РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2022, том 67, № 6, с. 615–624

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

ГЕОМЕТРИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

В. А. Сыровой*

ВЭИ – филиал ФГУП "РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина", ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

**E-mail: red@cplire.ru*

Поступила в редакцию 15.03.2021 г.
После доработки 15.03.2021 г.
Принята к публикации 26.03.2021 г.

В системе координат, связанной с заранее неизвестными трубками тока, построена геометризованная модель трехмерных потенциальных релятивистских электронных пучков во внешнем магнитном поле при использовании в качестве продольной координаты действия (потенциала обобщенного импульса). Для двумерных течений проведена декомпозиция уравнений пучка, позволяющая синтезировать непараксиальные потоки с заданными формой катода и распределением плотности тока эмиссии или электрического поля.

DOI: 10.31857/S0033849422060195

ВВЕДЕНИЕ

Геометризованная теория, основанная на введении заранее неизвестной неортогональной системы координат x^i $(i = 1, 2, 3)$, связанной с траекториями или трубками тока, в наиболее полном виде изложена в монографиях [1, 2]. Там же приведено минимальное количество сведений из тензорного анализа и дифференциальной геометрии координатных поверхностей, необходимое для понимания и использования результатов этого подхода.

При синтезе непараксиальных потоков на базовой траектории или трубке тока роль продольной координаты играет [1, 2] длина дуги l соответствующей кривой или любая функция l. По этой причине удобно говорить о l-представлении или l-варианте теории. В работе [3] при тестировании двумерных геометризованных моделей на полном наборе точных решений уравнений пучка с аддитивным и мультипликативным разделением переменных обнаружено, что точность приближенного решения может возрастать, если в качестве продольной координаты x^1 использовать потенциал электрического поля φ: $x^1 = \varphi$. При этом подходе делается еще один шаг от физической постановки к полной геометризации задачи, сводящейся к нахождению системы координат (ее метрического тензора g_{ik}), а модель естественно назвать φ-вариантом теории [4–6].

Релятивистские потоки с потенциальным вектором $\vec{P}$ обобщенного импульса $\vec{P} = \nabla W$ позволяют сформулировать еще один вариант модели с потенциалом W (действием) в качестве продольной координаты (W-представление).

Зависимость точности приближенного решения от способа измерения продольной координаты известна, помимо [3], в теории антипараксиальных разложений [1, 2] (понятие оптимального параметра, логарифм радиуса в классических решениях И. Лэнгмюра для цилиндрического и сферического диодов). Кроме того, в работе [3] обнаружено существенное влияние на точность решения способа отсчета поперечной координаты.

Построение W-варианта геометризованной теории, связанной, как и предыдущие модели [1, 2, 4–6], с действительными характеристиками [7] системы дифференциальных уравнений интенсивного электронного пучка в частных производных, которое является целью работы, поставляет новый материал, относящийся к формулировке наиболее эффективных приближенных моделей синтеза плотных непараксиальных потоков, обладающих не меньшими возможностями [8–10], чем численные модели.

Частным случаем потенциального течения является электронный пучок с катодом, экранированным от магнитного поля.

1. УРАВНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОТОКА

Трехмерные течения. Стационарный потенциальный моноэнергетический пучок в произвольной системе координат x^i с метрическим тензором g_{ik} описывается уравнениями движения и уравнениями Максвелла для самосогласованного электромагнитного поля. В релятивистской нормировке [1, 2], исключающей из уравнений все физические константы используемой системы единиц, имеем

$$
\begin{gathered}
P_i = p_i + A_i = W_{,i}, \quad p_i = (1+\tilde{\varphi})\,v_i; \\
\varphi(2+\tilde{\varphi}) = g_{ik}p^i p^k; \quad \sqrt{g}H^1 = A_{3,2} - A_{2,3}, \\
\sqrt{g}H^2 = A_{1,3} - A_{3,1}, \quad \sqrt{g}H^3 = A_{2,1} - A_{1,2}; \\
H_{3,2} - H_{2,3} = \sqrt{g}\tilde{\rho}v^1, \quad H_{1,3} - H_{3,1} = \sqrt{g}\tilde{\rho}v^2, \\
H_{2,1} - H_{1,2} = \sqrt{g}\tilde{\rho}v^3; \quad \left(\sqrt{g}g^{ik}\varphi_{,i}\right)_{,k} = \sqrt{g}\rho; \\
H_i = g_{ik}H^k, \quad H^i = g^{ik}H_k; \quad g = \det g_{ik}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Замыкается система (1) тремя тождествами Ляме, содержащими вторые производные по продольной координате от элементов g_{22}, g_{33}, g_{23} метрического тензора, которые выражают факт эвклидовости пространства и приведены в [4].

Помимо уравнений (1) полезны следующие из них уравнение сохранения тока, уравнения для $\operatorname{div}\vec{H}$ и $\operatorname{rot}\vec{P}$:

$$
\begin{gathered}
\left(\sqrt{g}\rho v^i\right)_{,i} = 0, \quad \left(\sqrt{g}H^i\right)_{,i} = 0; \\
P_{3,2} - P_{2,3} = 0, \quad P_{1,3} - P_{3,1} = 0, \quad P_{2,1} - P_{1,2} = 0.
\end{gathered} \tag{2}
$$

В формулах (1), (2) использованы следующие обозначения: $\vec{p}$ – импульс частицы; φ, ρ – скалярный потенциал электрического поля и плотность пространственного заряда; $\vec{H}$, $\vec{A}$ – напряженность магнитного поля и векторный потенциал; g^{ik} – контравариантный метрический тензор; тильдой отмечены члены, исчезающие в нерелятивистском пределе; индекс после запятой означает частную производную по соответствующей координате:

$$
\varphi_{,i} \equiv \partial\varphi/\partial x^i, \quad H_{1,3} \equiv \partial H_1/\partial x^3. \tag{3}
$$

Не ограничивая общности, доопределим векторный потенциал $\vec{A}$ условием

$$
A_1 \equiv 0. \tag{4}
$$

Диагональные элементы метрического тензора g_{11}, g_{22}, g_{33} удобно определить через функции h_k, становящиеся в случае ортогональной системы коэффициентами Ляме:

$$
g_{11} = h_1^2, \quad g_{22} = h_2^2, \quad g_{33} = h_3^2. \tag{5}
$$

Геометризованные уравнения пучка для потенциальных потоков при наличии магнитного поля возможны только в варианте с трубками тока $x^2 = \text{const}$, так как координатные линии $x^1 = W$ не совпадают с траекториями:

$$
\begin{gathered}
v^2 \equiv 0, \quad p^1 = (1+\tilde{\varphi})\,v^1, \quad p^2 = 0, \\
p^3 = (1+\tilde{\varphi})\,v^3.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Введем косоугольные проекции L, M, N вектора $\vec{H}$ и u, w вектора скорости $\vec{v}$ на касательные к координатным осям

$$
\begin{gathered}
L = h_1H^1, \quad M = h_2H^2, \quad N = h_3H^3, \\
u = h_1v^1, \quad w = h_3v^3.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Детерминант метрического тензора определен выражением

$$
\begin{gathered}
g = h_1^2h_2^2h_3^2\left(\sin^2\theta_{23} - \cos^2\theta_{12} - \cos^2\theta_{13} + \right. \\
\left. + 2\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{23}\right) = h_1^2h_2^2h_3^2\delta^2, \\
\cos\theta_{ab} = g_{ab}/(h_ah_b),
\end{gathered} \tag{8}
$$

где θ_{ab} – угол между осями x^a и x^b.

2. СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ

Эмиссия в ρ*-режиме.* В l-варианте теории [1, 2] при эмиссии в ρ-режиме структура метрики и параметров потока определена рядами по $l^{1/3}$ с главными членами вида

$$
\begin{gathered}
g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{23} \sim l^0; \quad g_{12}, g_{13} \sim l^{1/3}; \\
\varphi, \varphi_{,2}, \varphi_{,3} \sim l^{4/3}, \quad \rho \sim l^{-2/3}, \\
u \sim l^{2/3}, \; w \sim l, \; W \sim l^{5/3}.
\end{gathered} \tag{9}
$$

При переходе от x^1 к новой продольной координате $\bar{x}^1 = W(x^i)$ прежние координаты выражаются через новые при помощи соотношений

$$
\begin{gathered}
x^1 = f\left(W, x^2, x^3\right), \quad x^2 = \bar{x}^2, \quad x^3 = \bar{x}^3; \\
dx^1 = f_{,W}dW + f_{,2}dx^2 + f_{,3}dx^3.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Квадрат расстояния $(ds)^2$ между двумя бесконечно близкими точками определяет элементы метрического тензора $\bar{g}_{ik}$ в новой системе. Продифференцировав первое выражение (10) по x^1, x^2, x^3, найдем значения производных в дифференциале dx^1:

$$
\begin{gathered}
1 = f_{,W}W_{,1}, \; 0 = f_{,W}W_{,2} + f_{,2}, \; 0 = f_{,W}W_{,3} + f_{,3}; \\
f_{,W} = \frac{1}{W_{,1}}, \; f_{,2} = -\frac{W_{,2}}{W_{,1}}, \; f_{,3} = -\frac{W_{,3}}{W_{,1}}.
\end{gathered} \tag{11}
$$

В результате метрика в системе $\bar{x}^i$ определяется выражениями

$$
\begin{gathered}
(ds)^2 = g_{ik}dx^i dx^k = \bar{g}_{ik}d\bar{x}^i d\bar{x}^k,\\
\bar{g}_{11} = \frac{g_{11}}{W_{,1}^2},\ \ \bar{g}_{22} = g_{11}\frac{W_{,2}^2}{W_{,1}^2} - 2g_{12}\frac{W_{,2}}{W_{,1}} + g_{22},\\
\bar{g}_{33} = g_{11}\frac{W_{,3}^2}{W_{,1}^2} - 2g_{13}\frac{W_{,3}}{W_{,1}} + g_{33},\\
\bar{g}_{23} = g_{11}\frac{W_{,2}W_{,3}}{W_{,1}^2} - g_{12}\frac{W_{,3}}{W_{,1}} - g_{13}\frac{W_{,2}}{W_{,1}} + g_{23},\\
\bar{g}_{12} = -g_{11}\frac{W_{,2}}{W_{,1}^2} + g_{12}\frac{1}{W_{,1}},\\
\bar{g}_{13} = -g_{11}\frac{W_{,3}}{W_{,1}^2} + g_{13}\frac{1}{W_{,1}}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Учитывая формулы (9), убеждаемся, что параметром антипараксиальных разложений вблизи катода будет $W^{1/5}$, а главные члены, соответствующие (9), имеют вид (черту опускаем)

$$
\begin{gathered}
h_1 \sim W^{-2/5},\ \ h_2 \sim W^0,\ \ h_3 \sim W^0,\ \ g_{23} \sim W^0,\\
g_{12} \sim W^{-1/5},\ \ g_{13} \sim W^{-1/5};\ \ u \sim W^{2/5},\\
w \sim W^{3/5},\ \ \rho \sim W^{-2/5},\ \ \varphi \sim W^{4/5}.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Таким образом, при переходе к $x^1 = W$ метрика получилась сингулярной, причем в отличие от φ-варианта теории [4–6] в бесконечность на катоде обращается не только g_{11}, но и недиагональные элементы g_{12}, g_{13}.

Асимптотики (13) не противоречат известному факту старта частиц с нулевой начальной скоростью по нормали к эквипотенциальному катоду $x^1 = W = 0$ (далее – $W \equiv x$):

$$
\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{h_1 h_2} \sim x^{1/5},\ \ \cos\theta_{13} = \frac{g_{13}}{h_1 h_3} \sim x^{1/5}. \tag{14}
$$

Для полной и гауссовой кривизн катода справедливы выражения [1, 2]

$$
\begin{gathered}
T = \kappa_1 + \kappa_2 = -\frac{1}{2h_1 G}\left(g_{33}g_{22,1} - 2g_{23}g_{23,1} + g_{22}g_{33,1}\right),\\
K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{1}{4h_1^2 G}\left[g_{22,1}g_{33,1} - \left(g_{23,1}\right)^2\right],\\
G = g_{22}g_{33} - g_{23}^2,
\end{gathered}
\tag{15}
$$

где κ_1, κ_2 – главные кривизны поверхности. Из формул (15) видно, что они принимают конечные значения, если разложения для функций h_2, h_3, g_{23} имеют вид

$$
\begin{gathered}
h_2 = b_0\left(1 + \bar{b}_3 x^{3/5} + \bar{b}_4 x^{4/5} + \ldots\right),\\
h_3 = c_0\left(1 + \bar{c}_3 x^{3/5} + \bar{c}_4 x^{4/5} + \ldots\right),\\
g_{23} = d_0\left(1 + \bar{d}_3 x^{3/5} + \bar{d}_4 x^{4/5} + \ldots\right).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

В соответствии с (13) для прочих искомых функций справедливы разложения

$$
\begin{gathered}
h_1 = x^{-2/5}a_0\left(1 + \bar{a}_1 x^{1/5} + \bar{a}_2 x^{2/5} + \ldots\right),\\
g_{12} = x^{-1/5}f_0\left(1 + \bar{f}_1 x^{1/5} + \bar{f}_2 x^{2/5} + \ldots\right),\\
u = x^{2/5}U_2\left(1 + \bar{U}_3 x^{1/5} + \bar{U}_4 x^{2/5} + \ldots\right),\\
w = x^{3/5}U_2\left(\bar{W}_3 + \bar{W}_4 x^{1/5} + \bar{W}_5 x^{2/5} + \ldots\right),\\
\varphi = x^{4/5}\varphi_4\left(1 + \bar{\varphi}_5 x^{1/5} + \bar{\varphi}_6 x^{2/5} + \ldots\right),\\
\rho = x^{-2/5}\rho_0\left(1 + \bar{\rho}_1 x^{1/5} + \bar{\rho}_2 x^{2/5} + \ldots\right),\\
L = L_0 + L_1 x^{1/5} + L_2 x^{2/5} + \ldots,\\
\delta = \delta_0\left(1 + \bar{\delta}_2 x^{2/5} + \bar{\delta}_3 x^{3/5} + \ldots\right).
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Элемент g_{13} имеет разложение, подобное разложению для g_{12}; компоненты M, N магнитного поля представимы рядами, однотипными с рядом для L с коэффициентами M_k, N_k.

Эмиссия в T-режиме. При эмиссии, ограниченной температурой, ряды идут по полуцелым степеням l с главными членами, описываемыми формулами:

$$
\begin{gathered}
g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{23} \sim l^0; g_{12}, g_{13} \sim l^{1/2};\ \ \varphi, \varphi_{,2}, \varphi_{,3} \sim l,\\
\rho \sim l^{-1/2},\ \ u \sim l^{1/2},\ \ w \sim l,\ \ W \sim l^{3/2}.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Параметром разложений при переходе к $x \equiv W$ будет $x^{1/3}$ при следующих асимптотиках искомых функций:

$$
\begin{gathered}
h_1 = x^{-1/3}a_0\left(1 + \bar{a}_1 x^{1/3} + \bar{a}_2 x^{2/3} + \ldots\right),\\
h_2 = b_0\left(1 + \bar{b}_2 x^{2/3} + \bar{b}_3 x^{3/3} + \ldots\right),\\
h_3 = c_0\left(1 + \bar{c}_2 x^{2/3} + \bar{c}_3 x^{3/3} + \ldots\right),\\
g_{23} = d_0\left(1 + \bar{d}_2 x^{2/3} + \bar{d}_3 x^{3/3} + \ldots\right),\\
g_{12} = f_0\left(1 + \bar{f}_1 x^{1/3} + \bar{f}_2 x^{2/3} + \ldots\right),\\
u = x^{1/3}U_1\left(1 + \bar{U}_2 x^{1/3} + \bar{U}_3 x^{2/3} + \ldots\right),\\
w = x^{2/3}U_1\left(\bar{W}_2 + \bar{W}_3 x^{1/3} + \bar{W}_4 x^{2/3} + \ldots\right),\\
\varphi = x^{2/3}\varphi_2\left(1 + \bar{\varphi}_3 x^{1/3} + \bar{\varphi}_4 x^{2/3} + \ldots\right),\\
\rho = x^{-1/3}\rho_0\left(1 + \bar{\rho}_1 x^{1/3} + \bar{\rho}_2 x^{2/3} + \ldots\right),\\
L = L_0 + L_1 x^{1/3} + L_2 x^{2/3} + \ldots,\\
\delta = \delta_0\left(1 + \bar{\delta}_2 x^{2/3} + \bar{\delta}_3 x^{3/3} + \ldots\right).
\end{gathered}
\tag{19}
$$

3. УРАВНЕНИЯ W-ВАРИАНТА ГЕОМЕТРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ

Трехмерные потоки в магнитном поле. Переход к $x^1 \equiv W$ не меняет числа уравнений и искомых функций: четырнадцать уравнений в (1) при пятнадцати подлежащих определению функциях, шесть из которых — элементы g_{ik}, позволяют использовать систему x^i с нулевым элементом g_{13}:

$$g_{13} \equiv 0. \tag{20}$$

Выбор (20) при симметричных направлениях x^2, x^3 объясняется тем, что при переходе к двумерным потокам (осесимметричным и плоским) циклическая координата x^3 ортогональна осям x^1, x^2 в плоскости течения (меридиональной в первом случае):

$$g_{13} = g_{23} = 0. \tag{21}$$

Для элементов контравариантного метрического тензора g^{ik} и детерминанта g_{ik} получаем

$$\begin{gathered}
g = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \delta^2, \quad \delta^2 = 1 - \cos^2\theta_{12} - \cos^2\theta_{23}, \\
g^{11} = \frac{1}{h_1^2}\frac{\sin^2\theta_{23}}{\delta^2}, \quad g^{22} = \frac{1}{h_2^2}\frac{1}{\delta^2}, \\
g^{33} = \frac{1}{h_3^2}\frac{\sin^2\theta_{12}}{\delta^2}, \quad g^{12} = -\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\cos\theta_{12}}{\delta^2}, \\
g^{13} = 0, \quad g^{23} = -\frac{1}{h_2 h_3}\frac{\cos\theta_{23}}{\delta^2}.
\end{gathered} \tag{22}$$

Уравнения (1) принимают вид

$$\begin{gathered}
P_1 = p_1 = 1, \quad P_2 = p_2 + A_2 = 0, \quad P_3 = p_3 + A_3 = 0; \\
p_1 = h_1 p_u, \quad p_2 = \frac{g_{12}}{h_1} p_u + \frac{g_{23}}{h_3} p_w, \quad p_3 = h_3 p_w; \\
p_u = (1 + \tilde{\varphi}) u, \quad p_w = (1 + \tilde{\varphi}) w; \\
\varphi(2 + \tilde{\varphi}) = p_u^2 + p_w^2; \quad h_2 h_3 \delta L = A_{3,2} - A_{2,3}, \\
h_1 h_3 \delta M = -A_{3,1}, \quad h_1 h_2 \delta N = A_{2,1}; \\
H_1 = h_1 (L + M\cos\theta_{12}), \\
H_2 = h_2 (M + L\cos\theta_{12} + N\cos\theta_{23}), \\
H_3 = h_3 (N + M\cos\theta_{23}); \\
H_{3,2} - H_{2,3} = h_2 h_3 \delta \tilde{\rho} u, \quad H_{1,3} - H_{3,1} = 0, \\
H_{2,1} - H_{1,2} = h_1 h_2 \delta \tilde{\rho} w; \\
\left[\frac{1}{\delta}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\sin^2\theta_{23}\varphi_{,1} - h_3\cos\theta_{12}\varphi_{,2}\right)\right]_{,1} + \\
+ \left[\frac{1}{\delta}\left(-h_3\cos\theta_{12}\varphi_{,1} + \frac{h_1 h_3}{h_2}\varphi_{,2} - h_1\cos\theta_{23}\varphi_{,3}\right)\right]_{,2} + \\
+ \left[\frac{1}{\delta}\left(-h_1\cos\theta_{23}\varphi_{,2} + \frac{h_1 h_2}{h_3}\sin^2\theta_{12}\varphi_{,3}\right)\right]_{,3} = h_1 h_2 h_3 \delta\rho,
\end{gathered} \tag{23}$$

где p_u, p_w — косоугольные проекции импульса на оси x^1, x^3.

Вместо двух первых уравнений (2) имеем

$$\begin{gathered}
(h_2 h_3 \delta\rho u)_{,1} + (h_1 h_2 \delta\rho w)_{,3} = 0, \\
(h_2 h_3 \delta L)_{,1} + (h_1 h_3 \delta M)_{,2} + (h_1 h_2 \delta N)_{,3} = 0.
\end{gathered} \tag{24}$$

Уравнения для rot $\vec{P}$ из (2) запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}
(h_3 p_w)_{,2} - \left(\frac{g_{12}}{h_1} p_u + \frac{g_{23}}{h_3} p_w\right)_{,3} + h_2 h_3 \delta L = 0, \\
(h_3 p_w)_{,1} - h_1 h_3 \delta M = 0, \\
\left(\frac{g_{12}}{h_1} p_u + \frac{g_{23}}{h_3} p_w\right)_{,1} + h_1 h_2 \delta N = 0.
\end{gathered} \tag{25}$$

Трехмерные электростатические потоки. При отсутствии магнитного поля ось x^1 совпадает с траекторией и формулы (22) принимают вид

$$\begin{gathered}
g_{12} \equiv 0, \quad \delta = \sin\theta_{23}, \quad g^{11} = \frac{1}{h_1^2}, \\
g^{22} = \frac{1}{h_2^2 \sin^2\theta_{23}}, \quad g^{33} = \frac{1}{h_3^2 \sin^2\theta_{23}}, \\
g^{23} = -\frac{1}{h_2 h_3}\frac{\cos\theta_{23}}{\sin^2\theta_{23}}, \quad g^{12} = g^{13} = 0,
\end{gathered} \tag{26}$$

а вместо уравнений (23), (24) имеем

$$h_1 u = 1, \quad w = 0, \quad 2\varphi = u^2, \tag{27}$$

$$\begin{gathered}
\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\sin\theta_{23}\varphi_{,1}\right)_{,1} + \left(\frac{h_1 h_3}{h_2 \sin\theta_{23}}\varphi_{,2} - h_1 \operatorname{ctg}\theta_{23}\varphi_{,3}\right)_{,2} + \\
+ \left(-h_1 \operatorname{ctg}\theta_{23}\varphi_{,2} + \frac{h_1 h_2}{h_3}\sin\theta_{23}\varphi_{,3}\right)_{,3} = \\
= h_1 h_2 h_3 \sin\theta_{23}\rho, \\
(h_2 h_3 \sin\theta_{23}\rho u)_{,1} = 0.
\end{gathered}$$

Дополняющие их условия эвклидовости пространства определены соотношениями

$$\begin{gathered}
2(g_{22,11} + g_{11,22}) - g^{11}(g_{11,2})^2 - \\
- g_{22,1}\left(g^{22} g_{22,1} + 2g^{23} g_{23,1}\right) - g^{33}(g_{23,1})^2 - \\
+ g^{11} g_{11,1} g_{22,1} - g_{22,2}\left(g^{22} g_{11,2} + g^{23} g_{11,3}\right) - \\
-(2g_{23,2} - g_{22,3})\left(g^{23} g_{11,2} + g^{33} g_{11,3}\right) = 0, \\
2(g_{33,11} + g_{11,33}) - g^{11}(g_{11,3})^2 - \\
- g_{33,1}\left(g^{33} g_{33,1} + 2g^{23} g_{23,1}\right) - g^{22}(g_{23,1})^2 - \\
- g^{11} g_{11,1} g_{33,1} - g_{33,3}\left(g^{33} g_{11,3} + g^{23} g_{11,2}\right) - \\
-(2g_{23,3} - g_{33,2})\left(g^{23} g_{11,3} + g^{22} g_{11,2}\right) = 0, \\
2(g_{23,11} + g_{11,23}) - g^{11} g_{11,2} g_{11,3} - \\
- g_{22,1}\left(g^{22} g_{23,1} + g^{23} g_{33,1}\right) - \\
- g_{23,1}\left(g^{23} g_{23,1} + g^{33} g_{33,1}\right) - g^{11} g_{11,1} g_{23,1} - \\
- g_{11,2}\left(g^{22} g_{22,3} + g^{23} g_{33,2}\right) - \\
- g_{11,3}\left(g^{23} g_{22,3} + g^{33} g_{33,2}\right) = 0.
\end{gathered} \tag{28}$$

Двумерные потоки в магнитном поле. Наличие циклической координаты (азимута в осесимметричном случае и декартовой координаты для плоских течений) приводит к ортогональности осей x^1, x^2 и x^3:

$$g_{13} = g_{23} = 0,\ \delta = \sin\theta_{12},\quad g^{11} = \frac{1}{h_1^2 \sin^2\theta_{12}},$$
$$g^{22} = \frac{1}{h_2^2\sin^2\theta_{12}},\ g^{33} = \frac{1}{h_3^2}, \tag{29}$$
$$g^{12} = -\frac{\cos\theta_{12}}{h_1 h_2 \sin^2\theta_{12}},\ g^{13} = g^{23} = 0.$$

Двумерный пучок описывается уравнениями

$$\begin{gathered} h_1 p_u = 1,\ \ \varphi(2+\tilde\varphi) = p_u^2 + p_w^2,\\ h_2 h_3 \sin\theta_{12} L = A_{3,2},\ \ h_1 h_3 \sin\theta_{12} M = -A_{3,1},\\ h_1 h_2 \sin\theta_{12} N = A_{2,1};\ \ H_1 = h_1(L + M\cos\theta_{12}),\\ H_2 = h_2(M + L\cos\theta_{12}),\ \ H_3 = h_3 N;\\ H_{3,2} = h_2 h_3 \sin\theta_{12}\tilde\rho u,\ \ H_{3,1} = 0,\\ H_{2,1} - H_{1,2} = h_1 h_2 \sin\theta_{12}\tilde\rho w;\\ \left[\frac{1}{\sin\theta_{12}}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\varphi_{,1} - h_3\cos\theta_{12}\varphi_{,2}\right)\right]_{,1} +\\ + \left[\frac{1}{\sin\theta_{12}}\left(-h_3\cos\theta_{12}\varphi_{,1} + \frac{h_1 h_3}{h_2}\varphi_{,2}\right)\right]_{,2} =\\ = h_1 h_2 h_3 \sin\theta_{12}\rho. \end{gathered} \tag{30}$$

Уравнения (24) принимают вид

$$\begin{gathered} h_2 h_3 \sin\theta_{12}\rho u = (h_2 h_3)_0 J,\\ (h_2 h_3 \sin\theta_{12} L)_{,1} + (h_1 h_3 \sin\theta_{12} M)_{,2} = 0, \end{gathered} \tag{31}$$

где J – плотность тока эмиссии; индекс нуль относит величины к катоду.

Уравнения (25) для $\operatorname{rot}\vec P$ определены соотношениями

$$\begin{gathered} (h_3 p_w)_{,2} + h_2 h_3 \sin\theta_{12} L = 0,\\ (h_3 p_w)_{,1} - h_1 h_3 \sin\theta_{12} M = 0,\\ \left[(1+\tilde\varphi)\frac{g_{12}}{h_1^2}\right]_{,1} + h_1 h_2 \sin\theta_{12} N = 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Условия эвклидовости пространства для двумерных течений состоят из двух уравнений:

$$\begin{gathered} 2(g_{22,11} + g_{11,22}) + g^{11}(g_{11,2})^2 - g^{22}(g_{22,1})^2 -\\ - g^{11} g_{11,1} g_{22,1} - g^{22} g_{11,2} g_{22,2} = 0,\\ 2g_{33,1} - g^{33}(g_{33,1})^2 - g^{11} g_{11,1} g_{33,1} + g^{22} g_{11,2} g_{33,2} = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Элемент g_{33} метрического тензора для осесимметричных течений известен: $g_{33} = R^2 = y^2 + z^2$, для плоских потоков $h_3 = 1$.

Двумерные электростатические потоки. Течения этого вида могут быть описаны в ортогональной системе координат:

$$\begin{gathered} h_1 u = 1,\ \ 2\varphi = u^2,\\ \left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\varphi_{,1}\right)_{,1} + \left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\varphi_{,2}\right)_{,2} = h_1 h_2 h_3 \rho,\\ h_2 h_3 \rho u = (h_2 h_3)_0 J. \end{gathered} \tag{34}$$

Уравнения (34) дополняются соотношениями (33).

Формулы, в общем случае связывающие криволинейные и декартовы координаты, необходимые после построения решения в системе x^i, приведены в работе [4].

4. РЕШЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ СТАРТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПОТОКОВ

Построение без потери общности локального решения уравнений пучка на основе выявленных выше асимптотик элементов g_{ik} и параметров потока доказывает непротиворечивость предлагаемой модели, дает описание зоны вблизи сингулярной стартовой поверхности и позволяет установить возможные произвольные элементы, обращение которых в нуль способствует упрощению результатов.

Эмиссия в ρ*-режиме.* Начнем рассмотрение с уравнения Пуассона и интеграла энергии в (23), а также уравнения сохранения тока из (24). Первый член в первой квадратной скобке в уравнении Пуассона имеет порядок $x^{-4/5}$, в то время как все остальные слагаемые в левой части – порядок x^0 и, таким образом, не участвуют в балансах вплоть до этого порядка. Приравнивая слагаемые порядка $x^{-4/5}$, используя интеграл энергии и определение плотности тока эмиссии, найдем выражения для первых коэффициентов разложений (17)

$$\begin{gathered} \rho_0 = \frac{2}{25}\frac{\sin^2\theta_{23}}{a_0^2\delta_0^2}U_2^2,\quad 2\varphi_4 = U_2^2,\\ J = \rho_0 U_2;\quad U_2 = \left(\frac{25}{2}\frac{a_0^2\delta_0^2}{\sin^2\theta_{23}}J\right)^{1/3}. \end{gathered} \tag{35}$$

Следующая тройка соотношений позволяет выразить коэффициенты $\bar U_3$, $\bar\varphi_5$, $\bar\rho_1$ через $\bar a_1$:

$$\bar\rho_1 + \bar U_3 = 0,\quad \bar\varphi_5 = 2\bar U_3,\quad \bar\rho_1 + \bar a_1 = \frac{5}{2}\left(\bar\varphi_5 - \frac{4}{5}\bar a_1\right); \tag{36}$$
$$\bar U_3 = \frac{1}{2}\bar a_1,\quad \bar\varphi_5 = \bar a_1,\quad \bar\rho_1 = -\frac{1}{2}\bar a_1.$$

Уравнение для p_1 из (23) приводит к тому, что все функции в (36) обращаются в нуль

$$\begin{gathered} a_0 U_2 = 1,\ \ \bar a_1 + \bar U_3 = 0,\\ \bar a_1 = \bar U_3 = \bar\varphi_5 = \bar\rho_1 = 0. \end{gathered} \tag{37}$$

Рассмотрим первые коэффициенты разложения полной T и гауссовой K кривизн поверхности $x^1 = \mathrm{const}$ из (15) в окрестности $x^1 = 0$:

$$\begin{gathered} T = T_0 + T_1 x^{1/5} + \ldots, \quad K = K_0 + \ldots; \\ a_0 T_0 = -\frac{3}{5}\frac{1}{\sin^2\theta_{23}}\left(\bar{b}_3 + \bar{c}_3 - \bar{d}_3\cos^2\theta_{23}\right), \\ a_0 T_1 = -\frac{4}{5}\frac{1}{\sin^2\theta_{23}}\left(\bar{b}_4 + \bar{c}_4 - \bar{d}_4\cos^2\theta_{23}\right), \\ a_0^2 K_0 = \frac{9}{25}\frac{1}{\sin^2\theta_{23}}\left(\bar{b}_3\bar{c}_3 - \frac{1}{4}\bar{d}_3\cos^2\theta_{23}\right). \end{gathered} \tag{38}$$

Главные кривизны κ_1, κ_2 связаны с T, K двумя соотношениями, включающими три функции $\bar{b}_3$, $\bar{c}_3$, $\bar{d}_3$. Не теряя общности, последнюю из них можно принять равной нулю

$$\bar{d}_3 \equiv 0. \tag{39}$$

Кривизны κ_1, κ_2 при этом определены формулами

$$\begin{gathered} a_0\kappa_{1,2} = -\frac{3}{10}\frac{1}{\sin^2\theta_{23}}\times \\ \times\left[\left(\bar{b}_3 + \bar{c}_3\right) \pm \sqrt{\bar{b}_3^2 + 2\bar{b}_3\bar{c}_3\left(1 - 2\sin^2\theta_{23}\right) + \bar{c}_3^2}\right]. \end{gathered} \tag{40}$$

Для функции δ из (8) получаем

$$\begin{gathered} \delta_0 = \sin\theta_{23}, \quad \bar{\delta}_2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\theta_{23}}\left(\frac{f_0}{a_0 b_0}\right)^2, \\ \bar{\delta}_3 = \frac{5}{3}a_0 T_0\cos^2\theta_{23} + 2\bar{\delta}_2, \\ \bar{\delta}_4 = -\left(\frac{5}{4}a_0 T_1 + \bar{d}_4\right)\cos^2\theta_{23} + \\ + \left(2\bar{f}_2 + \bar{f}_1^2 - 2\bar{a}_2\right)\bar{\delta}_2 - \frac{1}{2}\bar{\delta}_2^2. \end{gathered} \tag{41}$$

Функция U_2 принимает более простой вид

$$U_2 = \left(\frac{25}{2}J\right)^{1/5}. \tag{42}$$

Приравнивая в соотношениях из (23), (24) члены более высокого порядка малости, получаем системы уравнений для вычисления коэффициентов с возрастающими индексами. Уравнение Пуассона дает

$$\begin{gathered} \frac{9}{2}\bar{\varphi}_6 - 3\left(\bar{a}_2 + \bar{\delta}_2\right) = \bar{\rho}_2 + \bar{a}_2 + \bar{\delta}_2, \\ 7\bar{\varphi}_7 - 4\left(\bar{a}_3 + \bar{\delta}_3 + \bar{b}_3 + \bar{c}_3\right) + 8\frac{1}{\sin^2\theta_{23}}\left(\bar{b}_3 + \bar{c}_3\right) = \\ = \bar{\rho}_3 + \bar{a}_3 + \bar{\delta}_3 + \bar{b}_3 + \bar{c}_3. \end{gathered} \tag{43}$$

Интеграл энергии порождает соотношения

$$\bar{\varphi}_6 = 2\bar{U}_4 + \bar{W}_3^2, \quad \bar{\varphi}_7 = 2\bar{U}_5 + 2\bar{W}_3\bar{W}_4. \tag{44}$$

Уравнение сохранения тока приводит к следующим балансам:

$$\begin{gathered} \bar{\rho}_2 + \bar{U}_4 + \bar{\delta}_2 = 0, \\ \bar{\rho}_3 + \bar{U}_5 + \bar{\delta}_3 + \bar{b}_3 + \bar{c}_3 = 0. \end{gathered} \tag{45}$$

Второе уравнение для $\mathrm{rot}\,\vec{P}$ из (25) связывает функции W_k и M_k:

$$\begin{gathered} -\frac{3}{5}\bar{W}_3 + \delta_0\bar{M}_0 = 0, \quad -\frac{4}{5}\bar{W}_4 + \delta_0\bar{M}_1 = 0; \\ \bar{M}_0 \equiv M_0 / U_2^2, \end{gathered} \tag{46}$$

в то время как третье уравнение служит для определения коэффициентов разложения элемента g_{12}:

$$\begin{gathered} \frac{3}{5}\left(\bar{W}_3\cos\theta_{23} + \frac{f_0}{a_0 b_0}\right) + \delta_0\bar{N}_0 = 0, \\ \frac{4}{5}\left(\bar{W}_4\cos\theta_{23} + \frac{f_0}{a_0 b_0}\bar{f}_1\right) + \delta_0\bar{N}_1 = 0. \end{gathered} \tag{47}$$

Уравнение для $\mathrm{div}\vec{H}$ позволяет выразить функции L_k через коэффициенты разложений компонент касательного к катоду магнитного поля с меньшими индексами

$$\begin{gathered} \frac{3}{5}b_0 c_0\delta_0 L_3 + \left(a_0 c_0\delta_0 M_0\right)_{,2} + \left(a_0 b_0\delta_0 N_0\right)_{,3} = 0, \\ \frac{4}{5}b_0 c_0\delta_0 L_4 + \left(a_0 c_0\delta_0 M_1\right)_{,2} + \left(a_0 b_0\delta_0 N_1\right)_{,3} = 0, \\ b_0 c_0\delta_0\left(L_5 + \bar{\delta}_2 L_3\right) + \left[a_0 c_0\delta_0\left(M_2 + M_0\left(\bar{a}_2 + \bar{\delta}_2\right)\right)\right]_{,2} + \\ + \left[a_0 b_0\delta_0\left(N_2 + N_0\left(\bar{a}_2 + \bar{\delta}_2\right)\right)\right]_{,3} = 0. \end{gathered} \tag{48}$$

Первое уравнение для $\mathrm{rot}\vec{H}$ из (23) связывает компоненты M_0, N_0 на поверхности катода:

$$\begin{gathered} \left[c_0\left(M_0\cos\theta_{23} + N_0\right)\right]_{,2} - \\ - \left[b_0\left(N_0\cos\theta_{23} + M_0\right)\right]_{,3} = b_0 c_0\delta_0\tilde{J}, \end{gathered} \tag{49}$$

второе и третье уравнения образуют системы для определения коэффициентов M_k, N_k при известных L_k, f_k:

$$\begin{gathered} M_1\cos\theta_{23} + N_1 = 0, \quad M_2\cos\theta_{23} + N_2 = 0, \\ \left(M_3 - \bar{b}_3 M_0\right)\cos\theta_{23} + N_3 + \bar{c}_3 N_0 = 0; \\ N_1\cos\theta_{23} + M_1 + \frac{f_0}{a_0 b_0}L_3 = 0, \\ N_2\cos\theta_{23} + M_2 + \frac{f_0}{a_0 b_0}\left(L_4 + \bar{f}_1 L_3\right) = 0, \\ \left(N_3 - \bar{c}_3 N_0\right)\cos\theta_{23} + M_3 + \bar{b}_3 M_0 + \\ + \frac{f_0}{a_0 b_0}\left(L_5 - \bar{a}_2 L_3 + \bar{f}_1 L_4 + \bar{f}_2 L_3\right). \end{gathered} \tag{50}$$

Первое уравнение для $\mathrm{rot}\vec{A}$ из (23) приводит к следующим равенствам:

$$L_0 = 0, \quad L_1 = L_2 = 0. \tag{51}$$

Обращение в нуль нормальной компоненты магнитного поля на катоде является условием реализации потенциального течения, на что впервые было указано в работе [11], где также отмечен факт старта частиц по нормали к эквипотенциальному катоду при нулевой начальной скорости.

Уравнение для p_1 в (23) связывает коэффициенты a_k, U_k:

$$a_0 U_2 = 1, \ \ \bar{a}_2 + \bar{U}_4 = 0, \ \ \bar{a}_3 + \bar{U}_5 = 0. \tag{52}$$

Компоненты векторного потенциала определены через скорость w на основании равенств $P_2 = P_3 = 0$

$$\begin{gathered} A_{20} = A_{21} = A_{22} = 0, \ \ \frac{A_{23}}{U_2} + \frac{f_0}{a_0} + \frac{d_0}{c_0}\bar{W}_3 = 0; \\ A_{30} = A_{31} = A_{32} = 0, \ \ \frac{A_{33}}{U_2} + c_0 \bar{W}_3 = 0. \end{gathered} \tag{53}$$

Первое уравнение (48) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{1}{a_0} L_3 = -\frac{5}{3}\left\{ \frac{1}{b_0} M_{0,2} + \frac{1}{c_0} N_{0,3} + \right. \\ + \left[\frac{(\sin\theta_{23})_{,2}}{b_0 \sin\theta_{23}} - k_{21} - k_{22} \right] M_0 + \\ \left. + \left[\frac{(\sin\theta_{23})_{,3}}{\sin\theta_{23}} - k_{31} - k_{32} \right] N_0 \right\}; \\ k_{21} = -\frac{a_{0,2}}{a_0 b_0}, \ \ k_{22} = -\frac{c_{0,2}}{b_0 c_0}; \ \ k_{31} = -\frac{a_{0,3}}{a_0 c_0}, \\ k_{32} = -\frac{b_{0,3}}{b_0 c_0}. \end{gathered} \tag{54}$$

Величины в формулах (54) имеют ясный геометрический или физический смысл: k_{21}, k_{22} и k_{31}, k_{32} – главные кривизны поверхностей $x^2 = \mathrm{const}$ и $x^3 = \mathrm{const}$ при $x^1 = 0$; L_3/a_0, $M_{0,2}/b_0$, $N_{0,3}/c_0$ – ортогональные проекции градиентов функций L, M, N на касательные к координатным осям при $x^1 = 0$; аналогичный смысл у агрегатов $(\sin\theta_{23})_{,2}/b_0$, $(\sin\theta_{23})_{,3}/c_0$.

Тождества Ляме служат для определения функций b_k, c_k, d_k, начиная с $k = 4$.

Разрешая последовательно уравнения (43)–(47) относительно искомых функций, имеем

$$\begin{gathered} \bar{W}_3 = \frac{5}{3}\sin\theta_{23}\bar{M}_0, \ \ \bar{U}_4 = \frac{3}{14}\bar{\delta}_2 - \frac{9}{28}\bar{W}_3^2, \\ \bar{\varphi}_6 = \frac{3}{7}\bar{\delta}_2 + \frac{5}{14}\bar{W}_3^2, \ \ \bar{\rho}_2 = -\frac{17}{14}\bar{\delta}_2 + \frac{9}{28}\bar{W}_3^2, \\ \bar{a}_2 = -\frac{3}{14}\bar{\delta}_2 + \frac{9}{28}\bar{W}_3^2, \ \ \frac{f_0}{a_0 b_0} = -\frac{5}{3}\sin\theta_{23}\bar{H}_{n3}, \\ \bar{\delta}_2 = -\frac{25}{18}\bar{H}_{n3}^2, \ \ \bar{H}_{n3} = \bar{N}_0 + \bar{M}_0\cos\theta_{23}, \end{gathered} \tag{55}$$

где H_{n3} – ортогональная проекция магнитного поля на касательную к оси x^3.

Первая пара уравнений (50) относительно M_1, N_1 позволяет определить эти функции

$$M_1 = \frac{5}{3}\frac{1}{\sin\theta_{23}} L_3 \bar{H}_{n3}, \quad N_1 = -\frac{5}{3}\mathrm{ctg}\theta_{23} L_3 \bar{H}_{n3}. \tag{56}$$

Следующая группа соотношений описывает параметры с возросшими на единицу индексами

$$\begin{gathered} \bar{W}_4 = \frac{25}{12}\bar{L}_3\bar{H}_{n3}, \ \ \bar{U}_5 = \frac{1}{3}a_0 T_0 - \frac{175}{72}\sin\theta_{23}\bar{L}_3\bar{M}_0\bar{H}_{n3}, \\ \bar{\varphi}_7 = \frac{2}{3}a_0 T_0 + \frac{3}{5}\bar{W}_3\bar{W}_4, \ \ \bar{\rho}_3 = -\bar{U}_5 + \frac{5}{3}a_0 T_0, \\ \bar{a}_3 = -\bar{U}_5, \ \ \bar{f}_1 = 0, \ \ \bar{\delta}_3 = -\frac{5}{3}a_0 T_0\cos^2\theta_{23}. \end{gathered} \tag{57}$$

Эмиссия в T-режиме. Главные члены, описывающие потенциал, скорость и действие вблизи катода при эмиссии, ограниченной температурой, определены формулами

$$\varphi = El, \ \ u = \sqrt{2E}l^{1/2}, \ \ W = \int u dl = \frac{2}{3}\sqrt{2E}l^{3/2}, \tag{58}$$

где E – электрическое поле при $x^1 = 0$. Выражения (56) позволяют вычислить коэффициент φ_2 в асимптотике потенциала из (19):

$$\begin{gathered} l = \left(\frac{9}{8E}\right)^{1/3} W^{2/3}, \ \ \varphi = \left(\frac{9E^2}{8}\right)^{1/3} W^{2/3}, \\ \varphi_2 = \left(\frac{9E^2}{8}\right)^{1/3}, \ \ 2\varphi_2 = U_1^2, \ \ \rho_0 = \frac{J}{U_1}, \ \ a_0 = \frac{1}{U_1}. \end{gathered} \tag{59}$$

Уравнения Пуассона, сохранения тока, интеграл энергии и равенство $p_1 = 1$ из (23) приводят к первой группе соотношений

$$\begin{gathered} \frac{1}{3}\varphi_2\left(\bar{\varphi}_3 - \frac{2}{3}\bar{a}_1\right) = a^2\rho_0, \ \ \bar{\rho}_1 + \bar{U}_2 = 0, \\ \bar{\varphi}_3 = 2\bar{U}_2, \ \ \bar{a}_1 + \bar{U}_2 = 0, \end{gathered} \tag{60}$$

разрешая которые относительно искомых функций, имеем

$$\bar{U}_2 = \frac{9}{4}\frac{J}{U_1^5}, \quad \bar{\varphi}_3 = 2\bar{U}_2, \quad \bar{\rho}_1 = -\bar{U}_2, \quad \bar{a}_1 = -\bar{U}_2. \quad (61)$$

Следующая система балансов принимает вид

$$\frac{2}{3}\varphi_2\left\{\frac{4}{3}\bar{\varphi}_4 - \bar{a}_1\bar{\varphi}_3 + \frac{2}{3}\left(-\bar{a}_2 + \bar{a}_1^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{\sin^2\theta_{23}}\left(\bar{b}_2 + \bar{c}_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{a_0 b_0}\right)^2\right]\right\} = a_0^2\rho_0\left(\bar{a}_1 + \bar{\rho}_1\right),$$
$$\bar{\rho}_2 + \bar{U}_3 + \bar{\rho}_1\bar{U}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2 + \bar{\delta}_2 = 0,$$
$$\bar{\varphi}_4 = 2\bar{U}_3 + \bar{U}_2^2 + \frac{3}{2}\tilde{\varphi}_2, \quad (62)$$
$$\bar{a}_2 + \bar{U}_3 + \bar{a}_1\bar{U}_2 + \tilde{\varphi}_2 = 0;$$
$$\bar{\delta}_2 = -\left[\operatorname{ctg}^2\theta_{23}\left(\bar{b}_2 + \bar{c}_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{a_0 b_0}\right)^2\right],$$
$$\frac{1}{\sin^2\theta_{23}}\left(\bar{b}_2 + \bar{c}_2\right) = -\frac{3}{2}a_0 T_0.$$

Удовлетворяющие ей функции описываются формулами

$$\bar{U}_3 = -\frac{9}{5}\bar{U}_2^2 + \frac{3}{10}a_0T_0 - \frac{9}{40}\sin^2\theta_{23}\bar{H}_{n3}^2 - \frac{4}{5}\tilde{\varphi}_2,$$
$$\bar{\varphi}_4 = -\frac{13}{5}\bar{U}_2^2 + \frac{3}{5}a_0T_0 - \frac{9}{20}\sin^2\theta_{23}\bar{H}_{n3}^2 - \frac{1}{10}\tilde{\varphi}_2,$$
$$\bar{\rho}_2 = \frac{14}{5}\bar{U}_2^2 + \frac{6}{5}a_0T_0 + \frac{27}{20}\sin^2\theta_{23}\bar{H}_{n3}^2 + \frac{4}{5}\tilde{\varphi}_2, \quad (63)$$
$$\bar{a}_2 = \frac{14}{5}\bar{U}_2^2 - \frac{3}{10}a_0T_0 + \frac{9}{40}\sin^2\theta_{23}\bar{H}_{n3}^2 - \frac{1}{5}\tilde{\varphi}_2;$$
$$\bar{H}_{n3} \equiv H_{n3}/U_1^2.$$

Для продольного магнитного поля получаем

$$L_0 = 0, \quad L_1 = 0, \quad \delta_0 = \sin\theta_{23},$$
$$\frac{2}{3}b_0c_0\delta_0L_2 + \left(a_0c_0\delta_0M_0\right)_{,2} + \left(a_0b_0\delta_0N_0\right)_{,3} = 0, \quad (64)$$
$$b_0c_0\delta_0L_3 + \left(a_0c_0\delta_0M_1\right)_{,2} + \left(a_0b_0\delta_0N_1\right)_{,3} = 0.$$

Функции M_0, N_0 удовлетворяют уравнению (49), а для коэффициентов с индексами 1, 2 имеют место связи

$$\frac{d_0}{b_0}M_1 + c_0N_1 = 0, \quad b_0M_1 + \frac{d_0}{c_0}N_1 = 0;$$
$$\frac{d_0}{b_0}M_2 + c_0N_2 = \frac{d_0}{b_0}\bar{b}_2M_0 - c_0\bar{c}_2N_0, \quad (65)$$
$$b_0M_2 + \frac{d_0}{c_0}N_2 = -b_0\bar{b}_2M_0 + \frac{d_0}{c_0}\bar{c}_2N_0.$$

Из уравнений (64), (65) следуют выражения

$$M_1 = N_1 = L_3 = 0,$$
$$M_2 = -\frac{1+\cos^2\theta_{23}}{\sin^2\theta_{23}}\bar{b}_2M_0 + 2\frac{\cos\theta_{23}}{\sin^2\theta_{23}}\bar{c}_2N_0, \quad (66)$$
$$N_2 = 2\frac{\cos\theta_{23}}{\sin^2\theta_{23}}\bar{b}_2M_0 - \frac{1+\cos^2\theta_{23}}{\sin^2\theta_{23}}\bar{c}_2N_0.$$

Коэффициенты разложений элемента g_{12} и компоненты скорости w описываются формулами

$$\frac{f_0}{a_0b_0} = -\frac{3}{2}\sin\theta_{23}\bar{H}_{n3}, \quad \bar{f}_1 = -\frac{8}{3}\bar{U}_2;$$
$$\bar{W}_2 = \frac{3}{2}\sin\theta_{23}\bar{M}_0, \quad \bar{W}_3 = -\sin\theta_{23}\bar{U}_2\bar{M}_0, \quad (67)$$
$$\bar{M}_0 \equiv M_0/U_1^2.$$

Формулы (58)–(67) определяют локальное решение геометризованных уравнений при эмиссии в T-режиме.

5. ДЕКОМПОЗИЦИЯ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПУЧКА

Уравнения геометризованной теории в l-варианте удалось представить [1, 2] в виде соотношения на трубке тока, формально имеющего вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно функции $h_2(x^1)$, в которое поперечная координата x^2 входит как параметр, и системы уравнений первого порядка, выражающих частные производные по x^2 от физических и геометрических параметров пучка через информацию на базовой трубке тока. Тем самым появляется возможность синтеза непараксиальных потоков либо за счет сращивания решения в нескольких узких полосах вблизи поверхности $x^2 = 0$, либо в результате построения высших приближений теории, приводящего к фрагментам тэйлоровских разложений параметров пучка по x^2.

Как первая, так и вторая группы связей выписаны для произвольного значения элемента g_{12} метрического тензора, который в l-варианте теории имеет локальный характер и назначается, исходя из соображений регуляризации решения, обеспечивающей выполнение условий термоэмиссии на стартовой поверхности.

В силу сказанного исходным материалом для декомпозиции уравнений в W-варианте теории являются формулы l-варианта, которые необходимо подвергнуть модификациям, связанным с новым подходом.

Соотношение на трубке тока для потенциальных течений имеет вид

$$\frac{(1+\tilde{\varphi})u^2}{\sin\theta_{12}}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1}-h_2\left(\frac{\theta_{12,1}}{h_1}\right)^2-\frac{\cos\theta_{12}}{h_1}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1}\right\}=$$
$$=\frac{1}{h_1}\left(h_2\sin\theta_{12}\right)_{,1}\times$$
$$\times\left[-\frac{\varphi_{,1}}{h_1}+(1+\tilde{\varphi})k_2\operatorname{tg}\theta w^2+2wM\sin\theta_{12}\right]-$$
$$-wM\sin^2\theta_{12}\frac{h_{2,1}}{h_1}+h_2\sin\theta_{12}\times$$
$$\times\left[-2(1+\tilde{\varphi})\left(k_1^2u^2+k_2^2w^2\right)+\right. \tag{68}$$
$$+(1+\tilde{\varphi})k_1k_2\left(u^2+w^2\right)+k_2\operatorname{tg}\theta\frac{\varphi_{,1}}{h_1}-\frac{1}{h_1}\left(\frac{\varphi_{,1}}{h_1}\right)_{,1}-$$
$$-2\left(k_1uN-k_2wH_{n1}\right)-\frac{1}{1+\tilde{\varphi}}\left(N^2+H_{n1}^2\right)+$$
$$\left.+w\sin\theta_{12}\frac{M_{,1}}{h_1}+\frac{1}{1+\tilde{\varphi}}\tilde{E}_\nu^2\right]+\frac{h_{20}h_{30}J}{h_3(1+\tilde{\varphi})^2u},$$
$$E_\nu=(1+\tilde{\varphi})\left(k_1u^2+k_2w^2\right)+uN-wH_{n1},$$
$$H_{n1}=L+M\cos\theta_{12},\quad k_2=-\cos\theta/h_3,$$

где k_1, k_2 – главные кривизны трубки тока, причем k_2 отвечает за осесимметричность; H_{n1} – ортогональная проекция магнитного поля на касательную к оси x^1; E_ν – нормальное электрическое поле на трубке тока; θ – угол наклона образующей трубки тока к продольной декартовой оси z.

Часть эволюционной системы, относящаяся к геометрическим величинам, описывается формулами

$$z_{,2}=h_2\cos\vartheta,\quad R_{,2}=h_2\sin\vartheta,\quad \vartheta=\theta+\theta_{12},$$
$$\theta_{,2}=\frac{1}{\sin\theta_{12}}\frac{h_{2,1}}{h_1}+h_2\cos\theta_{12}k_1-\frac{\operatorname{ctg}\theta_{12}}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1},$$
$$h_{1,2}=-h_1h_2\sin\theta_{12}k_1+\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1},$$
$$k_{1,2}=h_2\cos\theta_{12}\frac{k_{1,1}}{h_1}+h_2\sin\theta_{12}k_1^2+$$
$$+\frac{1}{\sin\theta_{12}}\left\{\frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1}-\right. \tag{69}$$
$$\left.-h_2\left(\frac{\theta_{12,1}}{h_1}\right)^2-\frac{\cos\theta_{12}}{h_1}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1}\right\},$$
$$k_{2,2}=-k_2\operatorname{tg}\theta\times$$
$$\times\left\{h_2\cos\theta_{12}k_1+\frac{1}{\sin\theta_{12}}\left[\frac{h_{2,1}}{h_1}-\frac{\cos\theta_{12}}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right]\right\}.$$

Поперечные производные от физических параметров потока с учетом особенностей W-представления определены выражениями

$$\varphi_{,2}=h_2E,\quad E=\sin\theta_{12}E_\nu+\cos\theta_{12}\frac{\varphi_{,1}}{h_1},$$
$$p_{u,2}=-\frac{h_{1,2}}{h_1^2},\quad p_{w,2}=-h_2\left(p_w\sin\vartheta+h_3\sin\theta_{12}L\right). \tag{70}$$

Производная $E_{\nu,2}$ легко получается из определения нормального поля и приведенных уравнений эволюционной системы. Для компонент магнитного поля имеем

$$\left(h_1H_{n1}\right)_{,2}=\left(h_2H_{n2}\right)_{,1}-\left(h_2h_3\right)_0\tilde{J}\frac{h_1w}{h_3u},$$
$$\left(\sin\theta_{12}M\right)_{,2}=-\left(\frac{h_{1,2}}{h_1}+\frac{h_{3,1}}{h_3}\right)\left(\sin\theta_{12}M\right)- \tag{71}$$
$$-\frac{1}{h_1h_3}\left(h_2h_3\sin\theta_{12}L\right)_{,1},$$
$$\left(h_3N\right)_{,2}=\left(h_2h_3\right)_0\tilde{J};\quad h_{3,1}=h_1\sin\theta.$$

Принципиальное отличие рассматриваемой модели от l-варианта состоит в том, что недиагональный элемент метрического тензора g_{12} является искомой функцией, лишенной статуса локальности. В l-представлении азимутальная скорость w при $x^2=0$ описывается уравнением первого порядка, не зависящим от соотношения на трубке тока, и определена компонентой M магнитного поля. В W-варианте теории задание продольного импульса p_u при $x^2=0$ приводит к выражению для функции h_1

$$h_1=1/\left[(1+\tilde{\varphi})u\right] \tag{72}$$

и связывает в систему три уравнения: соотношение на трубке тока, уравнение для изменения азимутального импульса p_w в продольном направлении (второе уравнение (32))

$$p_{w,1}=h_1\sin\theta_{12}M-\frac{h_1}{h_3}\sin\theta p_w \tag{73}$$

и трансформированное уравнение из (32), описывающее эволюцию функции g_{12}:

$$\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}=-\frac{h_1h_2}{1+\tilde{\varphi}}\left[\left(\frac{1+\tilde{\varphi}}{h_1}\right)_{,1}\cos\theta_{12}+h_1\sin\theta_{12}N\right]. \tag{74}$$

При известных компонентах импульса потенциал определен выражением

$$\varphi=\sqrt{1+p_u^2+p_w^2}-1, \tag{75}$$

которое путем дифференцирования по x^1 может быть преобразовано в уравнение для $\varphi_{,1}$ при $x^2=0$.

Встречающиеся в уравнениях (68)–(71) производные от g_{12}, θ_{12}, $\sin\theta_{12}$, $\cos\theta_{12}$ исключим при помощи соотношений, следующих из формулы (74):

$$(\cos\theta_{12})_{,1} = -\sin\theta_{12}\theta_{12,1}, \quad (\sin\theta_{12})_{,1} = \cos\theta_{12}\theta_{12,1},$$

$$\theta_{12,1} = \frac{1}{h_2\sin\theta_{12}}\left[\cos\theta_{12}h_{2,1} - \left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right],$$

$$N_{,1} = h_1 k_2 \mathrm{tg}\theta N,$$

$$\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1} = \left(\frac{h_{2,1}}{h_2} - \frac{\tilde{\varphi}_{,1}}{1+\tilde{\varphi}}\right)\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1} - \tag{76}$$

$$- \frac{h_2}{1+\tilde{\varphi}}\left\{\left(\frac{1+\tilde{\varphi}}{h_1}\right)_{,1}\cos\theta_{12} + \right.$$

$$+\left[-\sin\theta_{12}\left(\frac{1+\tilde{\varphi}}{h_1}\right)_{,1} + h_1\cos\theta_{12}N\right]\theta_{12,1} +$$

$$\left. + \sin\theta_{12}N\left(h_{1,1} + h_1^2 k_2 \mathrm{tg}\theta\right)\right\}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен третий вариант геометризованной теории, описывающей плотные потенциальные релятивистские электронные пучки при использовании в качестве продольной координаты действия (потенциала обобщенного импульса). Для двумерных потоков проведена декомпозиция уравнений пучка, которые представлены как соотношение на трубке тока $x^2 = \mathrm{const}$, связывающее функции продольной координаты x^1, и система эволюционных уравнений. Первое имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно элемента g_{22} метрического тензора ($h_2 = \sqrt{g_{22}}$), в которое координата x^2 входит как параметр; вторая выражает частные производные по поперечной координате x^2 от геометрических и физических параметров потока через известную информацию на базовой трубке тока $x^2 = 0$.

Подобное представление открывает возможность синтеза непараксиальных пучков либо сшиванием решения в нескольких узких полосах, либо при формулировке фрагментов рядов Тэйлора по поперечной координате в высших приближениях теории.

Как и в φ-формализме (потенциал электрического поля в качестве продольной координаты), модель описывается существенно нелинейными дифференциальными соотношениями на трубке тока в неортогональной системе координат в отличие от первого l-варианта теории (продольная координата – произвольная функция длины дуги образующей трубки тока), где неортогональность координат и нелинейность уравнений носили локальный характер.

Использование как потенциала, так и действия для отсчета в продольном направлении меняет структуру исходных уравнений пучка (в φ-варианте уравнение Пуассона становится уравнением первого порядка) и по этой причине не эквивалентно переходу от одной криволинейной системы координат к другой.

Можно предположить, что эффект повышения точности приближенного решения при использовании φ-формализма [3] связан с нелинейным характером уравнений модели.

Определение первых коэффициентов антипараксиальных разложений в W-варианте путем обращения к известным результатам l-представления возможно только в непосредственной близости к катоду, где действие определяется продольной компонентой импульса в силу локально одномерного характера течения. Антипараксиальные разложения W-модели не переходят в разложения l-варианта, как и сами два этих подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сыровой В.А.* Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. *Syrovoy V.A.* Theory of Intense Beams of Charged Particles. US: Elsevier, 2011.
3. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
4. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 6. С. 614.
5. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 502.
6. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 82.
7. *Сыровой В.А.* // РЭ. 1998. Т. 43. № 2. С. 232.
8. *Акимов П.И., Гаврилин А.А., Никитин А.П. и др.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 11. С. 1303.
9. *Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В., Тореев А.И., Шаталина С.А.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 3. С. 344.
10. *Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1126.
11. *Gabor D.* // Proc. IRE. 1945. V. 33. № 11. P. 792.