РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2022, том 67, № 7, с. 693–703

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

ФОРМИРОВАНИЕ ПЛОТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ПРЯМОЙ ОСЬЮ И ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

В. А. Сыровой*

ВЭИ – филиал ФГУП "РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина", ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

**E-mail: red@cplire.ru*

Поступила в редакцию 27.10.2021 г.
После доработки 27.10.2021 г.
Принята к публикации 18.11.2021 г.

Рассмотрены алгоритмы решения трехмерных задач для пучков с прямой осью и произвольным сечением как в точной постановке, так и в рамках параксиального описания. Проанализированы варианты эллиптических сечений и сечений в виде скругленного прямоугольника.

DOI: 10.31857/S0033849422070130

ВВЕДЕНИЕ

Технические устройства с пучком прямоугольного сечения существовали задолго до того, как актуальным стал вопрос теоретического рассмотрения подобных проблем. Ряд диафрагм соответствующей формы решал эту задачу при малой мощности пучка и несущественного с практической точки зрения токоперехвата. В последние десятилетия потоки с прямоугольным или эллиптическим сечением широко используются в мощных приборах СВЧ, а стремление к более высокочастотному диапазону, связанному с миниатюризацией конструкций, требует проведения математического моделирования с высокой точностью. Лобовые численные методы исследования не обеспечивают адекватного описания сингулярных прикатодных зон при эмиссии в ρ- и T-режимах. Существующие теоретические модели трехмерных пучков могут давать либо полное решение проблемы, либо поставлять локальную информацию о поведении формирующих электродов вблизи катода, либо, наконец, определять качественную картину электрического поля в более сложных случаях.

Цель работы – формулировка современного состояния теории формирования трехмерных электронных потоков в наиболее часто встречающемся варианте пучков с прямой осью.

1. МЕТОД РИМАНА

Решение проблемы формирования как в двумерном, так и в трехмерном случаях сводится к эллиптическому уравнению в частных производных второго порядка вида

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+A\frac{\partial\Phi}{\partial x}+B\frac{\partial\Phi}{\partial y}+C\Phi=F \tag{1}$$

с коэффициентами, зависящими от x, y.

Метод Римана, разработанный для уравнений гиперболического типа с действительными характеристиками, модифицирован для эллиптических уравнений и излагается в монографии [1]. Если начальные условия Φ_e и $(\partial\Phi/\partial n)_e$ известны на линии Γ

$$x=x_e(u),\quad y=y_e(u) \tag{2}$$

и G – функция Римана, удовлетворяющая сопряженному уравнению и некоторым условиям на характеристиках, проходящих через точку наблюдения C, то решение задачи описывается выражением

$$\Phi=\operatorname{Re}\Bigg[(\Phi G)_P+\int_0^v\left(G\frac{\partial\Phi}{\partial v}-\Phi\frac{\partial G}{\partial v}+4\Phi G\operatorname{Im}a\right)_e d\xi+4\int_0^v d\eta\int_0^{v-\eta}Gf d\xi\Bigg]. \tag{3}$$

Функции на Γ во внеинтегральном члене и одинарном интеграле, зависящие от u, испытали аналитическое продолжение $u\to u+iv$, $u\to u+i\xi$ соответственно; в двойном интеграле функции от u, v подвергнуты следующей трансформации: $u\to u+i\xi$, $v\to\eta$. Двойной интеграл в (3) не вносит вклад в потенциал и нормальную производную на Γ.

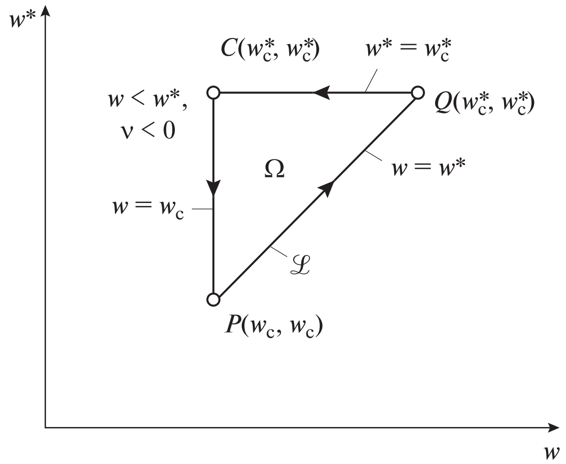

Рис. 1. Характеристический треугольник на псевдоплоскости w, w^*.

"Распрямляющее" отображение с однозначной сеткой ортогональных криволинейных координат u, v с равными коэффициентами Ляме $h_1 = h_2 = h$, переводящее контур Γ в прямую $v = 0$, определено формулами

$$x + iy = x_e(w) + iy_e(w), \quad w = u + iv, \\ w^* = u - iv; \quad \alpha_e = dx_e/du, \quad \beta_e = dy_e/du. \tag{4}$$

Функции a, f в (3) связаны с коэффициентами уравнения (1) соотношениями

$$a = \frac{1}{4}h^2(A + iB)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad f = \frac{1}{4}h^2 F, \\ h^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^{-1} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2. \tag{5}$$

Решение строится в характеристическом треугольнике, изображенном на рис. 1. Для гиперболических уравнений он определяет ограниченную область, в то время как в случае уравнений с мнимыми характеристиками решение "выплескивается" в полупространство – внешность границы пучка.

2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПУЧОК С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Эталонные задачи. Необходимо найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{6}$$

для цилиндрического пучка с определяемым формулами (2) контуром Γ поперечного сечения и условиями на границе вида

$$\varphi_e = z^\nu, \quad \varphi_{ve} \equiv (\partial\varphi/\partial v)_e = 0 \tag{7}$$

с дробным показателем степени ν.

Выполнение интегрального преобразования

$$\varphi(x, y, z) = \int\limits_{(0)}^{\infty} \Phi(x, y; p)\exp(-pz)\,dp \tag{8}$$

с контурным интегралом в комплексной плоскости параметра p (обход особенности в нуле обозначен символом (0)) приводит уравнения для функций Φ, G к уравнению Гельмгольца с соответствующими начальными данными для Φ:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + p^2\Phi = 0, \\ \Phi_e = p^{-\nu-1}/\Gamma(-\nu), \quad \Phi_{ve} = 0, \tag{9}$$

где $\Gamma(-\nu)$ – гамма-функция.

Функцией Римана оказывается функция Бесселя нулевого порядка:

$$G = J_0(pr), \quad r^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2, \tag{10}$$

причем r имеет смысл расстояния от произвольной точки (x, y) до точки наблюдения (x_c, y_c).

Применение формулы Римана (3) и использование известного контурного интеграла Липшица–Ганкеля дает решение задачи в форме, включающей определенный интеграл:

$$\varphi(x, y, z) = z^\nu + \frac{\nu(1-\nu)}{2}\times \\ \times \operatorname{Re}\int\limits_0^v \frac{(x_e - x)\beta_e - (y_e - y)\alpha_e}{(z^2 + r_e^2)^{1-\nu/2}}\times \\ \times F\left(\frac{2-\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}; 2; \frac{r_e^2}{z^2 + r_e^2}\right)d\xi, \tag{11}$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса.

Описанный выше алгоритм не может быть использован при целочисленном значении $\nu = n$. Для условий на Γ вида

$$\varphi_e = a_n z^n, \quad \varphi_{ve} = 0 \tag{12}$$

решение имеет полиномиальную структуру

$$\varphi = \Phi_0 + \Phi_2 z^2 + \ldots + \Phi_{2k-2}z^{2k-2} + a_{2k}z^{2k}, \\ n = 2k; \\ \varphi = \Phi_1 + \Phi_3 z^3 + \ldots + \Phi_{2k-1}z^{2k-1} + a_{2k+1}z^{2k+1}, \\ n = 2k + 1. \tag{13}$$

Функция Римана для этой задачи равна единице $(G = 1)$, а двойной интеграл в формуле Римана (3) удовлетворяет нужным условиям на Γ:

$$\Phi_{n-2l} = -(n - 2l + 2)(n - 2l + 1)\times \\ \times \operatorname{Re}\int\limits_0^v d\eta \int\limits_0^{v-\eta} h^2\Phi_{n-2l+2}\,d\xi. \tag{14}$$

Функции Φ_m вычисляются в порядке убывания индекса при $\Phi_n = a_n$.

Эмиссия в ρ*-режиме*. Решению Чайлда–Лэнгмюра для плоского диода соответствует значение $\nu = 4/3$. В результате формула (11) принимает вид [2]

$$\varphi(x,y,z) = z^{4/3} - \frac{2}{9}\mathrm{Re}\int_0^v \frac{(x_e - x)\beta_e - (y_e - y)\alpha_e}{\left(z^2 + r_e^2\right)^{1/3}} \times F\left(\frac{1}{3},\frac{7}{6};2;\frac{r_e^2}{z^2 + r_e^2}\right)d\xi. \quad (15)$$

Выражение (15) удобно для изучения структуры решения и выполнения численных расчетов.

Локальное уравнение нулевой эквипотенциали в плоскости (X, z) (X – нормаль к Г), построенное на основе (15), описывается формулой

$$X = \left(\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}\right)z + \frac{9}{56}\left(\sin^{-2}\frac{\pi}{8}\right)k_\Gamma z^2 - \frac{153}{6272\sqrt{2}}\left(\sin^{-4}\frac{\pi}{8}\right)k_\Gamma^2 z^3, \quad (16)$$

где k_Γ – кривизна контура.

Эмиссия в T-режиме. Потенциал в плоском диоде в соответствующих нормировках может быть представлен в универсальной параметрической форме [3]:

$$z = \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3, \quad 2\varphi = \left(\tau + \frac{1}{2}\tau^2\right)^2. \quad (17)$$

В явном виде функция $\varphi(z)$ определена рядом по полуцелым степеням z:

$$\varphi = z + \varphi_3 z^{3/2} + \varphi_4 z^2 + \varphi_5 z^{5/2} + \ldots. \quad (18)$$

При сохранении коэффициента φ_7 в (18) и $z = 1$, $\tau = 1.196$ точное значение потенциала $\varphi_{\text{ex}} = 1.826$ из (17) отличается от приближенного $\varphi_{\text{ap}} = 1.813$ из (18) на 0.7%.

Дробные степени в формуле (18) допускают использование алгоритма (11), а для слагаемых с целочисленными степенями z справедливы соотношения (13). В результате суммирования на границе пучка воспроизводится ряд (18), который эквивалентен соотношениям (17) и может быть ими заменен, что приводит к выполнению точных условий на поверхности произвольного цилиндра.

Решение в виде двойного интеграла при эмиссии в ρ*-режиме*. Воспользуемся предложением, высказанным В.Т. Овчаровым в [5] для осесимметричных параксиальных пучков, и представим решение уравнения (6) в виде

$$\varphi = \varphi_i + S, \quad (19)$$

(φ_i – потенциал в потоке), отказавшись от требования параксиальности. Функция S при этом удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -\rho, \quad \rho = \frac{4}{9}z^{-2/3} \quad (20)$$

(ρ – плотность пространственного заряда) и однородным условиям на границе потока.

Двойной интеграл в (3) определяет новую форму решения для цилиндрической вырезки из плоского диода [6]:

$$\varphi = z^{4/3} - \frac{4}{9}\int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \frac{h^2(\zeta,\eta)}{\left(z^2 + r^2\right)^{1/3}} F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6};1;\lambda\right)d\xi,$$
$$\lambda = r^2/\left(z^2 + r^2\right), \quad r^2 = [x(\zeta,\eta) - x(u,v)]^2 + [y(\zeta,\eta) - y(u,v)]^2, \quad (21)$$
$$x + iy = x_e(w) + iy_e(w), \quad \zeta = u + i\xi.$$

3. КОНИЧЕСКИЙ ПУЧОК С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Перейдем в уравнении Лапласа, записанного в сферических координатах r, θ, ψ, к новым переменным ξ, η, ψ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\xi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) = 0,$$
$$\xi = \ln\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}, \quad \eta = \ln\frac{r}{r_0}, \quad (22)$$

где r_0 – радиус катода. В уравнении (22) на псевдоплоскости ξ, ψ выделен двумерный лапласиан с декартовой метрикой.

Конус с произвольным сечением определен параметрическими уравнениями

$$\xi = \xi_e(u), \quad \psi = \psi_e(u);$$
$$\xi + i\psi = \xi_e(w) + i\psi_e(w), \quad w = u + iv,$$
$$\alpha + i\beta = \xi_e'(w) + i\psi_e'(w), \quad h^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad (23)$$
$$\alpha_e = \xi_e'(u), \quad \beta_e = \psi_e'(u).$$

После выполнения интегрального преобразования, аналогичного (8), функции Φ, G удовлетворяют одному уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2} + \frac{P}{\mathrm{ch}^2\xi}\Phi = 0, \quad P = p(p-1), \quad (24)$$

однако выразить G через известные специальные функции не удается. В работе [7] построен асимптотический ряд для функции Римана, нулевое и первое приближение которого определены формулами

$$G = J_0(\lambda) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}\xi_c} r + \lambda \mathrm{th}\xi_c (\xi - \xi_c)\right] J_1(\lambda) + \ldots,$$
$$\lambda = pr/\mathrm{ch}\xi_c, \quad r^2 = (\xi - \xi_c)^2 + (\psi - \psi_c)^2. \tag{25}$$

Этапы построения сводятся к следующему. Будем искать решение в виде ряда

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi) r^k, \quad \bar{\xi} = \xi - \xi_c,$$
$$2k\bar{\xi} f_k' + k^2 f_k = -\left(f_{k-2}'' + P\mathrm{ch}^{-2}\xi f_{k-2}\right). \tag{26}$$

Требование конечности функции G при $r = 0$ выполняется для разложения по четным степеням r, причем функции f_{2k} оказываются полиномами степени k по параметру P:

$$f_{2k}(\xi, \xi_c, P) = \sum_{l=0}^{k} \tau_{2k,l}(\xi, \xi_c) P^l,$$
$$4k\bar{\xi}\tau_{2k,l}' + 4k^2 \tau_{2k,l} = -\tau_{2k-2,l}'' - \mathrm{ch}^{-2}\xi \tau_{2k-2,l-1}. \tag{27}$$

Коэффициенты $\tau_{2k,l}$ представим в виде разложений

$$\tau_{2k,l}(\xi, \xi_c) = \sum_{s=0}^{\infty} \tau_{2k,l,s}(\xi_c) \bar{\xi}^s. \tag{28}$$

Подстановка (28) в уравнение (27) позволяет получить рекуррентные соотношения для коэффициентов бесконечных рядов, суммирование которых приводит к функциям Бесселя в выражении (25) для функции Римана. В результате появляется возможность использовать интеграл Липшица–Ганкеля для выполнения обратного интегрального преобразования, приводящего решение исходной задачи к виду, аналогичному (11).

Потенциал φ_i в потоке описывается хорошо сходящимся рядом по $\eta = \ln r$ [8] с первым членом $\eta^{4/3}$. Как и в случае цилиндра при эмиссии в T-режиме, первые слагаемые в формуле для φ после суммирования могут быть заменены известным точным решением для сферического диода в параметрической форме с функциями Бесселя [9].

Кривизна нулевой эквипотенциали $\varphi = 0$ в плоскости, содержащей нормаль к контуру, определена формулой

$$k = \frac{2}{r_0}\cos\frac{\pi}{8}\left[\frac{17}{30} + \left(\frac{9}{56}\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)k_\Gamma\right]. \tag{29}$$

Угол 67.5° наклона нулевой эквипотенциали к границе пучка оказывается универсальной величиной при эмиссии в ρ-режиме и связан вне зависимости от конфигурации и физических характеристик потока с аналитическим продолжением члена $\eta^{4/3}$.

Решение задачи о формировании биполярных электронно-ионных потоков в виде цилиндра и конуса с произвольными сечениями представлено в работах [10, 11].

4. СЕЧЕНИЕ В ВИДЕ СКРУГЛЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

В работе [12] сформулирован способ построения сечения, которое представляет собой скругленный прямоугольник с гладким контуром, являющимся координатной линией $v = 0$ системы u, v конформного отображения “повышенной гладкости”. Алгоритм состоит в разложении в ряд Лорана подынтегрального выражения в интеграле Кристоффеля–Шварца, осуществляющего отображение внешности прямоугольника на внешность единичного круга, и почленном интегрировании полученного выражения с удержанием n членов:

$$x + iy = c\left(t + \sum_{k=1}^{n} c_k t^{1-2k}\right), \quad t = \exp(-v + iu),$$
$$c_1 = \cos 2\gamma, \quad c_2 = -\frac{1}{6}\left(1 - c_1^2\right), \tag{30}$$
$$c_3 = -\frac{1}{10}c_1\left(1 - c_1^2\right), \quad c_4 = \frac{1}{56}\left(1 - 6c_1^2 + 5c_1^4\right).$$

Здесь c – масштабный множитель; γ – параметр, определяющий отношение сторон a/b прямоугольника. Контур приемлемой конфигурации [12] с $a/b = 1, 2, 10$ получается при $n = 2$, 3, 4 соответственно (рис. 2).

На рис. 3 представлена картина поля в диагональном сечении скругленного квадрата [12], рассчитанная по формуле (14). Поведение эквипотенциалей соответствует картине в плоской пушке Дж. Р. Пирса в области порядка радиуса скругления угла с последующим поворотом кривых к катоду. Рисунок 4 иллюстрирует конфигурацию кривых $\varphi = \mathrm{const}$ в поперечных сечениях $z = \mathrm{const}$, которая в качественном отношении остается той же при $a/b \sim 10$. Исследование скругленных прямоугольных контуров на сфере выполнено в работе [13]. Поскольку уравнение (22) включает двумерный лапласиан по ξ, ψ с декартовой метрикой, аппарат комплексных переменных и конформных отображений может быть использован и на псевдоплоскости ξ, ψ.

Для контура $\xi = \xi_e(u)$, $\psi = \psi_e(u)$ имеем

$$\bar{\xi} + i\psi = c\left(t + \sum_{k=1}^{n} c_k t^{1-2k}\right), \quad t = \exp(-v + iu),$$
$$\bar{\xi} = \xi - \xi_*, \quad \xi_* = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \tag{31}$$

с теми же коэффициентами, что и в (30).

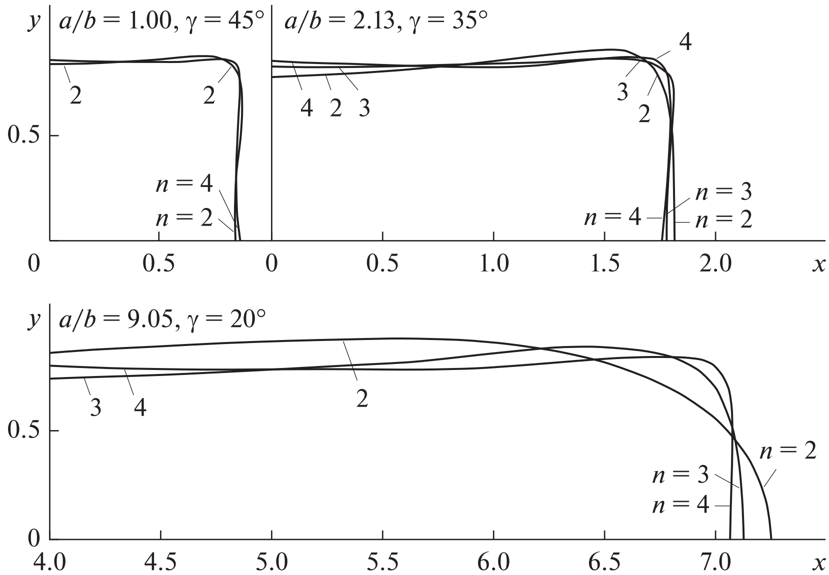

Рис. 2. Контуры скругленных прямоугольников.

"Прямоугольник" на сфере единичного радиуса образован пересечением линий $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, $\psi = \pm\psi_0$, причем переменные θ, ψ играют роль полярного радиуса и азимута. Длины сторон описываются формулами

$$a = \xi_2 - \xi_1, \quad b = 2\psi_0. \tag{32}$$

На рис. 5 изображен "квадрат" $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 60°$, $\psi_0 = 22°$, нулевая аппроксимация "кругом" $\overline{\xi}^2 + \psi^2 = \mathrm{const}$ и скорректированный вариант контура при $n = 4$. Истинная окружность диаметром, равным размеру сечения $\psi = 0$, проведена для сравнения с нулевым приближением. Растяжение контура 3 в 1.206 раз дает приемлемую аппроксимацию исходной кривой, соответствие с которой может быть увеличено при бо̀льших значениях n.

5. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ СЕЧЕНИЕ

Эллипс является нулевой аппроксимацией прямоугольного контура. В фундаментальной работе теории формирования [14] метод разделения переменных использован в двумерных задачах с пучком в виде кругового цилиндра и конуса при эмиссии в ρ-режиме. Решение является точным только в формальном смысле, так как выражено через контурный интеграл в комплексной плоскости параметра p, допускающий исключительно асимптотические оценки [14].

В работе [15] подход [14] распространен на случай эллиптического сечения, причем эллиптическая цилиндрическая система ξ, η, z определена формулами

$$x = \sqrt{b^2 - a^2}\,\mathrm{sh}\xi \sin\eta, \quad y = \sqrt{b^2 - a^2}\,\mathrm{ch}\xi \cos\eta. \tag{33}$$

Начальные данные (7) не зависят от η, поэтому автор искал решение $\varphi = \varphi(\xi, z)$ в форме контурного интеграла с интеграндом в виде бесконечного ряда по функциям Матье $\mathcal{M}_{2m}^{(j)}(\xi)$, описываемым бесконечными рядами из произведений функций Бесселя и Ганкеля. Отсутствие зависимости от η привело к изменению угла наклона эквипотенциали $\varphi = 0$ на контуре вместо постоянного значения $3\pi/8$.

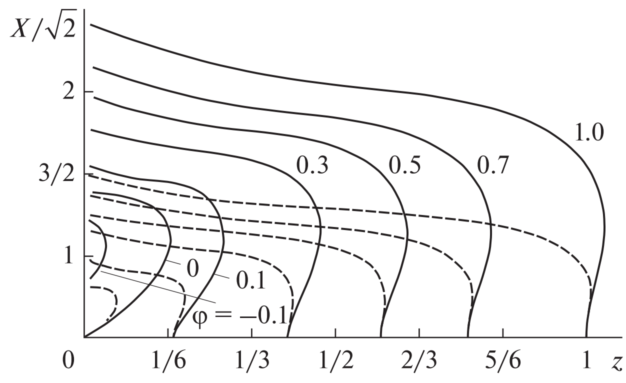

Рис. 3. Эквипотенциальные кривые в диагональном сечении скругленного квадрата при $n = 2$ (сплошные кривые) и $n = 4$ (штриховые).

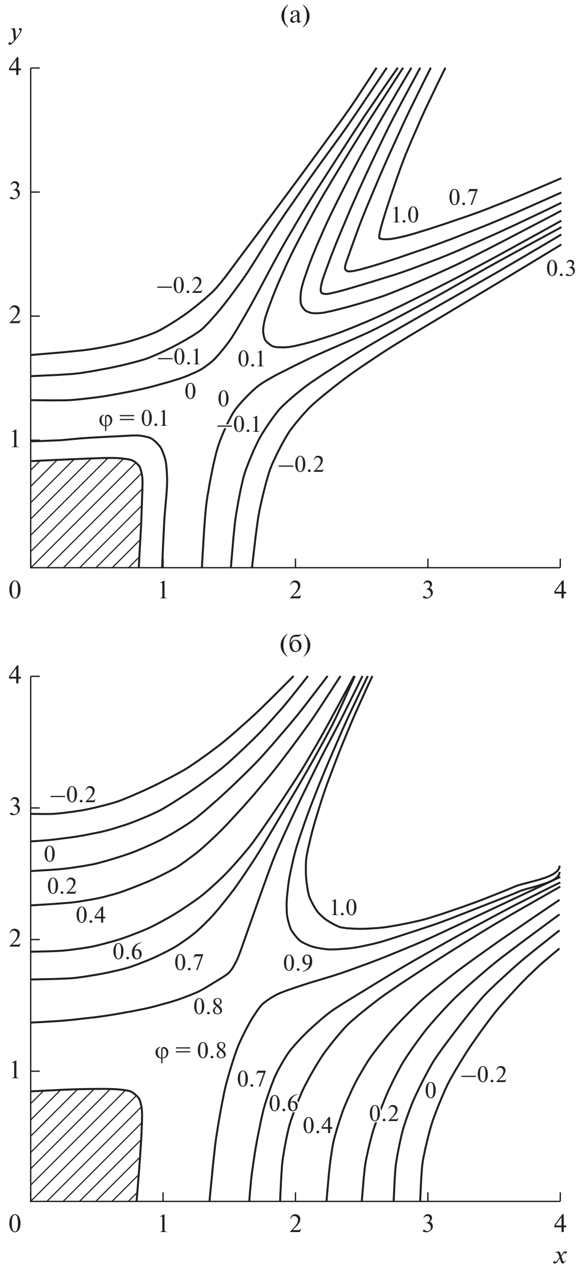

Рис. 4. Эквипотенциальные кривые для скругленного квадрата $\gamma = 45°$ при $n = 2$ в поперечных сечениях $z =$ $=$ const: $z = 0.2$ (а), 0.9 (б).

Формула (15) с решением в виде определенного интеграла использована для расчета электродов в случае эллиптического сечения [16]. В плоскостях $z = \text{const}$ эквипотенциали представляют собой эллипсоидальные овалы, близкие к эллипсу с соответствующими полуосями. На рис. 6 для $b/a = 10$ координаты эллипса отмечены кружочками. При удалении от границы пучка отношение полуосей b/a эквипотенциали $\varphi = 0$ быстро стремится к константе, зависящей от значения этого

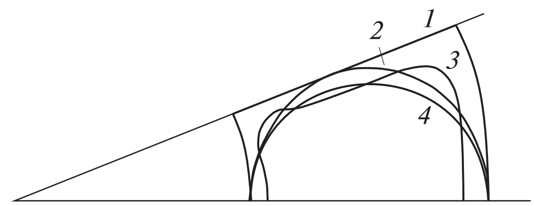

Рис. 5. Аппроксимация “квадрата” $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 60°$, $\psi_0 = 22°$: кривая *1* — “квадрат” на псевдоплоскости θ, ψ; *2* — нулевое приближение; *3* — скорректированный контур при $n = 4$; *4* — окружность.

параметра $(b/a)_0$ на Г и отличной от единицы (рис. 7).

В 2005 г. в журнале “Physical Review. Accelerators and Beams” была опубликована статья [17] двух авторов, на 30 лет отставшая от развития теории. В ней исправлена ошибка работы [15] за счет включения в подынтегральное выражение контурного интеграла бесконечного ряда с произведениями радиальных и угловых функций Матье. Это же решение вошло в диссертацию одного из авторов [18].

Чрезвычайно громоздкое по сравнению с [2, 16] решение, как и результаты [14], имеет формальный характер, связанный с отсутствием точного выражения для соответствующих контурных интегралов.

6. ПАРАКСИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ФОРМИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРОДОВ

Узкие пучки. Практические потребности не могут быть закрыты описанными выше электронно-оптическими системами с одномерными электронными потоками в плоском и сферическом диодах. Узкие пространственные пучки произвольного сечения, испытывающего деформацию с ростом продольной координаты z, являются предметом исследования трехмерной параксиальной теории релятивистских потоков во внешнем неоднородном магнитном поле В.Н. Данилова [19] или геометризованной модели электростатических потоков [20].

В работе [21] исследованы возможности, предоставляемые теорией [19] для поперечного сечения пучка, сохраняющего свою ориентацию и меняющегося по закону

$$x = \alpha(z)\xi, \quad y = \nu(z)\eta. \tag{34}$$

Начальная конфигурация сечения $\xi = \xi_e(u)$, $\eta =$ $= \eta_e(u)$ в ρ- или T-режиме эмиссии является скругленным прямоугольником или эллипсом.

Подобно тому как выше рассматривались фрагменты одномерных потоков с произвольным

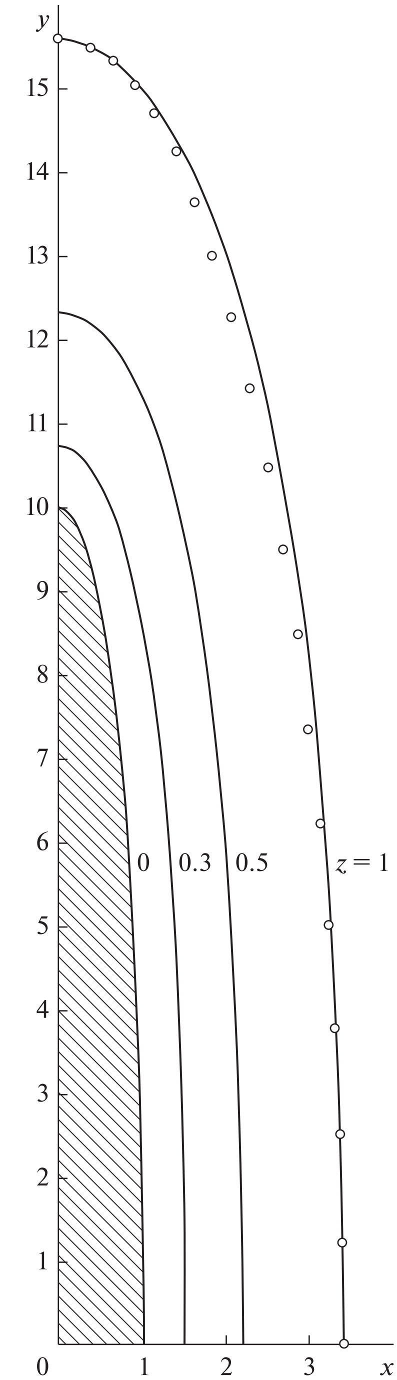

Рис. 6. Эквипотенциаль φ = 0 (b/a = 10) для эллиптического сечения в плоскостях z = const; координаты эллипса отмечены кружочками.

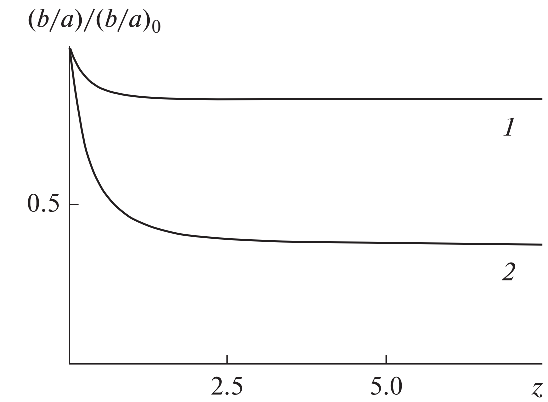

Рис. 7. Отношение полуосей эквипотенциали φ = 0 для эллиптического цилиндра в зависимости от z при b/a = 1.5 (*1*) и 10 (*2*).

сечением, аналогичные вырезки могут быть выполнены для плоских течений, описываемых классической параксиальной теорией [3], теорией В.Т. Овчарова [22] или геометризованными моделями [23–28], которые имеют более широкие возможности (произвольная ориентация магнитного поля на катоде). Эволюция контролируемого сечения в этом случае определена формулами

$$x = \xi, \quad y = \nu(z)\eta. \tag{35}$$

Геометризованная теория основана на новой форме уравнений пучка, записанных в заранее неизвестной системе координат x^i, $i = 1, 2, 3$, которая связана с траекториями (координатные линии x^1) или трубками тока (поверхности $x^2 = \mathrm{const}$). Условия эвклидовости пространства (шесть тождеств Ляме – нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка относительно элементов метрического тензора g_{ik}) дополняют уравнения для физических параметров потока.

Система x^i в общем случае является неортогональной. Для двумерных пучков выполнение условий термоэмиссии обеспечивается локальной неортогональностью системы вблизи сингулярной стартовой поверхности. Уравнения 2D геометризованной теории удалось подвергнуть декомпозиции. Они представлены в виде соотношения на трубке тока для элемента g_{22}, которое выглядит как обыкновенное уравнение второго порядка по продольной координате x^1 с поперечной координатой x^2 в качестве параметра, и системы эволюционных уравнений. Последняя описывает производные по x^2 от всех геометрических и физических параметров потока с правыми частями, определяемыми заданной информацией на базовой трубке тока $x^2 = 0$:

$$\partial f_k \big/ \partial x^2 = F_k(x^1). \tag{36}$$

В качестве x^1 при $x^2 = 0$ может быть использована произвольная функция l – длины дуги образу-

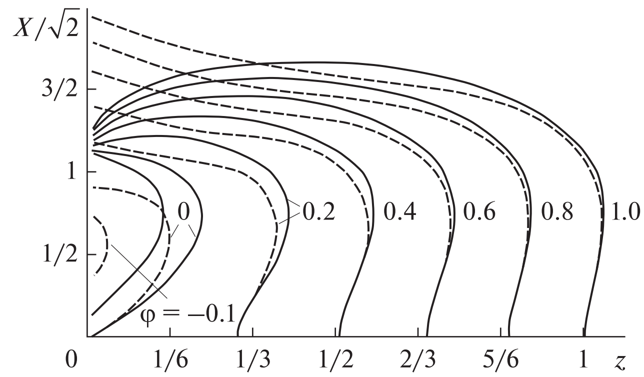

Рис. 8. Сравнение приближенного (сплошные кривые) и точного (штриховые) решений в диагональном сечении $u = 45°$ скругленного квадрата $\gamma = 45°$ при $n = 2$.

ющей трубки тока. Эту модель поэтому удобно называть l-представлением геометризованной теории. В работах [26, 27] построен вариант φ-представления, когда в качестве продольной координаты во всем потоке используется потенциал электрического поля $x^1 = \varphi$. Изменение статуса φ – переход от искомой функции к независимой переменной – приводит к снижению порядка уравнения Пуассона со второго до первого. Соотношение на трубке тока становится нелинейным во всем поле течения в отличие от l-варианта теории, где нелинейность связана с локальной неортогональностью. Тестирование геометризованных моделей на известных точных решениях [30] показало, что использование φ-представления может приводить к большей точности приближенного решения.

Построение третьего варианта геометризованной теории (W-представление) [28] связано с потенциальными релятивистскими пучками (отсутствие нормальной компоненты магнитного поля на катоде, W – потенциал обобщенного импульса).

К геометризованной теории примыкают модели пучков с эллиптическим поперечным сечением, рассматриваемых в системе координат, связанной с эллиптическим трубками тока. В работе [31] это потенциальные нерелятивистские потоки с плоской криволинейной осью, а в [32–36] – релятивистские вихревые пучки, для исследования которых алгоритм [31] не пригоден. Модели этого типа представляют собой пример известного в механике жидкости “иррационального приближения” [37], основное свойство которого состоит в невозможности построения цепочки моделей все более высокого порядка. В моделях [31–36] потенциал квадратичен по поперечной координате, но нет возможности уточнения этой зависимости или перехода от эллипса к более сложному контуру.

Общий вид решения. Идею построения параксиального решения, сформулированную в [5] для осесимметричных потоков, которая выражается формулой (19) в предположении, что S является функцией второго порядка малости $(\partial\varphi/\partial z \sim \varepsilon)$, можно использовать при формировании трехмерных потоков. В силу принятых предположений S удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона и описывается выражением

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -\rho,$$
$$S = -\operatorname{Re}\int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \rho(z, u + i\xi, \eta) h^2(z, u + i\xi, \eta)\, d\xi. \tag{37}$$

Цилиндр и конус с произвольным сечением при эмиссии в ρ-режиме. Формула (37) в случае цилиндра принимает вид [38]

$$\varphi = z^{4/3} - \frac{4}{9} z^{-2/3} \operatorname{Re}\int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} h^2(u + i\xi, \eta)\, d\xi. \tag{38}$$

Функция $h^2(u,v)$ для скругленного прямоугольника определена формулой

$$c^{-2} h^2(u,v) = \exp(-2v) - 2c_1 \cos 2u + \\ + \exp(2v)\left(c_1^2 - 6c_2 \cos 4u\right) + \ldots \tag{39}$$

с сохранением членов с коэффициентом c_4.

Интегрирование в формуле (28) для h^2 из (39) может быть выполнено в элементарных функциях [38].

На рис. 8 приведено сравнение точного и параксиального решений для скругленного квадрата в диагональном сечении. Картины близки в качественном отношении, но приближенное решение характеризуется меньшими градиентами в очертании эквипотенциальных поверхностей при $z = \text{const}$.

Рассмотрение окрестности катода на основании решения (38) приводит к следующему уравнению нулевой эквипотенциали:

$$X = \alpha_3 z + \frac{3}{4} k_\Gamma z^2 + \frac{1}{4} \alpha_3 k_\Gamma^2 z^3, \quad \alpha_3 = \operatorname{tg}\vartheta = 3/\sqrt{2}. \tag{40}$$

Угол наклона $\vartheta \approx 64.76°$ при параксиальном описании пучков в связанной с геометрией потока системе координат имеет столь же универсальный характер, как угол 67.5° в точном решении задачи. Вычисленные на основании (16), (40) значения кривизны и ее производной линии $\varphi = 0$ на границе пучка различаются на 5.7 и 19.5% соответственно.

Биполярный цилиндрический пучок с сечением в виде скругленного прямоугольника рассмотрен в работе [39].

Сравнение приближенного и точного решений для эллиптического контура приведено на рис. 9. Параксиальное решение для эллиптического цилиндра ранее построено в работе [31].

Для конуса с произвольным сечением функция S определена формулой

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \psi^2} = -\frac{r^2 \rho}{\mathrm{ch}^2 \xi},$$
$$S = -r^2 \rho(r) \,\mathrm{Re} \int_0^v dt \int_0^{v-t} \frac{h^2(u + i\tau, t)}{\mathrm{ch}^2 \xi(u + i\tau, t)} d\tau. \tag{41}$$

Торцевая область планарного гиротрона. В работах [40, 41] при расчетах электронно-оптической системы прибора используются исключительно численные методы. Формирование торцов первоначально прямоугольного пучка, сечение которого под действием сносовой скорости трансформируется в параллелограмм, требует привлечения аппарата, которым не располагают численные модели. В работе [42] подход [38] распространен на новый вид сечения. Решение уравнения Лапласа в торцевой области в параксиальном приближении выражено через элементарные функции. Значение параметра γ, определяющего углы параллелограмма, следует из расчета электронного потока на основании параксиальной [43] или геометризованной [25] теории плоских течений и является функцией продольной координаты.

Асимптотический ряд с уменьшающимся порядком особенности. Параксиальное разложение существенно неравномерно: второй член в (38) имеет особенность более высокого порядка, чем первый. Этим объясняется максимальная ошибка приближенного решения в прикатодной области. Выше мы видели, что успех решения для произвольного цилиндра и конуса основан на выделении двумерного лапласиана с декартовой метрикой и построении функции Римана, выраженной через бесселевы функции.

Для трехмерных электростатических пучков и пучков в режиме магнитного сопровождения [44] подобный результат достигнут с использованием метода многих масштабов [37], адаптированного к задачам оптики плотных электронных потоков в работе [45]. При этом уравнение Лапласа записывается в системе деформированных координат ζ, $\overline{x}$, $\overline{y}$, связанных с граничной трубкой тока $v = 0$ и катодом $\zeta = 0$:

$$\begin{gathered} x = \overline{x} + \varepsilon x_1(\overline{x}, \overline{y}, z) + \varepsilon^2 x_2(\overline{x}, \overline{y}, z), \\ y = \overline{y} + \varepsilon y_1(\overline{x}, \overline{y}, z) + \varepsilon^2 y_2(\overline{x}, \overline{y}, z), \\ \overline{x} + i\overline{y} = x_e(w, \varepsilon z) + i y_e(w, \varepsilon z), \\ w = u + iv, \quad \zeta = z + \varepsilon^2 L(u, \varepsilon z). \end{gathered} \tag{42}$$

Вместо продольной координаты ζ введем две координаты: быструю z и медленную Z для описания особенности и регулярных функций соответственно:

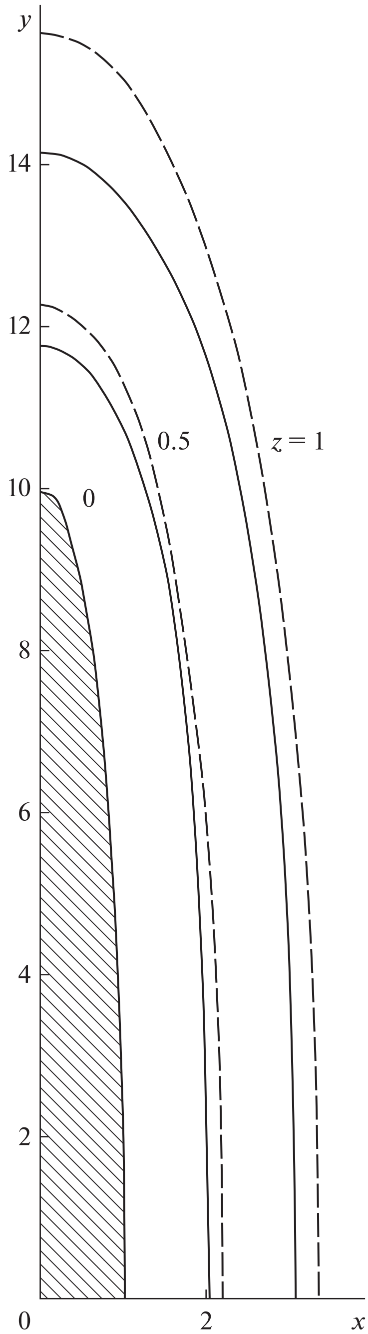

Рис. 9. Сравнение приближенного (сплошные кривые) и точного (штриховые) решений в поперечных сечениях для эллиптического пучка $b/a = 10$, $\varphi = 0$.

$$\zeta \to z + \varepsilon Z, \quad \varphi_e = z^{4/3} \overline{\varphi}_e(u, Z). \tag{43}$$

Вторые производные по z в уравнении Лапласа сохраняются, а эволюцию трубки тока будем считать медленной

$$x = x_e(u, Z), \quad y = y_e(u, Z). \tag{44}$$

Деформирующие функции x_1, x_2, y_1, y_2 в (42) подберем из условия равенства коэффициентов при $\partial^2\varphi/\partial u^2$, $\partial^2\varphi/\partial v^2$ и отсутствия перекрестной производной $\partial^2\varphi/\partial u\partial v$. На языке контравариантного метрического тензора g^{ik} эти требования определены равенствами

$$g^{22} = g^{33}, \quad g^{23} = 0. \tag{45}$$

В дальнейшем процесс построения решения аналогичен случаю произвольного конуса с тем отличием, что уравнения для двумерного потенциала Φ и функции Римана G содержат члены с первыми производными по u, v. В работе [44] решение построено с использованием одинарного интеграла в формуле Римана (3), в то время как в [46] при рассмотрении клиновидных пучков с произвольным сечением использована форма (37) с двойным интегралом.

Тепловой зазор. В работе [47] обсуждается принятая в пакетах траекторного анализа практика задания теплового зазора, не имеющего отношения к решению уравнений пучка и уравнения Лапласа вблизи кромки катода. Зазор обычно выполняется в виде горизонтальной щели, параллельной оси прибора. В двумерном случае существует точное решение локальной задачи на основе теории антипараксиальных разложений [1] о конфигурации поля в этой области, приводящее к профилированному зазору, образованному боковой поверхностью катода в третьем квадранте и отрицательной эквипотенциалью, расположенной между двумя асимптотами нулевой эквипотенциали $\vartheta = 67.5°$ и $\vartheta = 180° + 22.5°$.

Практикуемый способ задания зазора можно уподобить предложению определять потенциал вблизи катода не степенью $4/3$ расстояния по нормали n, а любой произвольной функцией, например, $1 - \exp(-n^2)$. Достижение результата с ошибкой порядка 0.3%, необходимого при расчетах пучков с линейной компрессией 30, при таком способе действий представляется невероятным, тем более что оценить реальную ошибку в рамках пакетов, использующих вблизи катода гидродинамическое приближение (самый грубый вариант – локальный закон $4/3$), невозможно.

В трехмерном случае решение соответствующей задачи отсутствует, но обсуждавшиеся выше результаты для произвольного цилиндра и конуса позволяют сформулировать некоторые разумные предложения. Формула (16) выражает локальный принцип независимости сечений, согласно которому конфигурация нулевой эквипотенциали зависит в данном сечении от локальной кривизны k_Γ контура, а не от ее изменения вдоль Г. Решение для кругового цилиндра с радиусом, соответствующим k_Γ, известно и включает форму боковой поверхности катода и отрицательных эквипотенциалей. Таким образом, пользуясь решением двумерной задачи и обойдя контур трехмерного пучка, получим эквипотенциали, реализующие обоснованный с точки зрения теории тепловой зазор. Для конического пучка с искривленным катодом принцип независимости сечений действует, включая квадратичные члены.

Описанный алгоритм формирования теплового зазора реализован в работе [36] для ленточного пучка с эллиптическим сечением, стартовавшим с цилиндрического катода и достигавшим линейной компрессии порядка 30.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пакеты траекторного анализа, широко используемые в последние десятилетия для расчета ленточных пучков с сечением, близким к прямоугольному, не прошли надлежащего тестирования на эталонных точных решениях, используют обычно весьма грубую модель прикатодной зоны (одномерные диоды без учета неоднородного токоотбора и наличия магнитного поля), абсурдную модель теплового зазора, не обеспеченную теоретическим базисом, и эмпирический учет торцевых эффектов. В результате в разномасштабных задачах (пучки с высокой компрессией, прямоугольные сечения с большим отношением сторон) достижение требуемой точности является проблематичным, а несовершенства математической модели должны компенсироваться экспериментальной доводкой прибора. По мере продвижения в сторону более высоких частот и миниатюризации конструкций значение перечисленных проблем будет возрастать.

Существующие результаты теории трехмерных потоков способны содействовать устранению перечисленных недостатков, а модели, основанные в конечном счете на решении обыкновенных дифференциальных уравнений, могут быть использованы для тех же электронно-оптических расчетов, что и пакеты анализа. Примером такого рода являются исследования, проведенные в работе [36].

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сыровой В.А.* Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. *Сыровой В.А.* // Прикл. матем. и механика. 1970. Т. 34. № 1. С. 4.
3. *Сыровой В.А.* Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.

4. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2005. Т. 50. № 2. С. 1503.
5. *Овчаров В.Т.* // РЭ. 1967. Т. 12. № 12. С. 2156.
6. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 7. С. 804.
7. *Сыровой В.А.* // ЖТФ. 1971. Т. 41. № 12. С. 2607.
8. *Langmuir I., Blodgett K.B.* // Phys. Rev. 1924. V. 24. № 1. P. 49.
9. *Кан В.Л.* // ЖТФ. 1948. Т. 18. № 4. С. 483.
10. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2005. Т. 50. № 8. С. 1003.
11. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2007. Т. 52. № 2. С. 231.
12. *Данилов В.Н., Сыровой В.А.* // РЭ. 1977. Т. 22. № 7. С. 1473.
13. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 3. С. 284.
14. *Radley D.E.* // J. Electr. Contr. 1958. V. 4. № 12. P. 125.
15. *Nakai A.* // Nucl. Instrum. and Methods. 1967. V. 54. № 1. P. 57.
16. *Пегов С.А., Сыровой В.А.* // РЭ. 1974. Т. 19. № 10. С. 2157.
17. *Bhatt R., Chen C.* // Phys. Rev. Accelerators and Beams. 2005. V. 8. № 1. P. 014201-1.
18. *Bhatt R.* Inverse Problems in Elliptic Charged-Particle Beams. 2006. Massachusetts Inst. of Technology.
19. *Данилов В.Н.* // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 5. С. 3.
20. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2014. Т. 59. № 4. С. 358.
21. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 8. С. 871.
22. *Овчаров В.Т.* // РЭ. 1962. Т. 7. № 8. С. 1367.
23. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 5. С. 617.
24. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 9. С. 1139.
25. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 3. С. 263.
26. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 502.
27. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 82.
28. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2022. Т. 67. № 6. С. 615.
29. *Сыровой В.А.* // РЭ. 1999. Т. 44. № 5. С. 615.
30. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2010. Т. 35. № 6. С. 726.
31. *Пензяков В.В., Олейников В.И.* // РЭ. 1975. Т. 20. № 5. С. 1049.
32. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 8. С. 999.
33. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2011. Т. 56. № 1. С. 111.
34. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 7. С. 692.
35. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 5. С. 472.
36. *Акимов П.И., Гаврилин А.А., Никитин А.П. и др.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 11. С. 1303.
37. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
38. *Данилов В.Н., Сыровой В.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 11. С. 1727.
39. *Вашковский А.В., Завьялов М.А., Сыровой В.А.* // РЭ. 1999. Т. 44. № 4. С. 485.
40. *Manuilov V.N., Zaslavsky V.Yu., Ginzburg N.S. et al.* // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 023106.
41. *Кишко С.А., Кулешов А.Н., Глявин М.Ю. и др.* // РЭ. 2014. Т. 59. № 7. С. 722.
42. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1106.
43. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 6. С. 584.
44. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 2. С. 240.
45. *Данилов В.Н., Сыровой В.А.* // Прикл. матем. и механика. 1971. Т. 35. № 4. С. 656.
46. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 11. С. 1221.
47. *Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А.* // Электрон. техника. СВЧ-техника. 2018. № 1. С. 32.