

ОДНОМЕРНЫЕ ДИОДЫ
С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ© 2022 г. М. А. Завьялов^а, Т. М. Сапронова^а, В. А. Сыровой^а, *^аВЭИ – филиал “РФЯЦ – ВНИИТФ им. акад. Е.И. Забабахина”,
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 15.10.2020 г.

После доработки 15.10.2020 г.

Принята к публикации 24.01.2021 г.

Исследована справедливость модели одномерного движения релятивистских электронов при учете поперечных градиентов собственного магнитного поля в уравнениях Максвелла и пренебрежении эффектами пинча и релятивистского антипинча, приводящем при рассмотрении проблемы усиления электронного тока в плоском униполярном и биполярном диодах с ионным фонтаном к трехкратному увеличению мощности при том же ускоряющем напряжении в случае учета собственного магнитного поля пучка.

DOI: 10.31857/S0033849422030202

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о релятивистских потоках с прямолинейными траекториями, в том числе об одномерных релятивистских диодах, занимал исследователей, начиная с середины прошлого века. В работах [1, 2] показано, что моноэнергетические пучки при учете собственного магнитного поля не могут существовать в диодах с плоской, цилиндрической или сферической геометрией. Однако модели, в которых принимается во внимание только релятивистская форма интеграла энергии, из-за своей простоты успешно конкурировали с немногочисленными точными решениями со строгим учетом собственного магнитного поля и эмитирующими поверхностями в виде полуплоскости или спирального цилиндра [3]. Наиболее простая задача о плоском диоде привлекала наибольшее внимание. Распределение потенциала $\varphi = \varphi(z)$ в этом случае в релятивистской нормировке, исключающей из уравнений пучка все физические постоянные используемой системы единиц, описывается уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{J(1+\varphi)}{\sqrt{\varphi(2+\varphi)}}, \quad (1)$$

где J – плотность тока эмиссии.

В работе [4] решение получено в параметрической форме с использованием интеграла Якоби, в [5] оно выражено через эллиптические интегралы. Расчет функции $\varphi(z)$ приведен в работе [6], а в более подробном виде – в [7], где релятивистский диод играл роль вспомогательной задачи при определении коэффициента усиления элект-

ронного тока в биполярном диоде с релятивистскими электронами. Ультрарелятивистское приближение с линейной зависимостью плотности тока от потенциала, приводимое во всех монографиях, имеющих отношение к интенсивным релятивистским пучкам, также основано на приближении (1).

Аналогичные (1) модели цилиндрического и сферического диодов описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\varphi}{dR} \right) &= \frac{R_0 J (1 + \varphi)}{\sqrt{\varphi(2 + \varphi)}}, \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) &= \frac{r_0^2 J (1 + \varphi)}{\sqrt{\varphi(2 + \varphi)}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где R_0, r_0 – радиусы катодов.

Обзор ранних работ по этим задачам приведен в [8], причем решение в них строилось в виде рядов, в лучшем случае медленно сходящихся. Подробный численный анализ сферического диода выполнен в работе [9].

Предположение об отсутствии зависимости от координаты, изменяющейся в направлении движения, позволило описать течение очень общего вида [10] с одной компонентой скорости $v_z = v_z(x, y)$ при учете собственного магнитного поля

$$v_z = \text{th} \Psi(f), \quad f = f(x, y), \quad \Delta f = 0, \quad (3)$$

где Ψ, f – произвольные функции, причем вторая из них – гармоническая. Частный случай решения (3), соответствующий моноэнергетическому течению, приведен в [11].

Радиальное движение с прямолинейными траекториями в сферических координатах r, θ, ψ , описывающее конический поток бриллюэновского типа с $v_r = v_r(\theta)$, исследовано в работах [12, 13]:

$$v_r = \frac{T^2 - 1}{T^2 + 1}, \quad T = b \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^a; \quad a, b = \text{const.} \quad (4)$$

В монографии [14] этот электронный поток получил название парapotенциального.

Приближенный характер моделей (1), (2), и не только в релятивистском случае, ставил вопрос о противоречивости одномерной модели, ответом на который стала формулировка условий возможности пренебречь действием собственного магнитного поля. Обзор ранее известных результатов с их оценкой и предложением новых моделей (модель периферической частицы и параксиальная модель) приведен в работах [7, 15] для плоского диода. Критерий справедливости одномерного рассмотрения был сформулирован исходя из требования малого возмущения траектории электрона под действием собственного магнитного поля с учетом стабилизирующего эффекта внешнего продольного магнитного поля и сведен к ограничениям на относительные размеры пучка. В работах [9, 15] аналогичное исследование выполнено для сферического диода.

В работе [16] при рассмотрении электронных потоков, описываемых трехмерной параксиальной теорией В.Н. Данилова [17], обнаружено, что требование постоянства сечения пучка приводит к распределению потенциала на оси, отличному от (1), причем этот факт связан с учетом в [17] собственного магнитного поля:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{J}{(1+\varphi)\sqrt{\varphi(2+\varphi)}}. \quad (5)$$

Принимая во внимание приближенный характер параксиального подхода, интересно выяснить смысл этого результата. Во всяком случае ясно, что хотя бы частичный учет эффекта может привести к более обоснованным ограничениям, чем те, которые сформулированы в [7, 15] для модели (1). Имеет смысл распространить рассмотрение также на цилиндрический и сферический диоды.

1. АДЕКВАТНОСТЬ МОДЕЛИ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Аппаратом для решения этой задачи является геометризованная теория плотных электронных пучков [18], наиболее полное изложение которой содержат монографии [19, 20]. В отличие от параксиальной теории геометризованный подход позволяет построить точное соотношение на трубке тока для эмиссии, ограниченной пространственным зарядом или температурой, при произвольной ориентации магнитного поля \vec{H} на катоде,

причем член, содержащий плотность тока эмиссии, имеет ту же форму, что и в (5).

Классические параксиальные модели обеспечивают выполнение условий термоэмиссии в ρ -режиме только при специальной ориентации \vec{H} :

$$N_0 = 0, \quad L_0 M_0 = 0, \quad (6)$$

где L, M, N – компоненты напряженности магнитного поля в системе x^1, x^2, x^3 , связанной с геометрией течения: x^1 – продольная координата на трубке тока $x^2 = \text{const}$, $x^3 = \psi$ – азимут или $x^3 = x$ для плоских пучков; индекс ноль соответствует величинам на катоде $x^1 = 0$. Произвольная ориентация магнитного поля обеспечивается благодаря локально неортогональной системе x^1, x^2 в меридиональной плоскости R, z (или y, z для плоских течений) с метрикой вида

$$g_{11} = h_1^2, \quad g_{22} = h_2^2, \quad g_{12} = h_1 h_2 \cos \theta_{12}. \quad (7)$$

Здесь θ_{12} – угол между осями x^1, x^2 . В исследуемых задачах нас интересует собственное азимутальное магнитное поле $H_\psi = N$ (или $H_x = N$). Недиагональный элемент метрического тензора определен выражением

$$g_{12} = -h_{10} h_{20} \bar{N}_0 \xi^{1/3} \exp(-a\xi^2), \quad \xi \equiv h_{10} x^1, \quad (8)$$

$$a = \text{const};$$

$$\bar{N} \equiv N/V_2, \quad V_2 = (9J/2)^{1/3},$$

причем в формулу (8) включена гасящая экспонента, обеспечивающая трансформацию системы к ортогональной.

Соотношение на трубке тока при отсутствии внешнего магнитного поля принимает вид

$$\begin{aligned} (1+\varphi)u^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta_{12}} \frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} - h_2 \frac{\theta_{12,1}^2}{h_1^2 \sin^2 \theta_{12}} - \operatorname{ctg} \theta_{12} \left[\frac{1}{h_1} \left(\frac{g_{12}}{h_1} \right)_{,1} \right] \right\} = -\frac{1}{h_1} (h_2 \sin \theta_{12})_{,1} \frac{1}{h_1} \varphi_{,1} + \\ + h_2 \sin \theta_{12} \left[-2(1+\varphi)k_1^2 u^2 + (1+\varphi)k_1 k_2 u^2 + \right. \\ \left. + k_2 \operatorname{tg} \theta \frac{1}{h_1} \varphi_{,1} - \frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} \varphi_{,1} \right)_{,1} - 2k_1 N u - \right. \\ \left. - \frac{1}{1+\varphi} N^2 + \frac{1}{1+\varphi} E_v^2 \right] + \frac{h_{20} h_{30} J}{h_3 (1+\varphi)^2 u}; \\ u^2 = \frac{\varphi(2+\varphi)}{(1+\varphi)^2}, \quad E_v = (1+\varphi)k_1 u^2 + uN, \\ k_2 = \frac{1}{h_2 \sin \theta_{12}} \left(\frac{g_{12}}{h_1^2} \frac{h_{3,1}}{h_3} - \frac{h_{3,2}}{h_3} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В формуле (9) величина θ определяет угол между осями x^1 и z ; k_1, k_2 – главные кривизны поверхности $x^2 = \text{const}$; u – скорость, E_v – нормальное электрическое поле на трубке тока; h_{20}, h_{30} – значения функций h_2, h_3 на катоде $x^1 = 0$. Для частных производных по x^1, x^2 приняты следующие сокращенные обозначения:

$$\partial\varphi/\partial x^1 \equiv \varphi_{,1}, \quad \partial h_3/\partial x^2 \equiv h_{3,2}. \quad (10)$$

Слагаемое с плотностью тока J в (9) образовано разностью членов, описывающих действие пространственного заряда ρ и учет собственного магнитного поля посредством уравнения $\text{rot} \vec{H} = \rho \vec{v}$. Отношение второго члена к первому определено функцией [19, 20]

$$F_0 = \frac{\varphi(2 + \varphi)}{(1 + \varphi)^2}. \quad (11)$$

Слагаемое с N^2 существует и в нерелятивистском случае и обязано своим возникновением фрагменту силы Лоренца, в котором учтен “шир” продольной скорости, пропорциональный N . Член с E_v^2 , порождающий слагаемое $u^2 N^2$, имеет исключительно релятивистский характер и тот же знак в (9), что и член с пространственным зарядом, и описывает тем самым эффект релятивистского антипинча.

Таким образом, в дальнейшем будем говорить о возможности пренебрежения двумя последними эффектами (члены, содержащие квадрат собственного поля N^2) при учете поперечных градиентов в уравнении для $\text{rot} \vec{H}$.

В случае сплошных осесимметричных и плоскосимметричных пучков соотношение на вырожденной трубке тока – оси z – описывается формулой [19–21]

$$(1 + \varphi) u^2 h_{2,11} = -h_{2,1} \varphi_{,1} - \alpha h_{2,11} + \beta \frac{h_{20} J}{(1 + \varphi)^2 u}; \quad (12)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1/2 \\ 1 \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} h_{20}/2h_2 \\ 1 \end{cases},$$

где значения α, β соответствуют указанным случаям.

Уравнение (9) при заданных параметрах трубки тока (k_1, k_2, θ), пучка (φ, N, J) и способе отсчета продольной координаты (h_1) позволяет рассчитать функцию $h_2(x^1)$; при заданной метрике (7) оно становится уравнением для потенциала φ .

Заранее неочевидная возможность существования периферической трубки тока с прямолинейной границей не противоречит точным урав-

нениям пучка. Уравнение (12) при распределении потенциала на оси (5) и аналогичном распределении для осесимметричных потоков имеет точное решение вида $h_2 = c_1 x^1 + c_0$, для которого производная кривизны трубки тока на оси $k_{1,2} = h_{2,11} = 0$. В результате близкая к оси трубка тока $x^2 = \text{const}$ также имеет нулевую кривизну.

Ленточный пучок рассматривается в декартовых координатах

$$x^1 = z, \quad x^2 = y, \quad x^3 = x; \quad h_1 = h_2 = h_3 = 1, \quad (13)$$

$$\theta = 0, \quad k_1 = k_2 = 0.$$

Цилиндрической трубке тока соответствуют выражения

$$x^1 = z, \quad x^2 = R, \quad x^3 = \psi; \quad h_1 = h_2 = 1, \quad (14)$$

$$h_3 = R, \quad \theta = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -1/R_0.$$

Клиновидная граница пучка определена формулами

$$x^1 = R, \quad x^2 = \psi, \quad x^3 = z; \quad h_1 = h_3 = 1, \quad (15)$$

$$h_2 = R, \quad \theta = \psi_0, \quad k_1 = k_2 = 0.$$

Для конической поверхности $\theta = \theta_0$ имеем

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \psi; \quad (16)$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta; \quad \theta = \theta_0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -\text{ctg} \theta / r.$$

Уравнение (9) для периферической трубки тока в случае ленточного и цилиндрического пучков принимает вид

$$(1 + \varphi) u^2 \left[-\frac{\theta_{12,1}^2}{\sin \theta_{12}} - \text{ctg} \theta_{12} g_{12,11} \right] =$$

$$= -(\sin \theta_{12})_{,1} \varphi_{,1} - \sin \theta_{12} \left[\varphi_{,11} + \frac{N^2}{(1 + \varphi)^3} \right] + \quad (17)$$

$$+ \frac{h_{20} J}{(1 + \varphi) \sqrt{\varphi(2 + \varphi)}}, \quad h_{20} = 1.$$

Для клиновидного потока получаем

$$(1 + \varphi) u^2 \left[-\frac{R \theta_{12,1}^2}{\sin \theta_{12}} - \text{ctg} \theta_{12} g_{12,11} \right] =$$

$$= -(R \sin \theta_{12})_{,1} \varphi_{,1} - R \sin \theta_{12} \left[\varphi_{,11} + \frac{N^2}{(1 + \varphi)^3} \right] + \quad (18)$$

$$+ \frac{h_{20} J}{(1 + \varphi) \sqrt{\varphi(2 + \varphi)}}, \quad h_{20} = R_0.$$

Граница конического пучка описывается уравнением

$$\begin{aligned}
 (1 + \varphi) u^2 \left[-\frac{r \theta_{12,1}^2}{\sin \theta_{12}} - \text{ctg} \theta_{12} g_{12,11} \right] = \\
 = -(r \sin \theta_{12})_{,1} \varphi_{,1} - \\
 - r \sin \theta_{12} \left[\frac{1}{r} \varphi_{,1} + \varphi_{,11} + \frac{N^2}{(1 + \varphi)^3} \right] + \\
 + \frac{h_{20}^2 J}{r(1 + \varphi) \sqrt{\varphi(2 + \varphi)}}, \quad h_{20} = r_0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Уравнения (17)–(19) для периферической трубки тока совпадают с уравнением на оси пучка (12) и не отличаются от соотношений (1), (2) с модифицированной в соответствии с (5) правой частью, если можно пренебречь неортогональностью системы и слагаемым с квадратом собственного магнитного поля N^2 .

Оценить первый фактор можно, используя прикладные асимптотики входящих в уравнения (17)–(19) величин, ответственных за неортогональность системы [18–21]:

$$\begin{aligned}
 g_{12} = -h_{20} \bar{N}_0 \xi^{1/3}, \quad \cos \theta_{12} = -\bar{N}_0 \xi^{1/3}, \\
 \sin \theta_{12} = 1 - \frac{1}{2} \bar{N}_0^2 \xi^{2/3}, \\
 \theta_{12} = \frac{\pi}{2} + \bar{N}_0 \xi^{1/3} + \frac{1}{6} \bar{N}_0^3 \xi^{3/3}, \\
 \varphi = \frac{1}{2} V_2^2 \xi^{4/3}, \quad u = V_2 \xi^{2/3}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Легко видеть, что неортогональные члены и слагаемое с магнитным полем вблизи катода имеют порядок ξ^0 и много меньше членов порядка $\xi^{-2/3}$ со второй производной потенциала и члена с J .

Необходимыми условиями одномерного течения являются требования однородности плотности тока эмиссии J и постоянства кривизны κ_1 эмитирующей поверхности.

В работе [22] сформулированы выражения для производных $J_{,22}$, $J_{,2222}$ и $\kappa_{1,22}$ на оси z , определенные формулами

$$\begin{aligned}
 h_2 = b_0 \left(1 + \bar{b}_3 x + \bar{b}_4 x^{4/3} + \bar{b}_6 x^2 + \bar{b}_7 x^{7/3} + \dots + \bar{b}_{12} x^4 \right), \\
 \frac{1}{J} \frac{J_{,22}}{b_0^2} = 10 \bar{b}_6, \quad \frac{\kappa_{1,22}}{b_0^2} = 5 \bar{b}_9 + \frac{9}{2} \bar{b}_3 \bar{b}_6, \quad x \equiv x^1.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Между коэффициентами разложения потенциала φ (φ_{10} , φ_{13}) и функции h_2 (\bar{b}_6 , \bar{b}_9) существуют связи, приведенные ниже для плоскосимметричных и осесимметричных потоков:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_{10} = -\frac{8}{9} \bar{b}_6 + \frac{83}{225} \bar{b}_3^2, \\
 \bar{\varphi}_{13} = \frac{37}{33} \left(-\bar{b}_9 + \frac{1652}{1665} \bar{b}_3 \bar{b}_6 - \frac{31463}{124875} \bar{b}_3^3 \right); \\
 \bar{\varphi}_{10} = -\frac{16}{9} \bar{b}_6 + \frac{163}{150} \bar{b}_3^2, \\
 \bar{\varphi}_{13} = \frac{74}{33} \left(-\bar{b}_9 + \frac{2449}{1665} \bar{b}_3 \bar{b}_6 - \frac{122029}{249750} \bar{b}_3^3 \right).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Антипараксиальные разложения [19, 20] при эмиссии в ρ -режиме обладают тем свойством, что произвольно заданные коэффициенты осевого распределения потенциала φ_4 , φ_7 , φ_{10} , φ_{13} , φ_{16} определяют соответственно следующие величины, описывающие характер физической задачи: J , κ_1 , $J_{,22}$, $\kappa_{1,22}$, $J_{,2222}$. Коэффициенты φ_{4+k+1} , φ_{4+k+2} , $k = 0, 1, \dots$, расположенные между φ_{4+k} и φ_{4+k+3} , не могут быть заданы произвольно, но жестко определены и зависят от компонент магнитного поля на катоде, а при больших значениях индекса — еще и от ранее введенных произвольных элементов φ_{4+k} . Из формул (22) видно, что регламентированные коэффициенты не входят в описание величин \bar{b}_6 , \bar{b}_9 , в то время как коэффициент \bar{b}_{12} в выражении для $J_{,2222}$ в [22] от них зависит.

При рассмотрении точных уравнений пучка и приближенной модели типа (5) с одинаковыми значениями произвольно задаваемых параметров регламентированные коэффициенты разложений будут иметь разные значения.

Уравнение (5) для плоского диода вблизи стартовой поверхности $z = 0$ имеет следующее решение:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{ap} = \varphi_4 z^{4/3} \times \\
 \times \left(1 - 0.09524 V_2^2 z^{4/3} + 0.03789 V_2^4 z^{8/3} + \dots \right),
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\varphi_7 = \varphi_{10} = \varphi_{13} = 0.$$

Уравнение сферического диода, аналогичное уравнению (5), и его локальное решение при эмиссии со сферы $r = r_0$ определены формулами

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{r_0^2 J}{r^2 (1 + \varphi)^2 u}, \quad \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - T_0 \frac{1}{1 + \bar{z}} \frac{d\varphi}{dz} = \\
 = \frac{J}{(1 + \bar{z})^2 (1 + \bar{\varphi})^2 u}, \quad z = r - r_0, \\
 \bar{z} \equiv \frac{z}{r_0} = -\frac{1}{2} T_0 \bar{z}, \quad T_0 = -\frac{2}{r_0}; \quad \varphi_{ap} = \\
 = \varphi_4 z^{4/3} \left(1 + \frac{8}{15} T_0 z - 0.09524 V_2^2 z^{4/3} + \frac{163}{600} T_0^2 z^2 - \right. \\
 \left. - 0.038095 V_2^2 T_0 z^{7/3} + \right. \\
 \left. + 0.06549 V_2^4 z^{8/3} + \frac{122029}{891000} T_0^2 z^3 + \dots \right).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Построение решения точных уравнений пучка [22] с коэффициентами $\Phi_7, \Phi_{10}, \Phi_{13}$ из (23), (24) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \Phi_{ex} &= \Phi_4 z^{4/3} \times \\ &\times \left(1 + 0.05159 V_2^2 z^{4/3} + 0.008997 V_2^4 z^{8/3} + \dots \right), \\ \Phi_{ex} &= \Phi_4 z^{4/3} \left(1 + \frac{8}{15} T_0 z + 0.05159 V_2^2 z^{4/3} + \right. \\ &+ \frac{163}{600} T_0^2 z^2 + 0.04317 V_2^2 T_0 z^{7/3} - \\ &\left. - 0.00001512 V_2^4 z^{8/3} + \frac{122029}{891000} T_0^3 z^3 + \dots \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Различие регламентированных коэффициентов при сравнении функций Φ_{ap}, Φ_{ex} в (23)–(25) очевидно.

По изложенным причинам нет возможности воспользоваться результатами [22] и сформулировать условие малости члена $(1/24) \bar{J}_{,2222} \eta^4$, $\eta \equiv b_0 x^2$ по сравнению с единицей, что привело бы к ограничению на величину $J^2 \eta^4$.

Однако подстановка коэффициентов $\Phi_7, \Phi_{10}, \Phi_{13}$ из (23), (24) в формулы (21), (22) приводит к нулевым значениям производных плотности тока и кривизны катода на оси, и это результат, соответствующий точным уравнениям пучка:

$$J_{,22} = 0, \quad \kappa_{1,22} = 0. \quad (26)$$

Вдали от особенности можно пренебречь магнитным полем в уравнениях (17)–(19), если

$$\frac{N^2}{(1 + \varphi)^3} \ll G \frac{J}{(1 + \varphi) \sqrt{\varphi(2 + \varphi)}}, \quad (27)$$

где $G = 1, R_0/R, r_0^2/r^2$ для соответствующих потоков.

Продолжение оценок основано на выражении для собственного магнитного поля в предположении о прямолинейном движении зарядов:

$$\begin{aligned} N &= N_0 = -Ja; \quad N = N_0 = \frac{1}{2} Ja; \\ N &= N_0 = JR_0 \Psi_0; \\ N &= N_0 \frac{r_0}{r}, \quad N_0 = Jr_0 \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}, \end{aligned} \quad (28)$$

где a – полуширина ленточного пучка или радиус цилиндрического потока; Ψ_0, θ_0 – полураствор и раствор клиновидного и конического пучков соответственно.

В случае ленточного пучка условие (27) для плотности тока J и тока с “квадрата” $I_{\square} = Ja^2$ принимает вид

$$J \ll 1/(a^2 F), \quad I_{\square} \ll 1/F, \quad F = \frac{\sqrt{F_0}}{1 + \varphi}. \quad (29)$$

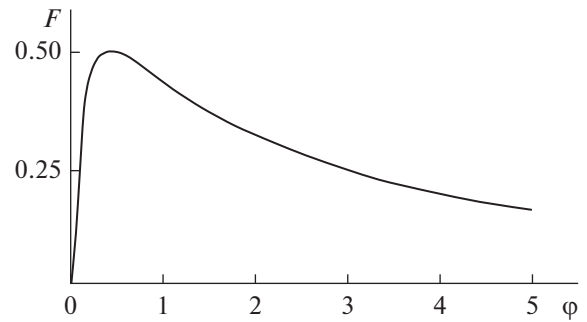


Рис. 1. Функция $F(\varphi)$.

Входящая в формулы (29) функция F достигает максимума $F_m = 1/2$ при $\varphi = \sqrt{2} - 1$ (рис. 1).

Для цилиндрического пучка аналогичные (29) формулы выглядят следующим образом:

$$J \ll 4/(a^2 F), \quad I \ll 4\pi/F. \quad (30)$$

Параметры клиновидного пучка должны удовлетворять условиям

$$J \ll \frac{1}{(R_0 \Psi_0)^2} \frac{1}{F} \frac{R_0}{R}, \quad I_{\square} \ll \frac{1}{F} \frac{R_0}{R}. \quad (31)$$

В случае конического пучка имеем

$$J \ll \frac{1}{[r_0 \operatorname{tg}(\theta_0/2)]^2} \frac{1}{F}, \quad I \ll 4\pi \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \frac{1}{F}. \quad (32)$$

Для перехода к размерным величинам в формулах (28)–(32) необходимо провести следующие замены:

$$J \rightarrow J_* J, \quad I \rightarrow I_* I; \quad J_* = \frac{\epsilon_0 c^3}{\eta L_*^2}, \quad I_* = \frac{\epsilon_0 c^3}{\eta}. \quad (33)$$

где ϵ_0 – диэлектрическая постоянная вакуума, c – скорость света, $\eta = e/m$ – удельный заряд электрона, L_* – выбранный масштаб длины; потенциал нормируется на $c^2/\eta \approx 500$ кВ.

Приведем численные оценки критериев (29)–(32) при $L_* = a = R_0 = r_0 = 1$ см. Характерные значения плотности тока и тока численно совпадают, $I_* = 1335$ А. Вдали от особенности, где в оценках присутствует функция F , заменим $1/F$ ее минимальным значением ($1/F = 2$), чтобы усилить неравенства. Для ленточного пучка критерий (29) принимает вид

$$I_{\square p} \ll I_*/F = 2.67 \text{ кА}. \quad (34)$$

В случае цилиндрического пучка получаем

$$I = 4\pi I_{\square p} \ll 33.6 \text{ кА}. \quad (35)$$

Клиновидному пучку с компрессией $R_0/R = 5$ и “квадратом” $R \times \pi/3$ соответствует неравенство

$$I_{\square} = 5I_{\square p} \ll 13.35 \text{ кА.} \quad (36)$$

Для сферического диода при $\theta_0 = 60^\circ$ ограничения (32) принимают вид

$$I = \left(4\pi \cos^2 \frac{\theta_0}{2}\right) I_{\square p} \ll 41.14 \text{ кА.} \quad (37)$$

2. ПЛОСКИЕ ДИОДЫ С ИОННЫМ ФОНТАНОМ ПРИ УЧЕТЕ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Работа [23] посвящена исследованию эффекта увеличения коэффициента усиления электронного тока в униполярном и биполярном плоских диодах за счет использования ионного фонтана – ионов, инжектируемых через проницаемый термокатод. При этом плотность электронного тока с катода соответствовала модели (1). Анализ тех же задач на основании модели (5) с учетом собственного магнитного поля представляет очевидный интерес.

Отметим символами C , B , A катод, плоскость отражения ионов и анод. Потенциал φ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = J_e \left[\frac{1}{(1+\varphi)\sqrt{\varphi(2+\varphi)}} - \frac{\beta}{\sqrt{2(\varphi_B - \varphi)}} - \frac{\alpha}{\sqrt{2(\varphi_A - \varphi)}} \right], \quad 0 \leq z \leq z_B; \quad (38)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = J_e \left[\frac{1}{(1+\varphi)\sqrt{\varphi(2+\varphi)}} - \frac{\alpha}{\sqrt{2(\varphi_A - \varphi)}} \right], \quad z_B \leq z \leq 1; \quad \beta = \frac{2J_{iB}}{J_e} \sqrt{\frac{\eta_e}{\eta_i}}, \quad \alpha = \frac{J_i}{J_e} \sqrt{\frac{\eta_e}{\eta_i}},$$

где J_e , J_{iB} , J_i – плотность тока электронов, фонтана и ионного тока с анода соответственно, z_B – координата плоскости отражения ионов; длины нормированы на расстояние между электродами; в униполярном диоде $\alpha = 0$.

Первые интегралы уравнений (38) при условии сопряжения по полю при $z = z_B$ описываются выражениями

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 = J_e \left[\arccos \frac{1}{1+\varphi} + \beta \left(\sqrt{2(\varphi_B - \varphi)} - \sqrt{2\varphi_B} \right) + \alpha \left(\sqrt{2(\varphi_A - \varphi)} - \sqrt{2\varphi_A} \right) \right], \quad 0 \leq z \leq z_B; \quad (39)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 = J_e \left[\arccos \frac{1}{1+\varphi} - \beta \sqrt{2\varphi_B} + \alpha \left(\sqrt{2(\varphi_A - \varphi)} - \sqrt{2\varphi_A} \right) \right], \quad z_B \leq z \leq 1.$$

Повторное интегрирование определяет неявную зависимость потенциала от координаты

$$\sqrt{2J_e} z = \int_0^\varphi \left\{ \arccos \frac{1}{1+\varphi} + \beta \left[\sqrt{2(\varphi_B - \varphi)} - \sqrt{2\varphi_B} \right] + \alpha \left[\sqrt{2(\varphi_A - \varphi)} - \sqrt{2\varphi_A} \right] \right\}^{-1/2} d\varphi, \quad 0 \leq z \leq z_B; \quad (40)$$

$$\sqrt{2J_e} (z + C) = \int_{\varphi_B}^\varphi \left\{ \arccos \frac{1}{1+\varphi} - \beta \sqrt{2\varphi_B} + \alpha \left[\sqrt{2(\varphi_A - \varphi)} - \sqrt{2\varphi_A} \right] \right\}^{-1/2} d\varphi, \quad z_B \leq z \leq 1.$$

Условия эмиссии в ρ -режиме выполнены в (39) на катоде, потребуем, чтобы они имели место и в плоскостях B , A :

$$\arccos \frac{1}{1+\varphi_B} - \beta \sqrt{2\varphi_B} + \alpha \left[\sqrt{2(\varphi_A - \varphi_B)} - \sqrt{2\varphi_A} \right] = 0, \quad (41)$$

$$\arccos \frac{1}{1+\varphi_A} - \beta \sqrt{2\varphi_B} - \alpha \sqrt{2\varphi_A} = 0.$$

В результате величины J_i/J_e , J_{iB}/J_e выражаются через потенциалы φ_B , φ_A следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(\varphi_A - \varphi_B)}} \left[\arccos \frac{1}{1+\varphi_A} - \arccos \frac{1}{1+\varphi_B} \right],$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\varphi_B}} \times \left[\arccos \frac{1}{1+\varphi_B} + \alpha \left[\sqrt{2(\varphi_A - \varphi_B)} - \sqrt{2\varphi_A} \right] \right]. \quad (42)$$

Отнесем потенциал к значению на аноде

$$\bar{\varphi} = \varphi/\varphi_A \quad (43)$$

и введем новые обозначения:

$$\bar{\alpha} = \alpha \sqrt{2\varphi_A} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{\varphi}_B}} \times \left[\arccos \frac{1}{1+\bar{\varphi}_A} - \arccos \frac{1}{1+\bar{\varphi}_A \bar{\varphi}_B} \right], \quad (44)$$

$$\bar{\beta} = \beta \sqrt{2\varphi_A} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\varphi}_B}} \left[\arccos \frac{1}{1+\bar{\varphi}_A \bar{\varphi}_B} + \bar{\alpha} (\sqrt{1-\bar{\varphi}_B} - 1) \right].$$

Интегралы в (40) в результате перенормировки примут вид

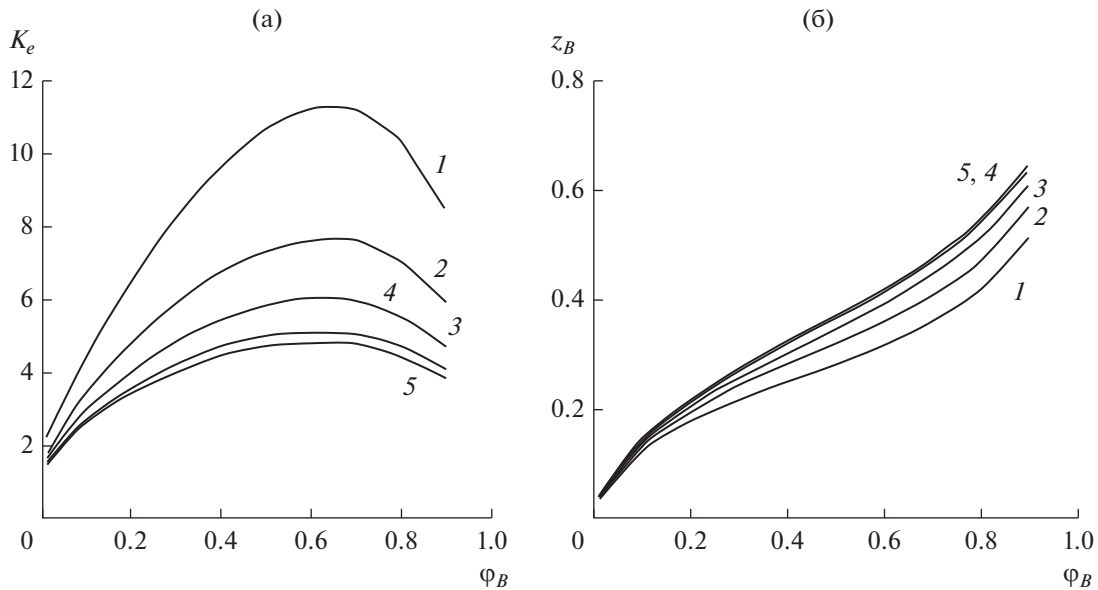


Рис. 2. Коэффициент усиления электронного тока K_e (а) и координата плоскости отражения ионов фонтана z_B (б) в зависимости от потенциала анода φ_A и потенциала инжекции ионов φ_B для униполярного диода при $\varphi_A = 2$ (1), 1 (2), 0.5 (3), 0.2 (4), 0.1 (5).

$$\begin{aligned}
 I_1 = \varphi_A \int_0^{\bar{\varphi}} \left[\arccos \frac{1}{1 + \varphi_A \bar{\varphi}_B} + \bar{\beta} (\sqrt{\varphi_B - \bar{\varphi}} - \sqrt{\bar{\varphi}_B}) + \right. \\
 \left. + \bar{\alpha} (\sqrt{1 - \bar{\varphi}} - 1) \right]^{-1/2} d\bar{\varphi}, \quad 0 \leq z \leq z_B; \\
 I_2 = \varphi_A \times \\
 \times \int_{\bar{\varphi}_B}^{\bar{\varphi}} \left[\arccos \frac{1}{1 + \varphi_A \bar{\varphi}_B} - \bar{\beta} \sqrt{\bar{\varphi}_B} + \bar{\alpha} (\sqrt{1 - \bar{\varphi}} - 1) \right]^{-1/2} d\bar{\varphi}, \\
 \bar{z}_B \leq z \leq 1.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Запишем соотношения (40), (45) при $z = z_B$ и $z = 1$:

$$\sqrt{2J_e} z_B = I_1(\bar{\varphi}_B), \quad \sqrt{2J_e} (1 - z_B) = I_2(1). \tag{46}$$

Плотность электронного тока, коэффициент усиления K_e по отношению к току релятивистского диода по модели (1) и координата плоскости отражения z_B ионного фонтана описываются формулами

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2J_e} = I_1(\bar{\varphi}_B) + I_2(1), \quad K_e = \left[\frac{I_1(\bar{\varphi}_B) + I_2(1)}{I_0} \right]^2, \\
 z_B = \frac{I_1(\bar{\varphi}_B)}{I_1(\bar{\varphi}_B) + I_2(1)}; \quad I_0 = \int_0^{\varphi_A} \frac{dt}{\sqrt{t(2+t)}}.
 \end{aligned} \tag{47}$$

На рис. 2 приведены результаты расчетов для униполярного диода с ионным фонтаном при различных значениях потенциала анода в интервале (0.1,...,2). Аналогичные кривые для биполярного

диода демонстрирует рис. 3. В табл. 1 представлены данные о коэффициенте усиления K_e и координате плоскости отражения ионов z_B в случае униполярного диода при нескольких значениях потенциала анода φ_A и потенциала инжекции ионов φ_B . Таблица 2 содержит сравнение этих параметров при $\varphi_A = 2$ для моделей (1) [23] и (5). Таблицы 3, 4 соответствуют биполярному диоду, причем табл. 3 аналогична табл. 1, а в табл. 4 проведено сравнение максимального коэффициента усиления K_{em} для нескольких значений φ_A по моделям (1) [23] и (5) с указанием соответствующих величин φ_B, z_B .

Из сопоставления результатов видно, что коэффициент усиления K_e при учете собственного магнитного поля растет по мере увеличения потенциала анода, а плоскость отражения ионов приближается к катоду. Максимальный коэффициент усиления примерно в три раза больше по сравнению со случаем, когда собственное магнитное поле не принимается во внимание. Сказанное справедливо как для униполярного, так и для биполярного потоков.

Отметим, что модель (5) не имеет ультрарелятивистского приближения, так как уравнение (5) при $\varphi \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{J}{\varphi^2} \tag{48}$$

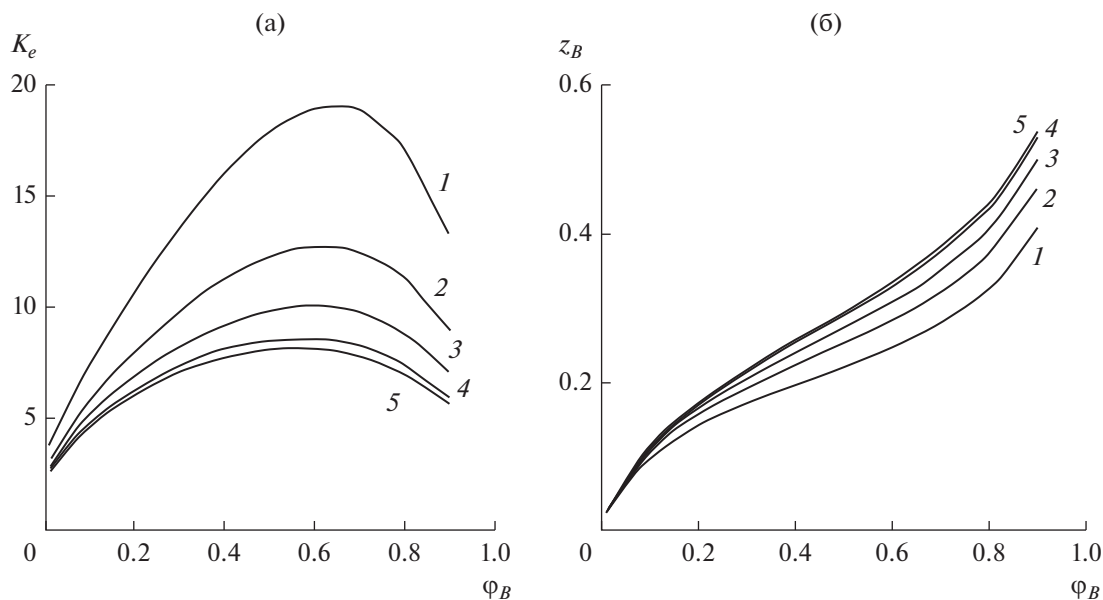


Рис. 3. Коэффициент усиления электронного тока K_e (а) и координата плоскости отражения ионов фонтана z_B (б) в зависимости от потенциала анода φ_A и потенциала инжекции ионов φ_B для биполярного диода при $\varphi_A = 2$ (1), 1 (2), 0.5 (3), 0.2 (4), 0.1 (5).

и не может быть привязано к катоду. Соотнесение с анодом вводит в формулы неизвестное значение поля на аноде и по этой причине представляется бесполезным. Впрочем, как от-

мечалось в работе [9], ультрарелятивистское приближение модели (1) не имеет практического смысла из-за чрезвычайно медленного стремления к пределу.

Таблица 1. Коэффициент усиления электронного тока K_e и координата плоскости отражения ионов фонтана в зависимости от значений φ_A , φ_B для униполярного диода

φ_B	φ_A									
	0.1		0.2		0.5		1.0		2.0	
	K_e	z_B	K_e	z_B	K_e	z_B	K_e	z_B	K_e	z_B
0.01	1.438	0.036	1.478	0.036	1.599	0.035	1.796	0.034	2.178	0.032
0.1	2.630	0.151	2.723	0.149	3.004	0.144	3.482	0.137	4.484	0.126
0.2	3.444	0.221	3.588	0.218	4.029	0.210	4.797	0.197	6.462	0.178
0.3	4.042	0.277	4.233	0.273	4.825	0.260	5.868	0.243	8.175	0.217
0.4	4.473	0.327	4.706	0.321	5.430	0.305	6.717	0.284	9.596	0.251
0.5	4.749	0.376	5.015	0.368	5.842	0.349	7.320	0.323	10.652	0.285
0.6	4.865	0.426	5.150	0.417	6.040	0.394	7.636	0.364	11.242	0.321
0.7	4.800	0.481	5.088	0.472	5.986	0.446	7.597	0.412	11.234	0.364
0.8	4.511	0.549	4.778	0.538	5.610	0.511	7.097	0.474	10.436	0.421
0.9	3.887	0.646	4.098	0.636	4.753	0.608	5.915	0.570	8.481	0.515

Таблица 2. Сравнение значений параметров K_e , z_B при $\Phi_A = 2$ для униполярного диода по моделям (1), (5)

Φ_B	$\Phi_A = 2$			
	Модель (1)		Модель (5)	
	K_e	z_B	K_e	z_B
0.01	1.377	0.040	2.178	0.032
0.1	2.366	0.170	4.484	0.126
0.2	2.945	0.255	6.462	0.178
0.3	3.330	0.324	8.175	0.217
0.4	3.589	0.385	9.596	0.251
0.5	3.747	0.443	10.652	0.285
0.6	3.810	0.501	11.242	0.321
0.7	3.771	0.563	11.234	0.364
0.8	3.605	0.633	10.436	0.421
0.9	3.242	0.726	8.481	0.515

Таблица 3. Коэффициент усиления электронного тока K_e и координата плоскости отражения ионов фонтана в зависимости от значений Φ_A , Φ_B для биполярного диода

Φ_B	Φ_A									
	0.1		0.2		0.5		1.0		2.0	
	K_e	z_B	K_e	z_B	K_e	z_B	K_e	z_B	K_e	z_B
0.01	2.602	0.027	2.659	0.027	2.834	0.027	3.137	0.026	3.756	0.024
0.1	4.661	0.116	4.791	0.115	5.186	0.112	5.902	0.107	7.486	0.099
0.2	6.082	0.172	6.280	0.170	6.919	0.164	8.099	0.155	10.741	0.140
0.3	7.106	0.217	7.382	0.214	8.268	0.205	9.899	0.191	13.625	0.171
0.4	7.805	0.257	8.156	0.253	9.278	0.240	11.345	0.223	16.094	0.197
0.5	8.186	0.296	8.602	0.291	9.927	0.275	12.363	0.254	17.980	0.222
0.6	8.231	0.338	8.692	0.331	10.158	0.312	12.848	0.286	19.057	0.250
0.7	7.895	0.386	8.372	0.378	9.883	0.355	12.647	0.325	19.019	0.283
0.8	7.097	0.448	7.544	0.438	8.955	0.411	11.525	0.377	17.422	0.329
0.9	5.646	0.544	5.993	0.533	7.080	0.503	9.042	0.465	13.486	0.411

Таблица 4. Максимальное значение K_{em} коэффициента усиления электронного тока и соответствующие значения параметров z_B , Φ_B для биполярного диода по моделям (1), (5)

Φ_A	Модель (1)			Модель (5)		
	K_{em}	z_B	Φ_B	K_{em}	z_B	Φ_B
0.1	7.589	0.326	0.540	8.231	0.338	0.6
0.5	7.256	0.329	0.517	10.158	0.312	0.6
1.0	6.973	0.334	0.499	12.848	0.286	0.6
2.0	6.620	0.346	0.480	19.057	0.250	0.6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модели одномерных релятивистских диодов при учете поперечных градиентов собственного магнитного поля, описываемых уравнениями Максвелла, и пренебрежении эффектами пинча и релятивистского антипинча приводят к распределению потенциала на оси пучка, которое обеспечивает равенство нулю вторых производных плотности тока эмиссии и кривизны катода и тем самым реализует в окрестности оси необходимое условие одномерного движения: $J = \text{const}$, $\kappa_1 = \text{const}$. Сформулированы ограничения на ток пучка при различных конфигурациях потока, позволяющие пренебречь упомянутыми эффектами.

Решение задачи об усилении электронного тока в релятивистской области для плоских униполярного и биполярного диодов с ионным фонтаном показывает, что учет собственного магнитного поля приводит к трехкратному увеличению мощности при том же ускоряющем напряжении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lucas A.R.* // J. Electr. Contr. 1958. V. 3. № 3. P. 245.
2. *Buneman O.* // J. Electr. Contr. 1958. V. 5. № 6. P. 561.
3. *Вашковский А.В., Сыровой В.А., Цимринг Ш.Е.* // РЭ. 1996. Т. 41. № 3. С. 350.
4. *Gold L.* // J. Electr. Contr. 1957. V. 3. № 6. P. 564.
5. *Игнатенко В.П.* // РЭ. 1962. Т. 7. № 7. С. 1175.
6. *Aston E.V.W.* // J. Electr. Contr. 1957. V. 3. № 2. P. 203.
7. *Белкин В.М., Завьялов М.А., Сыровой В.А.* // РЭ. 2011. Т. 56. № 2. С. 212.
8. *Белов Н.Е.* // ЖТФ. 1978. Т. 48. № 1. С. 119.
9. *Белкин В.М., Завьялов М.А., Сыровой В.А.* // РЭ. 2009. Т. 54. № 4. С. 493.
10. *Данилов В.Н.* // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 1. С. 3.
11. *Lomax R.J.* // J. Electr. Contr. 1958. V. 5. № 6. P. 563.
12. *Сыровой В.А.* // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1963. № 3. С. 26.
13. *Сыровой В.А.* // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 6. С. 3.
14. *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984.
15. *Завьялов М.А., Сыровой В.А.* Биполярные пучки: эксперимент, теория, технические приложения. Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2019.
16. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 8. С. 871.
17. *Данилов В.Н.* // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 5. С. 3.
18. *Сыровой В.А.* // РЭ. 1996. Т. 41. № 10. С. 1255.
19. *Сыровой В.А.* Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
20. *Syrovoy V.A.* Theory of Intense Beams of Charged Particles. US: Elsevier, 2011.
21. *Сыровой В.А.* // РЭ. 1997. Т. 42. № 12. С. 1501.
22. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 7. С. 703.
23. *Завьялов М.А., Стальков П.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 8. С. 799.