РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2022, том 67, № 5, с. 509–513

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

О СИНГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОТНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ПРИ ЭМИССИИ В *T*-РЕЖИМЕ

© 2022 г. Т. М. Сапронова[a, *], В. А. Сыровой[a]

[a]ВЭИ – филиал "РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина",
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 03.08.2021 г.
После доработки 03.08.2021 г.
Принята к публикации 16.09.2021 г.

Проанализировано поведение регулярных функций в двучленной формуле для потенциала с выделением особенности для одномерных диода и магнетрона при эмиссии в *T*-режиме.

DOI: 10.31857/S0033849422040088

ВВЕДЕНИЕ

Предположение о нулевой начальной скорости электронов в гидродинамической модели плотного электронного пучка приводит к бесконечному значению плотности пространственного заряда ρ на стартовой поверхности при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом или температурой. Математическим следствием этого факта является появление особой точки на катоде, характер которой зависит от режима эмиссии и наличия магнитного поля $\vec{H}$. В работе [1] показано, что при эмиссии в ρ-режиме и $\vec{H} \neq 0$ структура особенности может быть представлена в виде трехчленной формулы, описывающей "линейную комбинацию" двух точек ветвления, коэффициентами в которой являются аналитические функции продольной координаты l, нормальной к катоду.

Для потенциала электрического поля φ формула имеет вид

$$\varphi = l^{4/3}\Phi_1(l) + l^{6/3}\Phi_2(l) + l^{8/3}\Phi_3(l). \qquad (1)$$

Зависимости от тангенциальных к катоду координат у функций Φ_k для упрощения записи не приводим.

При эмиссии в *T*-режиме структура особенности описывается более простым выражением

$$\varphi = l^{2/2}\Phi_1(l) + l^{3/2}\Phi_2(l). \qquad (2)$$

Коэффициенты в зависимостях (1), (2) не могут быть выражены в элементарных функциях даже в случае одномерных течений, описываемых точными решениями.

Для электростатических пучков в ρ-режиме эмиссии особенность факторизуется:

$$\varphi = l^{4/3}\Phi(l). \qquad (3)$$

Цель работы – изучение функций Φ_1, Φ_2 в (2) для наиболее простой задачи о классическом варианте плоского магнетрона [2, 3] с магнитным полем, направленным параллельно электродам, и его частном случае – плоском диоде. В отличие от работ [2, 3] рассмотрение относится к случаю эмиссии, ограниченной температурой, когда критический и закритический режимы с двухпетлевыми траекториями не могут иметь места.

Выделение особенности в одномерных задачах. Потенциал в плоском магнетроне при переходе от системы СИ к безразмерным переменным (символы с чертой), устраняющим из уравнений пучка все физические постоянные используемой системы единиц, описывается соотношением

$$\frac{d^2\bar{\varphi}}{d\bar{x}^2} = \frac{\bar{J}}{\sqrt{2\bar{\varphi} - \bar{H}^2\bar{x}^2}}, \quad \bar{\varphi} = \bar{x}\bar{\Phi}_1(\bar{x}) + \bar{x}^{3/2}\bar{\Phi}_2(\bar{x}), \qquad (4)$$

где нормировка проведена в соответствии с правилами

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_*}, \quad \bar{E} = \frac{E}{E_*}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_*}, \quad \bar{J} = \frac{J}{J_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L_*}; \qquad (5)$$

$$\eta\varphi_* = V_*^2, \quad E_* = \frac{\varphi_*}{L_*}, \quad H_* = \frac{V_*}{\eta\mu_0 L_*}, \quad J_* = \frac{\varepsilon_0 V_*^3}{\eta L_*^2},$$

причем звездочками отмечены характерные величины длины L_*, потенциала φ_*, скорости V_*, электрического поля E_*, напряженности магнитного поля H_*, плотности тока J_*; $\eta = e/m$, ε_0, μ_0 – удельный заряд электрона, диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

Введем дополнительную нормировку искомых функций и аргумента в (4):

$$\bar{\Phi}_1 = \bar{E}\hat{\Phi}_1, \quad \bar{\Phi}_2 = \frac{\bar{J}}{2\sqrt{2\bar{E}}}\hat{\Phi}_2,$$
$$\bar{\varphi} = \frac{8\bar{E}^4}{\bar{J}^2}\hat{\varphi}, \quad \bar{x} = \frac{8\bar{E}^3}{\bar{J}^2}\hat{x}, \tag{6}$$

где $\bar{E}$ – поле на катоде.

В новых переменных соотношения (4) примут вид

$$\frac{d^2\hat{\varphi}}{d\hat{x}^2} = \frac{2}{\sqrt{\hat{\varphi} - 4\gamma^2\hat{x}^2}}, \quad \hat{\varphi} = \hat{x}\hat{\Phi}_1 + \hat{x}^{3/2}\hat{\Phi}_2; \quad \gamma = \frac{\bar{E}\bar{H}}{\bar{J}}. \tag{7}$$

Возведем обе части дифференциального уравнения для $\hat{\varphi}$ в квадрат и будем искать решение в форме (7)

$$\left(\frac{d^2\hat{\varphi}}{d\hat{x}^2}\right)^2\left(\hat{\varphi} - 4\gamma^2\hat{x}^2\right) = 4. \tag{8}$$

Сепарация регулярных функций и функций с факторизованной особенностью, справедливая вблизи стартовой поверхности, приводит к системе уравнений

$$\left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right)\left(\hat{x}\Psi_1^2 + \Psi_2^2\right) + 2\hat{x}\hat{\Phi}_2\Psi_1\Psi_2 = 4,$$
$$\hat{\Phi}_2\left(\hat{x}\Psi_1^2 + \Psi_2^2\right) + 2\left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right)\Psi_1\Psi_2 = 0, \tag{9}$$

где через Ψ_1, Ψ_2 обозначены дифференциальные комплексы

$$\Psi_1 = 2\hat{\Phi}_1' + \hat{x}\hat{\Phi}_1'', \quad \Psi_2 = \frac{3}{4}\hat{\Phi}_2 + 3\hat{x}\hat{\Phi}_2' + \hat{x}^2\hat{\Phi}_2'', \tag{10}$$

штрих означает производную по $\hat{x}$.

Разрешая уравнения (9) относительно комбинаций $\left(\sqrt{\hat{x}}\Psi_1\right)^2 + \Psi_2^2$, $\left(\sqrt{\hat{x}}\Psi_1\right)\Psi_2$, имеем

$$\left(\sqrt{\hat{x}}\Psi_1\right)^2 + \Psi_2^2 = \frac{4}{\delta}\left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right),$$
$$\left(\sqrt{\hat{x}}\Psi_1\right)\Psi_2 = -\frac{2}{\delta}\sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2; \tag{11}$$
$$\delta = \left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right)^2 - \hat{x}\hat{\Phi}_2^2.$$

Дополним левую часть первого соотношения (11) до квадрата суммы функций $\sqrt{\hat{x}}\Psi_1$ и Ψ_2 и выразим первую из них через вторую при помощи второго соотношения. Результатом будет квадратное уравнение относительно Ψ_2

$$\left(\sqrt{\hat{x}}\Psi_1\right) + \Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left[\left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right) - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2\right]^{1/2},$$
$$\sqrt{\hat{x}}\Psi_1 = -\frac{2}{\delta}\sqrt{\hat{x}}\frac{\hat{\Phi}_2}{\Psi_2}; \tag{12}$$
$$\Psi_2^2 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left[\left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right) - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2\right]^{1/2}\Psi_2 - \frac{2}{\delta}\sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2 = 0.$$

Регулярные фрагменты $\hat{\Phi}_1$, $\hat{\Phi}_2$ потенциала в форме (7) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\Psi_1 \equiv \hat{x}\hat{\Phi}_1'' + 2\hat{\Phi}_1' = \frac{1}{\sqrt{\hat{x}}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{\left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right) + \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right) - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2}}\right],$$
$$\Psi_2 \equiv \hat{x}^2\hat{\Phi}_2'' + 3\hat{x}\hat{\Phi}_2' + \frac{3}{4}\hat{\Phi}_2 = \tag{13}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right) + \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}\right) - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2}}.$$

Обратим внимание на тот факт, что уравнения (13), определяющие в окрестности $\hat{x} = 0$ регулярные функции $\hat{\Phi}_1$, $\hat{\Phi}_2$, имеют правые части, образованные неаналитическими слагаемыми. Кроме того, выполнение равенства

$$F = \hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x} - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2 = 0 \tag{14}$$

приводит к появлению особенности, не связанной с режимом эмиссии. Само это равенство, явившееся следствием сепарации членов разного порядка малости вблизи $\hat{x} = 0$, может иметь смысл при значительном удалении от $\hat{x} = 0$, где $\sqrt{\hat{x}}$ можно рассматривать как регулярную функцию. Корень $\hat{x}_*$ уравнения (14) определяет интервал, на котором уравнение (7) имеет решение приведенной в (7) формы.

Построение разложений для функций $\hat{\Phi}_1$, $\hat{\Phi}_2$ из (13) вблизи $x = 0$ приводит к следующему результату:

$$\hat{\Phi}_1 = f_0 + f_1\hat{x} + f_2\hat{x}^2 + \ldots,$$
$$\hat{\Phi}_2 = g_0 + g_1\hat{x} + g_2\hat{x}^2 + \ldots;$$
$$f_0 = 1, \quad f_1 = -\frac{4}{3}, \quad g_0 = \frac{8}{3},$$
$$g_1 = \frac{16}{9} + \frac{16}{15}\gamma^2, \quad f_2 = -\frac{256}{81} - \frac{128}{45}\gamma^2, \tag{15}$$
$$g_2 = \frac{176}{27} + \frac{352}{45}\gamma^2 + \frac{48}{35}\gamma^4,$$
$$\hat{\varphi} = \hat{x}\hat{\Phi}_1 + \hat{x}^{3/2}\hat{\Phi}_2.$$

В дальнейшем при рассмотрении численных примеров в качестве базисных значений параметров пучка примем величины, близкие к указанным в

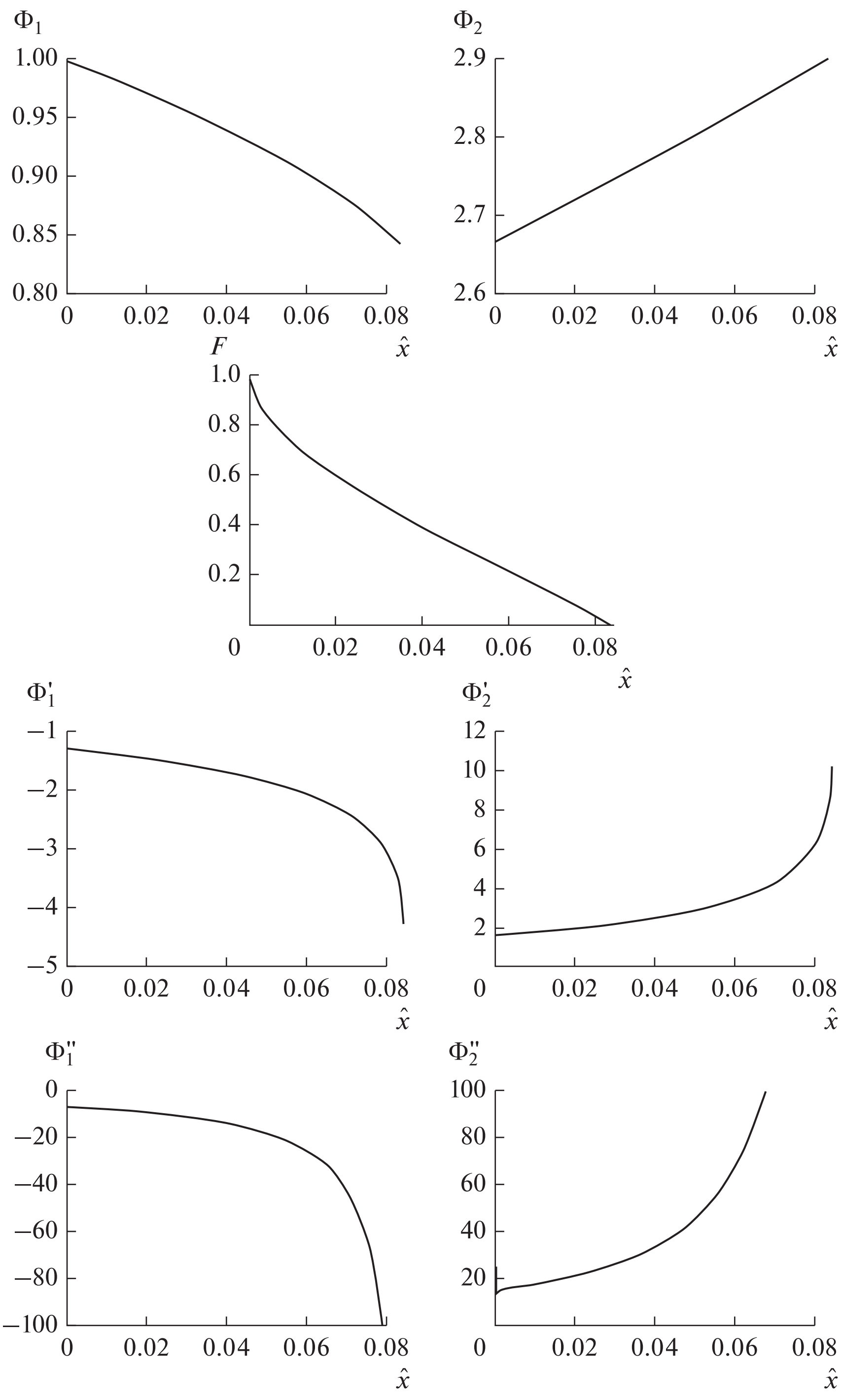

Рис. 1. Функции Φ_1, Φ_2 с первыми и вторыми производными и функция F для диода.

работе [4], посвященной описанию электронно-оптической системы планарного гиротрона

$$\varphi_* = 50 \text{ кВ}, \quad V_* = 9.4\times10^7 \text{ м/с},$$
$$H_* = 4.24\times10^4 \text{ А/м}, \quad J_* = 41.5 \text{ А/см}^2; \qquad (16)$$
$$\overline{E} = 0.6, \quad \overline{H} = 2.9, \quad \overline{J} = 0.1,$$

где $\overline{H}$ – поле на катоде.

Плоский диод. На рис. 1 приведены функции $\hat\Phi_1$, $\hat\Phi_1'$, $\hat\Phi_1''$; $\hat\Phi_2$, $\hat\Phi_2'$, $\hat\Phi_2''$ и F, полученные при интегрировании уравнений (13). Значение $\hat{x}_*$ при этом составляет

$$\hat{x}_* = 0.083877. \qquad (17)$$

Для плоского диода в T-режиме существует аналитическое решение в параметрической форме,

Таблица 1. Возможные параметры диода при $\alpha = 2$

$\overline{E}$	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.15
$\overline{J}$	0.509	0.354	0.226	0.127	0.0566	0.0318
$\overline{x}$	0.899	1.079	1.348	1.798	2.697	3.596
J, А/см^2	21	14.7	9.4	5.3	2.4	1.3

описываемое не содержащими значений $\overline{J}$, $\overline{E}$ универсальными зависимостями от τ:

$$\frac{\overline{J}^2}{\overline{E}^3}\overline{x}^{\text{ex}} = \hat{x}^{\text{ex}} = \frac{1}{2}\tau^2\left(\frac{1}{3}\tau + 1\right),$$
$$\frac{\overline{J}^2}{\overline{E}^4}\overline{\varphi}^{\text{ex}} = \hat{\varphi}^{\text{ex}} = \frac{1}{2}\tau^2\left(\frac{1}{2}\tau + 1\right)^2, \tag{18}$$
$$\frac{1}{\overline{E}}\frac{d\overline{\varphi}^{\text{ex}}}{d\overline{x}^{\text{ex}}} = \frac{\tau^2 + 3\tau + 2}{\tau + 2}.$$

Нормировав потенциал φ на потенциал анода φ_A ($\overline{\varphi}_A = 1$), получим значения параметра τ_A, расстояния $\overline{x}_A^{\text{ex}}$ между электродами и поля $\overline{E}_A^{\text{ex}}$ на аноде:

$$\frac{\overline{J}^2}{\overline{E}^4}\times 1 = \frac{1}{2}\tau_A^2\left(\frac{1}{2}\tau_A + 1\right)^2, \quad \tau_A = \sqrt{1 + 2\alpha} - 1,$$
$$\alpha = \frac{\overline{J}\sqrt{2}}{\overline{E}^2}, \quad \overline{x}_A^{\text{ex}} = \frac{\overline{E}^3}{\overline{J}^2}\hat{x}_A^{\text{ex}}, \tag{19}$$
$$\hat{x}_A^{\text{ex}} = \frac{1}{3}\left[1 + (\alpha - 1)\sqrt{1 + 2\alpha}\right],$$
$$\frac{1}{\overline{E}}\overline{E}_A^{\text{ex}} = \sqrt{1 + 2\alpha}.$$

Нормировки (6) для решения в форме (7) с выделенной особенностью отличаются от нормировок точного решения (18) множителем 8 в знаменателе:

$$\hat{x} = \hat{x}^{\text{ex}}/8, \quad \hat{\varphi} = \hat{\varphi}^{\text{ex}}/8. \tag{20}$$

Выполнение условия (14) вводит ограничение на величину параметра α и связь составляющих его физических параметров $\overline{J}$, $\overline{E}$.

Значению $\hat{x}_*$ из (17) соответствует величина α_*, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\alpha_* - 1\right)\sqrt{1 + 2\alpha_*} + 1 = 24\hat{x}_*, \quad \alpha_* = 1.5058. \tag{21}$$

Из формул (19) находим прочие параметры диода в этом случае:

$$\tau_{A*} = \sqrt{1 + 2\alpha_*} - 1 = 1.002898,$$
$$\hat{x}_{A*}^{\text{ex}} = \frac{1}{3}\left[1 + \left(\alpha_* - 1\right)\sqrt{1 + 2\alpha_*}\right] = 0.671022,$$
$$\hat{x}_* = \hat{x}_{A*}^{\text{ex}}/8 = 0.083877, \tag{22}$$
$$\hat{\varphi}_*^{\text{ex}} = \frac{1}{2}\tau_{A*}^2\left(\frac{1}{2}\tau_{A*} + 1\right)^2 = 1.133717,$$

причем в силу того, что величина $\hat{x}_*$ взята из условия (14), а не из нормировки на φ_A в (19), потенциал при τ_{A*} получился бóльшим единицы.

Хотя соотношения (13) при $\hat{x} > \hat{x}_*$ не имеют смысла, однако ошибку δ их приближенного решения в этой области можно оценить, сравнивая величины $\hat{\varphi}$ из (15) и $\hat{\varphi}^{\text{ex}}$ из (18):

$$\hat{\varphi} = \hat{x}\left(f_0 + f_1\hat{x} + f_2\hat{x}^2\right) + \hat{x}^{3/2}\left(g_0 + g_1\hat{x} + g_2\hat{x}^2\right),$$
$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^{ex}/8, \quad \delta = \left|\left(\hat{\varphi} - \hat{\varphi}^{ex}\right)/\hat{\varphi}^{ex}\right|. \tag{23}$$

Ниже приведены значения этой характеристики при разных величинах α:

α	1.5058	2	3	4
δ,%	0.3	1.06	5.63	17.7

Для $\alpha = 2$ при ошибке порядка 1% межэлектродный интервал простирается до $\hat{x}^{\text{ex}} = 1.08$ вместо $\hat{x}^{\text{ex}} = 0.671022$ из (22). В табл. 1 приведены возможные значения величин $\overline{J}$, $\overline{E}$, $\overline{x}$ для этого случая в исходных нормировках (5), а также размерная плотность тока в А/см^2. Для вычисления $\overline{x}$ использованы соотношения

$$\overline{x} = \frac{\overline{E}^3}{\overline{J}^2}\hat{x}_A = \frac{\overline{E}^3}{\overline{J}^2}\frac{1}{3}\left[1 + (\alpha - 1)\sqrt{1 + 2\alpha}\right],$$
$$\alpha = 2, \quad \overline{x} = \frac{\overline{E}^3}{\overline{J}^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}, \quad \overline{J} = \frac{\alpha\overline{E}^2}{\sqrt{2}}, \tag{24}$$
$$\frac{\overline{E}^3}{\overline{J}^2} = \frac{1}{2\overline{E}}, \quad \overline{x} = \frac{1}{6}\frac{1 + \sqrt{5}}{\overline{E}}.$$

Малое значение ошибки δ при $\alpha = 1.5058$ (см. выше) позволяет вычислить величину $\hat{x}_*$ на основе асимптотик для функций $\hat{\Phi}_1$, $\hat{\Phi}_2$ из (15). Оно оказывается равным $\hat{x}_* = 0.0887$ и отличается от значения, полученного в результате интегрирования системы (13), на 5.75%.

Плоский магнетрон. Точное решение в параметрической форме приведено в [5] и содержит величину γ, образованную комбинацией физических параметров J, E, H задачи:

$$\hat{x}^{\text{ex}} = 8\gamma^3\hat{x} = \tau - \sin\tau + \gamma(1 - \cos\tau), \quad \gamma = \overline{E}\overline{H}/\overline{J},$$
$$\hat{\varphi}^{\text{ex}} = 16\gamma^4\hat{\varphi} = (1 - \cos\tau + \gamma\sin\tau)^2 + (\hat{x}^{\text{ex}})^2. \tag{25}$$

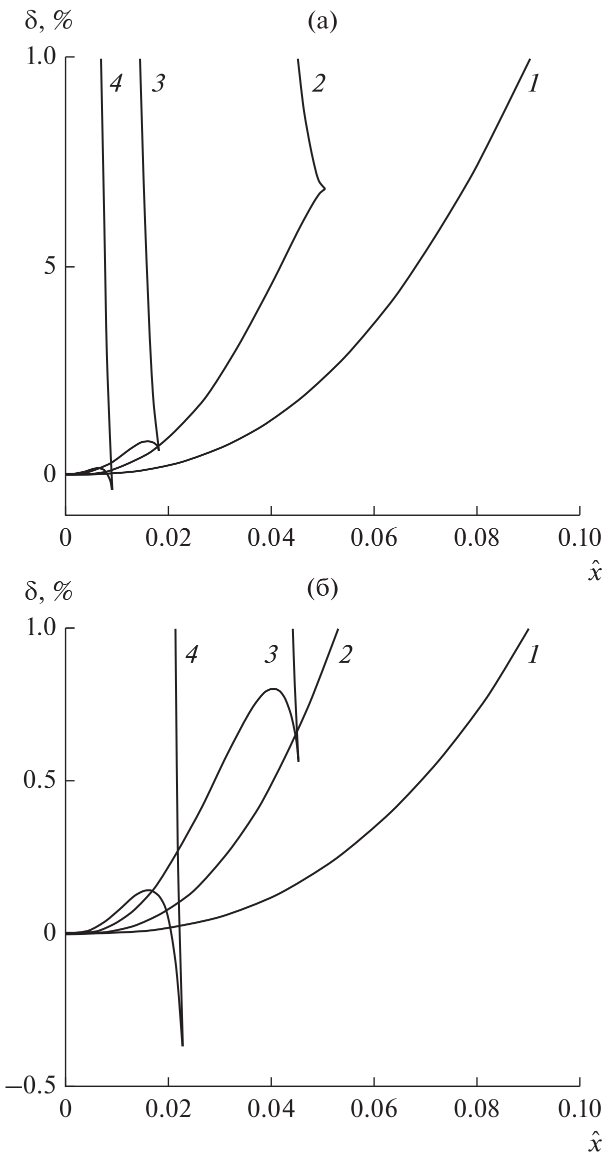

Рис. 2. Относительная ошибка δ приближенного решения для магнетрона при $\gamma = 1, 2, 3, 4$ в диапазоне $\delta = 0...10\%$ (а) и $\delta = -0.4...1\%$ (б).

На рис. 2а, 2б представлено соотношение (значения δ) точного решения (25) и приближенного решения

$$\hat{\varphi} = \hat{x}\hat{\Phi}_1 + \hat{x}^{3/2}\hat{\Phi}_2, \quad \hat{\Phi}_1 = f_0 + f_1\hat{x} + f_2\hat{x}^2, \quad \hat{\Phi}_2 = g_0 + g_1\hat{x} + g_2\hat{x}^2 \tag{26}$$

с параболической аппроксимацией функций $\hat{\Phi}_1$, $\hat{\Phi}_2$ при разных значениях γ. Ниже приведена оценка величины $\hat{x}$, при котором ошибка формы (26) не превышает 1%:

γ	1	2	3	4
$\hat{x}$	0.09	0.054	0.043	0.02

При наличии магнитного поля параболическая аппроксимация в форме (26) обеспечивает ошибку, не превышающую 1%, на незначительной части Δ межэлектродного пространства. Так, для $\gamma = 1$, $\bar{J} = 0.764$, $\bar{H} = 1.27$ при $\hat{x}_A^{\text{ex}} = 1.788$ эта часть составляет $\Delta = 5\%$; при $\gamma = 3$, $\bar{J} = 0.34$, $\bar{H} = 2.55$ величина Δ составляет 0.16%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2005. Т. 50. № 7. С. 875.
2. *Брауде С.Я.* // ЖЭТФ. 1935. Т. 5. № 7. С. 621.
3. *Брауде С.Я.* // ЖТФ. 1940. Т. 10. № 3. С. 217.
4. *Manuilov V.N., Zaslavsky V.Yu., Ginzburg N.S. et al.* // Phys. of Plasmas. 2014. V. 21. № 2. P. 023106.
5. *Сыровой В.А.* Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.