > -\pi$.

Наконец, рассмотрим асимптотику уравнения (18) в узком секторе $|\arg t - \pi/3| < \varepsilon$. Она найдется из условия обращения в нуль знаменателя соответствующих формул в (П.2), (П.5), (П.6):

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{2}{3} t^{3/2} + y_{h2} \sqrt{t} \right) (iX_3 e^{-\alpha_1} + X_1 e^{-\alpha_1}) + \\ + \exp \left(\frac{2}{3} t^{3/2} - y_{h2} \sqrt{t} \right) (iX_4 e^{-\alpha_1} + X_2 e^{-\alpha_1}) = 0. \end{aligned}$$

В случае горизонтальной поляризации поля параметр q , входящий в коэффициент отражения

$R_1(t)$ от морской поверхности, имеет большую величину, поэтому учтем в асимптотике параметр

$R_1(t) = (\sqrt{t - y_1} - q) / (\sqrt{t - y_1} + q)$ и перепишем полученное уравнение в такой форме:

$$\exp\left[\frac{4}{3}(t - y_{h2})^{3/2}\right] = \frac{(\exp(-\beta_2) - K_1 K_2 \exp(\beta_2)) \exp(-\beta_1) - (R_1^{(0)})^\sigma (K_1 \exp(-\beta_2) + K_2 \exp(\beta_2)) \exp(\beta_1)}{(K_1 \exp(-\beta_2) + K_2 \exp(\beta_2)) \exp(\beta_1) - (R_1^{(0)})^\sigma (K_1 K_2 \exp(-\beta_2) - \exp(\beta_2)) \exp(\beta_1)} \equiv iY(t), \quad (\text{П.14})$$

где $\beta_1 = y_{h1} \sqrt{t}$, $\beta_2 = (y_{h2} - y_{h1}) \sqrt{t}$, $\sigma = \text{sign } p_1$. Отсюда получаем более удобную формулу для нахождения корней методом последовательных приближений:

$$t_s^{(n)} = y_{h2} + \left[\frac{3}{2} \pi \left(s + \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{4} i \ln Y(t_s^{(n-1)}) \right]^{2/3} \exp\left(i \frac{\pi}{3}\right); \quad (\text{П.15})$$

$$t_s^{(0)} = \left[\frac{3}{2} \pi \left(s + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \exp\left(i \frac{\pi}{3}\right).$$

Она служит для нахождения корней вертикальной (дифракционной) ветви спектра нормальных волн с большими номерами.

Таким образом, корни горизонтальной ветви существуют при всех знаках параметров $p_{1,2}$, если только $p_{1,2} \neq 1$, в том числе и при отсутствии инверсии в M -профиле. Анализ асимптотики характеристического уравнения и смысл коэффициентов $K_{1,2}$ в уравнении (П.10) показывают, что это связано с наличием разрывов производной функции $M(z)$, обуславливающих слабые отражения волн от границ слоев $z = h_{1,2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Светличный В.А., Смирнова О.В.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 7. С. 682.
2. *Marcus S.W.* // Radio Sci. 1982. V. 17. № 5. P. 895.
3. *Baumgartner G.B., Jr.* XWVG: A Waveguide Program for Trilinear Tropospheric Ducts. Technical document № 610. San Diego, CA: NCCOSC RDT&E Div., 1983.
4. *Baumgartner G.B., Hitney H.V., Pappert R.A.* // IEE Proc. 1983. V. 130. Pt. F. № 7. P. 630.
5. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
6. *Barrios A.E.* // IEEE Trans. 1992. V. AP-40. № 7. P. 791.
7. *Dockery G.D., Kuttler J.R.* // IEEE Trans. 1996. V. AP-44. № 12. P. 1592.
8. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
9. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.