

НОВАЯ КОНСТРУКЦИЯ ВЕЙВЛЕТОВ НА ОСНОВЕ СВЕРТКИ
ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ИМПУЛЬСОМ© 2022 г. В. Ф. Кравченко^{a, b, c, *}, Я. Ю. Коновалов^{c, **}^aИнститут радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация^bНаучно-технологический центр уникального приборостроения РАН,
ул. Бутлерова, 15, Москва, 117342 Российская Федерация^cМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005 Российская Федерация

*E-mail: kvf-ok@mail.ru

**E-mail: kon20002000@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2022 г.

После доработки 29.03.2022 г.

Принята к публикации 01.04.2022 г.

Предложена новая конструкция вейвлетов на основе свертки финитной функции с прямоугольным импульсом. Дано ее теоретическое обоснование, предложена эффективная схема вычисления значений вейвлетов. Вычислены значения констант неопределенности. Установлено, что полученные вейвлеты близки по свойствам к вейвлетам Мейера и Кравченко, но превосходят их по качеству частотно-временной локализации.

DOI: 10.31857/S0033849422080095

ВВЕДЕНИЕ

Вейвлеты Мейера [1–3] нашли широкое применение в различных областях науки и техники. В 2008 г. в работах [4, 5] были предложены вейвлеты Кравченко. Их конструкция представляла собой модификацию вейвлетов Мейера. Благодаря применению атомарных функций полученные вейвлеты имели лучшие физические характеристики, чем вейвлеты Мейера. В [6–14] была показана эффективность применения новых вейвлетов к задачам фильтрации, сжатия сигналов и изображений. В [15] описано применение вейвлетов Кравченко для решения задач численного дифференцирования.

В данной работе впервые предложена новая конструкция вейвлетов на основе свертки прямоугольного импульса с финитной функцией. Построены вейвлеты на основе свертки прямоугольного импульса с B -сплайнами и некоторыми атомарными функциями. На основе непрерывных семейств атомарных функций получены непрерывные семейства ортогональных вейвлетов. Это открывает возможности для создания на их базе адаптивных алгоритмов обработки сигналов. Новые конструкции вейвлетов имеют физические характеристики, сопоставимые с вейвлетами Кравченко, а в некоторых случаях их превосходят.

1. ОБЩАЯ КОНСТРУКЦИЯ ВЕЙВЛЕТОВ
КРАВЧЕНКО И МЕЙЕРА

Известно, что вейвлет-базис представляет собой ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$, состоящий из масштабированных сдвигов одной функции $\psi(x)$, называемой материнским вейвлетом. Обычно построение вейвлетов начинается с кратномасштабного разложения [1–3], представляющего собой систему замкнутых вложенных подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, обладающую следующими свойствами:

1) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$,

2) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,

3) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$,

4) существует масштабирующая функция $\varphi(x) \in V_0$, сдвиги которой образуют базис Рисса в пространстве V_0 .

Пусть V_0 – подпространство $L^2(\mathbb{R})$, порожденное сдвигами $\varphi(x)$. Для того, чтобы $\varphi(x - n)$ образовывали в нем базис Рисса [1–3], преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\omega)$ должно удовлетворять условиям следующей теоремы [1–3].

Теорема 1. Сдвиги $\{\varphi(x - n)\}$ функции $\varphi(x)$ образуют базис Рисса в пространстве $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существуют положительные постоянные A и B такие, что почти всюду

$$A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 \leq B.$$

Для построения ортогональных вейвлетов требуется, чтобы сдвиги $\{\varphi(x - n)\}$ формировали в пространстве V_0 ортонормированный базис. Необходимое и достаточное условие для выполнения этого требования дает теорема 2 [1–3].

Теорема 2. Функции $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1$$

почти всюду.

Далее для простоты изложения введем функцию $\chi(\omega)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $\chi(\omega) = \chi(-\omega)$,
- 2) $\text{supp}(\chi(\omega)) = \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, $\chi(\omega) > 0$ при $\omega \in \left(-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$,
- 3) $\chi(\omega) = 1$ при $\omega \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$,
- 4) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(\omega + 2\pi n) = 1$.

Согласно теореме 2 $\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{\chi(\omega)}$ является преобразованием Фурье масштабирующей функции, сдвиги которой образуют в пространстве V_0 ортонормированный базис.

Построим ортогональное кратномасштабное разложение пространства $L^2(\mathbb{R})$. Масштабирующее уравнение [1–3] запишем в виде

$$\hat{\varphi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Тогда на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция сопряженного зеркального фильтра $H_0(\omega)$ представляется в виде

$$H_0(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)} = \hat{\varphi}(2\omega).$$

Последнее верно, так как $\hat{\varphi}(\omega) \equiv 1$ на всем носителе $\hat{\varphi}(2\omega)$.

Для того чтобы удовлетворить условиям теорем 3 и 4 [1–3], периодически продолжим H_0 с периодом 2π :

$$H_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2(\omega + 2\pi n)). \quad (1)$$

Теорема 3. Если сдвиги $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$, то сопряженный зеркальный фильтр $H_0(\omega)$ обладает свойством

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (2)$$

Теорема 4. Если 2π -периодическая функция $H_0(\omega)$ обладает свойством (2) почти всюду, а произведение $\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} H_0\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$ сходится почти всюду, то его предел принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R})$ и $\|\hat{\varphi}(\omega)\| \leq 1$.

Таким образом, согласно теоремам 3 и 4 функция $\varphi(x)$ является масштабирующей и порождает ортогональное кратномасштабное разложение в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Тогда преобразование Фурье вейвлета может быть найдено по следующей формуле [1–3]:

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp\left(\frac{i\omega}{2}\right) \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (3)$$

Так как $H_0(\omega)$ представляет собой сумму (1) сдвигов финитной функции, из которых только два имеют носитель, пересекающийся с носителем $\hat{\varphi}(\omega/2)$, выражение (3) для $\hat{\psi}(\omega)$ может быть существенно упрощено:

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp\left(\frac{i\omega}{2}\right) (\hat{\varphi}(\omega - 2\pi) + \hat{\varphi}(\omega + 2\pi)) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (4)$$

Описанная методика позволяет получать различные вейвлеты в зависимости от выбора $\chi(\omega)$. В частности, в работах [4–13] в качестве $\chi(\omega)$ рассматривались суммы сдвигов атомарных функций. В данной работе предлагается в качестве $\chi(\omega)$ рассмотреть свертки атомарных функций с прямоугольным импульсом.

2. СВЕРТКА ФИНИТНОЙ ФУНКЦИИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ИМПУЛЬСОМ

Рассмотрим некоторые свойства свертки кусочно-гладкой финитной функции и прямоугольного импульса.

Обозначим стандартный прямоугольный импульс $\Theta_0(x)$ [8–10]

$$\Theta_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2, \\ 1/2, & |x| = 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

Его носителем является отрезок $[-1/2; 1/2]$, носителем функции $f(x) = \Theta_0(x/(2a))$ будет отрезок $[-a; a]$. Также рассмотрим финитную функцию $g(x)$, которая имеет носитель $[-b; b]$ и положитель-

на на интервале $(-b; b)$. Сформулируем ряд утверждений относительно их свертки:

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt. \quad (5)$$

Утверждение 1. Свертка $f(x)$ и $g(x)$ имеет носитель $[-a-b; a+b]$ и положительна на интервале $(-a-b; a+b)$.

Доказательство. Пусть $|x| > a+b$. Тогда носители $f(x-t)$ и $g(t)$ не пересекаются и подынтегральная функция в (5) равна нулю при любом t . Следовательно, интеграл равен нулю. При $x = \pm(a+b)$ она отлична от нуля лишь в одной точке и интеграл также равен нулю. Если $|x| < a+b$, то пересечение носителей представляет собой отрезок от $\max(-a-x, -b)$ до $\min(a-x, b)$. Во внутренних точках этого отрезка функции $f(x-t)$ и $g(t)$ положительны, их произведение также $f(x-t)g(t) > 0$. Следовательно, положительно и значение интеграла.

Утверждение 2. Если $a > b$, то при $|x| \leq a-b$ свертка $h(x) = f(x) * g(x)$ имеет постоянное значение.

Доказательство. Из того, что $a > b$ и $|x| \leq a-b$, следует, что $\max(-a-x, -b) = -b$ и $\min(a-x, b) = b$. Тогда для интеграла (5) выполняется следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt &= \int_{\max(-a-x, -b)}^{\min(a-x, b)} f(x-t)g(t)dt = \\ &= \int_{-b}^b f(x-t)g(t)dt = \int_{-b}^b g(t)dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Последнее равенство выполняется, так как $f(x-t) = 1$ для всех $t \in (-b; b)$.

Утверждение 3. Сумма сдвигов свертки $h(x) = f(x) * g(x)$ на $2a$ постоянна:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(x-2ak) = c. \quad (7)$$

Доказательство. Запишем сумму сдвигов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(x-2ak) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-2ak-t)g(t)dt. \quad (8)$$

Так как при каждом значении t в сумме (8) отлично от нуля лишь конечное число слагаемых, можно поменять местами операции суммирования и интегрирования. Учитывая, что сдвиги прямоугольного импульса образуют разложение единицы

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x-2ak) \equiv 1,$$

преобразуем сумму (8) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-2ak-t)g(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x-2ak-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt. \end{aligned}$$

Если $g(x)$ имеет единичную площадь, то выражение (7) представляет собой разложение единицы, интеграл (6) также равен единице.

Утверждение 4. Если дополнительно к предыдущему потребовать, чтобы $g(x)$ была четной функцией, то свертка (5) также будет четной.

3. НОВАЯ КОНСТРУКЦИЯ ВЕЙВЛЕТОВ НА ОСНОВЕ СВЕРТКИ ФИНИТНОЙ ФУНКЦИИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ИМПУЛЬСОМ

Для получения свертки с носителем длиной $8\pi/3$ и постоянным участком длиной $4\pi/3$ требуется прямоугольный импульс длиной 2π и финитная функция, носитель которой имеет длину $2\pi/3$. Для того чтобы сумма сдвигов этой свертки равнялась единице, требуется также, чтобы финитная функция имела единичную площадь. Поэтому рассмотрим функцию $\chi(\omega)$ вида

$$\chi(\omega) = \Theta_0 \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) * g(\omega), \quad (9)$$

где $g(\omega)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{supp}(g(\omega)) &= \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right], \quad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} g(\omega)d\omega = 1, \\ g(\omega) &= g(-\omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно утверждениям 1–4, функция $\chi(\omega)$, определенная выражением (9), удовлетворяет всем сформулированным ранее требованиям и может быть использована для построения вейвлетов.

Преобразование Фурье (9) имеет вид

$$\hat{\chi}(t) = 2\pi \text{sinc}(\pi t) \hat{g}(t). \quad (11)$$

Финитная функция $\chi(\omega)$ может быть разложена в ряд Фурье на отрезке $[-4\pi/3; 4\pi/3]$ и приближенно вычислена как частичная сумма этого ряда

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \frac{3}{4\pi} \left(\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\chi} \left(\frac{3}{4}k \right) \cos \left(\frac{3}{4}k\omega \right) \right) \approx \\ &\approx \frac{3}{4\pi} \left(\pi + \sum_{k=1}^K \hat{\chi} \left(\frac{3}{4}k \right) \cos \left(\frac{3}{4}k\omega \right) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

После того как $\chi(\omega)$ вычислена, находим спектр масштабирующей функции

$$\hat{\phi}(\omega) = \sqrt{\chi(\omega)}.$$

Сама масштабирующая функция может быть найдена с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \hat{\phi}(\omega) \cos(\omega x) d\omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что поскольку $\hat{\phi}(\omega)$ – четная финитная функция, то интеграл Фурье (13) берется на конечном отрезке и может быть вычислен стандартными методами численного интегрирования при любом фиксированном значении x . Далее находим $\hat{\psi}(\omega)$ согласно (4). Интеграл Фурье для вычисления вейвлета

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i\omega}{2}\right) (\hat{\phi}(\omega - 2\pi) + \hat{\phi}(\omega + 2\pi)) \times \\ &\quad \times \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \exp(i\omega x) d\omega \end{aligned}$$

может быть значительно упрощен. После перемножения экспонент с учетом четности и носителя подынтегральной функции получим

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{8\pi}{3}} \hat{\phi}(\omega - 2\pi) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos\left(\omega\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) d\omega. \quad (14)$$

Далее отметим, что отрезок интегрирования (14) разбивается на два отрезка: $[2\pi/3; 4\pi/3]$, на котором $\hat{\phi}(\omega/2) = 1$, и $[4\pi/3; 8\pi/3]$, на котором $\hat{\phi}(\omega - 2\pi) = 1$. Таким образом, интеграл (14) представляется в виде суммы двух интегралов

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \hat{\phi}(\omega - 2\pi) \cos\left(\omega\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) d\omega + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{8\pi}{3}} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos\left(\omega\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) d\omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее представление обеспечивает минимальные вычислительные затраты и погрешность при вычислении вейвлета. Приведенные выше соображения по упрощению вычисления вейвлета не зависят от конкретного вида $\chi(\omega)$ и верны также для вейвлетов Кравченко и Мейера.

Коэффициенты фильтра для вычисления дискретного вейвлет-преобразования находятся по формуле

$$h_k = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\omega) \exp(ik\omega) d\omega.$$

4. КОНСТАНТЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ НОВЫХ ВЕЙВЛЕТОВ

Основным свойством вейвлет-базисов является хорошая локализация как по времени, так и по частоте. То есть базисные функции значимо отличаются от нуля лишь на небольшом промежутке, быстро затухая или равняясь нулю за его пределами как во временной, так и в частотной области. Количественным выражением степени локализации функции $f(t)$ по времени является среднее квадратичное отклонение [3]:

$$\Delta_f = \frac{1}{\|f(t)\|} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_f^*)^2 |f(t)|^2 dt},$$

где t_f^* – центр функции $f(t)$, определяемый как

$$t_f^* = \frac{1}{\|f(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt.$$

Степень локализации по частоте характеризуется радиусом спектра Δ_f . Количественным выражением частотно-временной локализации вейвлета $\psi(x)$ будет произведение $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$, называемое константой неопределенности [2, 3]. Оно инвариантно относительно сдвига и растяжения функции. Меньшим значением констант неопределенности соответствуют лучше локализованные базисы. Согласно принципу неопределенности $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}} \geq 1/2$. Константа неопределенности является важнейшей физической характеристикой вейвлет-базиса, определяющей его практическую ценность.

Сделаем несколько замечаний относительно норм и центров масштабирующей функции, вейвлета и их спектров. Согласно (11) норма спектра масштабирующей функции равна

$$\|\hat{\phi}(\omega)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) d\omega = \hat{\chi}(0) = 2\pi.$$

Следовательно, согласно равенству Парсеваля $\|\varphi(x)\| = 1$. Центры четных функций $\hat{\phi}(\omega)$ и $\varphi(x)$ находятся в нуле.

Вычислим норму спектра вейвлета, представленного формулой (4). Для этого преобразуем ин-

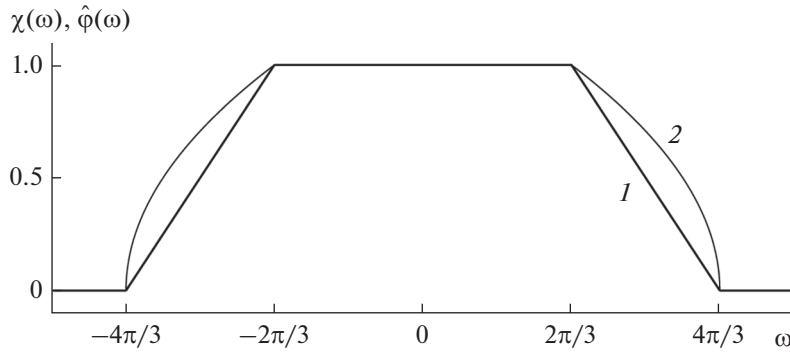


Рис. 1. Графики функций $\chi(\omega)$, заданной (9) (кривая 1), и соответствующей $\hat{\phi}(\omega)$ (кривая 2). В качестве $g(\omega)$ в (9) взят прямоугольный импульс.

теграл от квадрата модуля спектра вейвлета аналогично (15) с учетом того, что $|\exp(i\omega/2)|^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}(\omega)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp\left(\frac{i\omega}{2}\right) \right|^2 (\hat{\phi}(\omega - 2\pi) + \hat{\phi}(\omega + 2\pi))^2 \times \\ &\times \hat{\phi}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega = 2 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \hat{\phi}^2(\omega - 2\pi) d\omega + \\ &+ 2 \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{8\pi}{3}} \hat{\phi}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega = 2 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \chi(t) dt + 4 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \chi(t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Соответственно, $\|\psi(x)\| = 1$. Центром $\hat{\psi}(\omega)$ также будет ноль, так как $|\hat{\psi}(\omega)|$ является четной функцией. Центром вейвлета $\psi(x)$ будет $t_{\psi}^* = -1/2$, что следует из (14).

5. ПОСТРОЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ НА ОСНОВЕ СВЕРТКИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА С В-СПЛАЙНОМ

Построим $\hat{\chi}(t)$ по формуле (11). В качестве финитной функции $g(x)$ возьмем прямоугольный импульс. Тогда из условий (10) следует, что длина этого импульса должна быть $2\pi/3$, а высота $3/(2\pi)$. При этом (11) приобретает вид

$$\hat{\chi}(t) = 2\pi \operatorname{sinc}(\pi t) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

Соответственно,

$$\chi(\omega) = \Theta_0\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) * \Theta_0\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)$$

представляет собой трапецию. Графики функций $\chi(\omega)$ и $\hat{\phi}(\omega)$ приведены на рис. 1.

Далее рассмотрим в качестве $g(x)$ B -сплайн порядка $m - 1$. Тогда при каждом $m \in \mathbb{N}$ (11) представляется в виде

$$\hat{\chi}(t) = 2\pi \operatorname{sinc}(\pi t) \operatorname{sinc}^m\left(\frac{\pi t}{3m}\right).$$

Таким образом, получим счетное семейство вейвлетов, построенных на основе свертки B -сплайна с прямоугольным импульсом. Для оценки качества построенных вейвлетов вычислим константы неопределенности $\Delta_{\psi} \Delta_{\hat{\psi}}$. При этом меньшие значения соответствуют вейвлетам с лучшей частотно-временной локализацией. Значение $\Delta_{\psi} \Delta_{\hat{\psi}} = 3.27802$ соответствует вейвлету Мейера. Вейвлеты с меньшими значениями можно рассматривать как хорошие, с большими — как плохие. В табл. 1 приведены значения $\Delta_{\psi} \Delta_{\hat{\psi}}$ для представленных вейвлетов. Видно, что $\Delta_{\psi} \Delta_{\hat{\psi}} < 3.27802$ только для $m = 2, 3, 4, 5$. Их невысокое качество вызвано недостаточной гладкостью B -сплайна и построенной на его основе $\chi(\omega)$. Для получения лучших результатов рассмотрим в качестве $g(x)$ атомарные функции, сочетающие свойства финитности и бесконечной гладкости.

6. ПОСТРОЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ НА ОСНОВЕ СВЕРТОК ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА С АТОМАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Атомарные функции [5–8] представляют собой финитные решения дифференциальных уравнений вида

$$L(y) = \sum_k c_k y(ax + b_k), \tag{16}$$

где L — линейный дифференциальный оператор. Их преобразования Фурье представляются быстро сходящимися бесконечными произведениями масштабированных функций $\operatorname{sinc}(\omega)$ и могут быть приближены конечными произведениями.

Таблица 1. Значения констант неопределенности $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$ вейвлетов, построенных на основе сверток с прямоугольным импульсом B -сплайнов и атомарных функций $up_m(x)$, а также на основе сумм сдвигов $up_m(x)$

| m | Вейвлеты на основе свертки прямоугольного импульса с B -сплайнами порядка $m-1$ | Вейвлеты на основе свертки прямоугольного импульса с атомарными функциями $up_m(x)$ | Вейвлеты на основе сумм сдвигов атомарных функций $up_m(x)$ |
|-----|---|---|---|
| 1 | 3.401344 | 2.837418 | 2.837418 |
| 2 | 2.629998 | 2.693042 | 2.988518 |
| 3 | 2.768137 | 2.667679 | 3.099344 |
| 4 | 2.935415 | 2.657220 | 3.179776 |
| 5 | 3.085646 | 2.651476 | 3.242194 |
| 6 | 3.218643 | 2.647846 | 3.289193 |
| 7 | 3.337644 | 2.645341 | 3.329809 |
| 8 | 3.445439 | 2.643506 | 3.363605 |
| 9 | 3.544134 | 2.642092 | 3.394005 |
| 10 | 3.635304 | 2.640967 | 3.421119 |

6.1. Атомарная функция $up(x)$

Функция $up(x)$ [5–8] – простейшая из атомарных функций. Она является решением уравнения

$$y'(x) = 2(y(2x + 1) - y(2x - 1))$$

и имеет единичную площадь. Носителем $up(x)$ является отрезок $[-1; 1]$, преобразование Фурье имеет вид

$$\widehat{up}(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{t}{2^k}\right). \tag{17}$$

Отметим, что из (17) следует, что $up(x) = \Theta_0(x) * 2up(2x)$. Тогда, согласно утверждению 3 сдвиги $up(x)$ образуют разложение единицы

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} up(x - k) = 1. \tag{18}$$

Рассмотрим $g(\omega) = \frac{3}{\pi} up\left(\frac{3}{\pi}\omega\right)$, она удовлетворяет всем требованиям (10). Подставим преобразование Фурье функции $up(x)$ в (11), получим

$$\hat{\chi}(t) = 2\pi \text{sinc}(\pi t) \widehat{up}\left(\frac{\pi}{3}t\right). \tag{19}$$

Домножим и поделим (19) на $\sin(\pi t/3)$, затем применим формулу Эйлера

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(t) &= 2\pi \text{sinc}(\pi t) \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{3} \frac{t}{2^k}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{3} \frac{\sin(\pi t)}{\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)} \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{3}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{3} \frac{t}{2^k}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{3} \frac{\exp(i\pi t) - \exp(-i\pi t)}{\exp\left(i\frac{\pi}{3}t\right) - \exp\left(-i\frac{\pi}{3}t\right)} \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{2\pi}{3} \frac{t}{2^k}\right) = \\ &= \left(\exp\left(i\frac{2\pi}{3}t\right) + 1 + \exp\left(-i\frac{2\pi}{3}t\right)\right) \frac{2\pi}{3} \widehat{up}\left(\frac{2\pi}{3}t\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Последнее выражение $\hat{\chi}(t)$ в (20) соответствует сумме масштабированных сдвигов функции $up(\omega)$, являющейся растянутой частичной суммой разложения единицы (18)

$$\chi(\omega) = up\left(\frac{3\omega}{2\pi} + 1\right) + up\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right) + up\left(\frac{3\omega}{2\pi} - 1\right). \tag{21}$$

Такой вид $\chi(\omega)$ и соответствующий вейвлет рассматривались ранее в работах [5, 6, 12, 13]. Графики $\chi(\omega)$ (21) и $\hat{\psi}(\omega)$ представлены на рис. 2.

6.2. Семейство атомарных функций $up_m(x)$

Для любого натурального m функция $up_m(x)$ представляет собой финитное решение уравнения

$$\begin{aligned} y'(x) &= \\ &= 2 \sum_{k=1}^m (y(2mx + 2m - 2k + 1) - y(2mx - 2k + 1)), \end{aligned}$$

нормированное на единичную площадь. Носителем $up_m(x)$ является отрезок $[-1; 1]$. Преобразование Фурье $up_m(x)$ имеет вид

$$\widehat{up}_m(t) = \prod_{k=1}^m \frac{\text{sinc}^2\left(\frac{mt}{(2m)^k}\right)}{\text{sinc}\left(\frac{t}{(2m)^k}\right)}. \tag{22}$$

Данное семейство атомарных функций является естественным обобщением функции $up(x)$. При $m = 1$ $up_1(x) \equiv up(x)$.

Рассмотрим $g(\omega) = \frac{3}{\pi} up_m\left(\frac{3}{\pi}\omega\right)$, она удовлетворяет всем требованиям (10). Подставляя преобра-

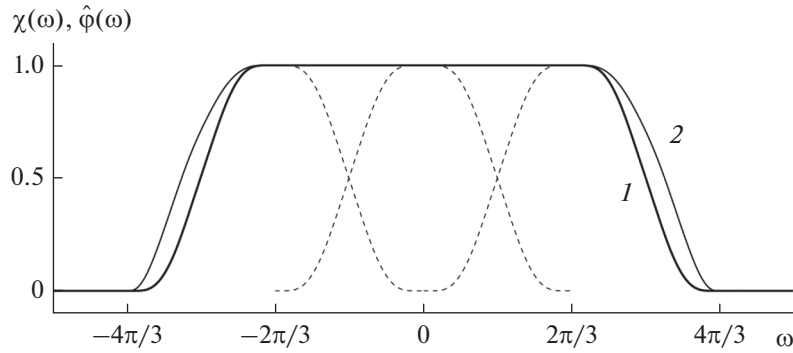


Рис. 2. Графики функций $\chi(\omega)$, заданной (21) (кривая 1), и соответствующей $\hat{\phi}(\omega)$ (кривая 2), штриховой линией показаны сдвиги $\text{up}\left(\frac{3\omega}{2\pi} + k\right)$, составляющие правую часть (21).

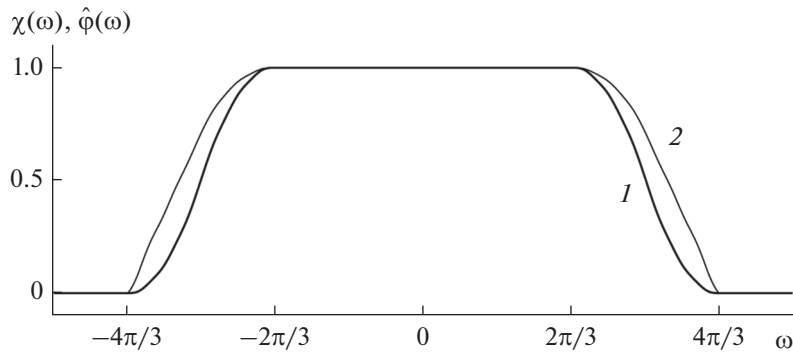


Рис. 3. Графики функций $\chi(\omega)$, заданной (9), (кривая 1) и соответствующей $\hat{\phi}(\omega)$ (кривая 2). В качестве $g(\omega)$ в (9) взята преобразованная $\text{up}_m(x)$ при $m = 3$.

зование Фурье функции $\text{up}_m(x)$, заданное формулой (22), в выражение (11), имеем

$$\hat{\chi}(t) = 2\pi \text{sinc}(\pi t) \widehat{\text{up}_m\left(\frac{\pi}{3}t\right)}. \quad (23)$$

Значения констант неопределенности для вейвлетов, полученных при $m = 1, \dots, 10$ представлены в табл. 1. Видно, что все построенные вейвлеты являются пригодными. Более того, все значения, соответствующие $m > 1$, не превосходят 2.7. На рис. 3 представлены графики $\chi(\omega)$ и $\hat{\phi}(\omega)$ при $m = 3$.

Сравним новые вейвлеты с предложенными в [5, 6, 12, 13]. Аналогично (21) для этих вейвлетов $\chi(t)$ есть сумма трех масштабированных сдвигов функции $\text{up}_m(\omega)$

$$\chi(\omega) = \text{up}_m\left(\frac{3\omega}{2\pi} + 1\right) + \text{up}_m\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right) + \text{up}_m\left(\frac{3\omega}{2\pi} - 1\right). \quad (24)$$

Преобразование Фурье (24) имеет вид

$$\hat{\chi}(t) = \frac{2\pi \text{sinc}(\pi t)}{\text{sinc}\left(\frac{\pi t}{3}\right)} \widehat{\text{up}_m\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}. \quad (25)$$

Запишем (25) в виде

$$\frac{\hat{\chi}(t)}{2\pi \text{sinc}(\pi t)} = \frac{\text{sinc}\left(\frac{\pi t}{3}\right)}{\text{sinc}\left(\frac{\pi t}{3m}\right)} \prod_{k=2}^{\infty} \frac{\text{sinc}^2\left(\frac{2\pi m t}{3(2m)^k}\right)}{\text{sinc}\left(\frac{2\pi t}{3(2m)^k}\right)}. \quad (26)$$

Отметим, что $t = 3$ будет корнем правой части (26) при $m > 1$. Запишем (23) аналогичным образом

$$\frac{\hat{\chi}(t)}{2\pi \text{sinc}(\pi t)} = \widehat{\text{up}_m\left(\frac{\pi}{3}t\right)}. \quad (27)$$

Для того чтобы $t = 3$ было корнем правой части (27), $m/(2m)^k$ должно быть целым, что невозможно при $m > 1$ и $k \geq 1$. Следовательно, поскольку правые части выражений (26) и (27) различны, полученные вейвлеты не совпадают с вейвлетами из работ [5, 6, 12, 13]. Таким образом, можно сделать вывод, что предложенная конструкция вейвлетов не является простым обобщением ранее предложенных вейвлетов Кравченко, хотя в некоторых частных случаях полученные вейвлеты могут совпадать. На рис. 4 представлены графики суммы

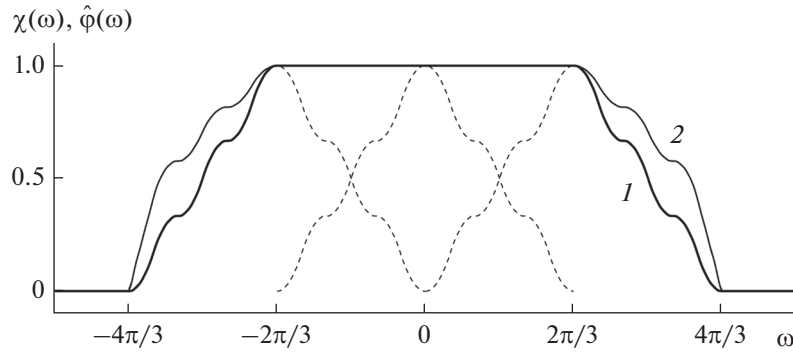


Рис. 4. Графики функций $\chi(\omega)$ (24) (кривая 1) и соответствующей $\hat{\phi}(\omega)$ (кривая 2) при $m = 3$, штриховой линией показаны сдвиги $\text{pr}_m\left(\frac{3\omega}{2\pi} + k\right)$, составляющие правую часть (24).

сдвигов (24) и соответствующей $\hat{\phi}(\omega)$ при $m = 3$. Легко заметить значительное отличие рис. 3 от рис. 4.

Значения констант неопределенности для вейвлетов, построенных на основе сумм сдвигов функции $\text{pr}_m(x)$ представлены в табл. 1. Видно, что эти значения больше, чем соответствующие значения для сверток. Таким образом, новое семейство вейвлетов на основе сверток функции $\text{pr}_m(x)$ с прямоугольным импульсом имеет лучшие физические характеристики, чем представленные ранее [5, 6, 12, 13].

6.3. Семейство атомарных функций $h_a(x)$

Семейство атомарных функций $h_a(x)$ [4–10] является естественным обобщением функции $\text{pr}(x)$. По определению, для любого вещественного $a > 1$ функция $h_a(x)$ есть решение уравнения

$$y'(x) = \frac{a^2}{2}(y(ax + 1) - y(ax - 1)), \tag{28}$$

нормированное на единичную площадь. Носителем функции является отрезок $[-1/(a - 1); 1/(a - 1)]$. Преобразование Фурье $h_a(x)$ имеет вид

$$\hat{h}_a(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{t}{a^k}\right).$$

При каждом $a > 1$ рассмотрим функцию

$$g(\omega) = \frac{3}{\pi(a - 1)} h_a\left(\frac{3}{\pi(a - 1)} \omega\right).$$

Она соответствует всем требованиям (10). Тогда (11) имеет вид

$$\hat{\chi}(t) = 2\pi \text{sinc}(\pi t) \hat{h}_a\left(\frac{\pi(a - 1)}{3} t\right). \tag{29}$$

Таким образом, при каждом $a > 1$ получаем $\chi(\omega)$, масштабирующую функцию и вейвлет. Полученные вейвлеты образуют непрерывное семейство, зависящее от a . Значения констант неопределенности новых вейвлетов в зависимости от a представлены на рис. 5.

Выясним, при каких условиях $\chi(\omega)$ представляется в виде суммы сдвигов $h_a(\omega)$. Для этого попробуем преобразовать (29) аналогично (20). Домножим и поделим (29) на $\sin(\pi(a - 1)t/3)$. Получим

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(t) &= 2\pi \text{sinc}(\pi t) \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi(a - 1)}{3} \frac{t}{a^k}\right) = \\ &= \frac{2}{a} \frac{\sin(\pi t)}{\sin\left(\frac{\pi(a - 1)}{3} t\right)} \frac{a\pi(a - 1)}{3} \hat{h}_a\left(\frac{a\pi(a - 1)}{3} t\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Для осуществления преобразования требуется представить функцию

$$\frac{\sin(\pi t)}{\sin(\pi(a - 1)t/3)}$$

в виде суммы фазовых множителей. Поскольку сдвиги каждого следующего слагаемого относительно предыдущего одинаковы, фазовые множители образуют геометрическую прогрессию. Для удобства записи четной функции при четном числе слагаемых обозначим знаменатель геометрической прогрессии q^2 . Таким образом, для некоторого неотрицательного целого r требуется

$$\frac{\sin(\pi t)}{\sin(\pi(a - 1)t/3)} = \sum_{k=0}^r q^{r-2k} = \frac{q^{r+1} - q^{-r-1}}{q - q^{-1}}. \tag{31}$$

Приравнивая знаменатели в правой и левой частях (31), получим $q = \exp(i\pi(a - 1)t/3)$. Тогда для равенства числителей требуется $q^{r+1} = \exp(i\pi t)$.

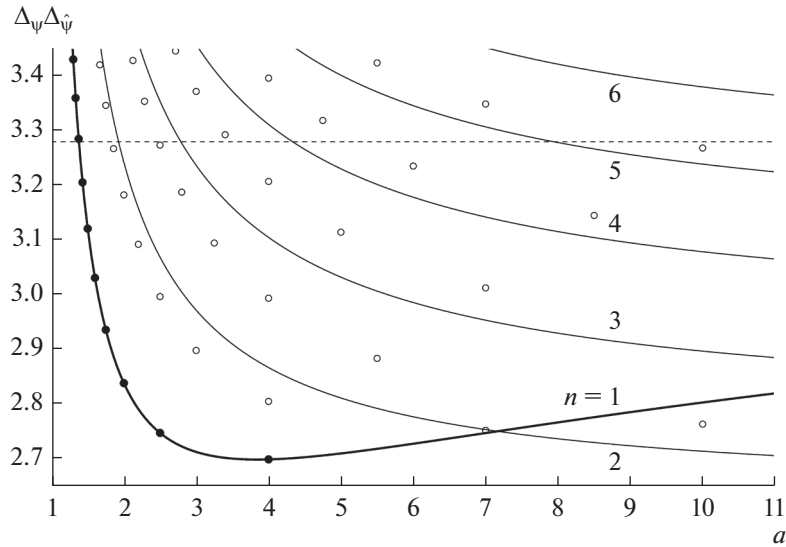


Рис. 5. Значения констант неопределенности $\Delta\psi\Delta\hat{\psi}$ для вейвлетов, построенных на основе свертки $h_a(x)$ с прямоугольным импульсом (кривая $n = 1$), вейвлетов, построенных на основе свертки $ch_{a,n}(x)$ с прямоугольным импульсом (кривые $n = 2, \dots, 6$); вейвлетов построенных на основе сумм сдвигов $h_a(x)$ [4, 6, 11, 13] (темные точки) и $ch_{a,n}(x)$ [16] (светлые кружочки).

Оба равенства выполняются тогда и только тогда, когда

$$a = \frac{r + 4}{r + 1}. \tag{32}$$

При таких a функция $\chi(\omega)$ представима в виде суммы сдвигов

$$\chi(\omega) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^r h_a \left(\frac{3}{a\pi(a-1)} \omega + \frac{r-2k}{a} \right). \tag{33}$$

Следовательно, вейвлеты при значениях a , удовлетворяющих (32), совпадают с рассмотренными ранее [4, 6, 11, 13]. При этом с ростом r соответствующие a уменьшаются, образуя монотонную последовательность, стремящуюся к 1. При $r = 2$ получим $a = 2$, соответствующую рассмотренной выше функции $ur(x)$, являющейся частным случаем $h_a(x)$. В этом случае (33) преобразуется в (21).

Убедимся в невозможности выполнить преобразования (30), (31) при a , отличных от (32). Запишем (31) в виде

$$\sin(\pi t) = \left(\sum_{k=0}^r q^{r-2k} \right) \sin \left(\frac{\pi(a-1)}{3} t \right).$$

Поскольку все корни правой части должны содержаться среди корней левой части, $t = 3/(a-1)$ должен быть корнем $\sin(\pi t)$, следовательно, целым числом. Обозначая это целое число $r + 1$, получаем (32). Таким образом, при a , отличных от (32), получаем новые вейвлеты.

В непрерывном семействе вейвлетов, построенных на основе свертки $h_a(x)$ с прямоугольным импульсом, вейвлеты, полученные ранее на основе сумм сдвигов $h_a(x)$, образуют счетное подмножество. Значения констант неопределенности для a вида (32) также представлены на рис. 5.

6.4. Семейство атомарных функций $ch_{a,n}(x)$

По определению, $ch_{a,n}(x)$ [8, 16, 17] есть решение уравнения

$$y^{(n)} = a^{n+1} 2^{-n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k y(ax + n - 2k),$$

нормированное на единичную площадь. Носителем $ch_{a,n}(x)$ является отрезок $[-n/(a-1); n/(a-1)]$. Атомарная функция $ch_{a,n}(x)$ представляет собой свертку n экземпляров функции $h_a(x)$. Следовательно, ее преобразование Фурье равно спектру $h_a(x)$, возведенному в степень n

$$\widehat{ch_{a,n}}(t) = \prod_{k=1}^n \text{sinc}^n \left(\frac{t}{a^k} \right) = (\widehat{h_a}(t))^n.$$

При любом натуральном n и вещественном $a > 1$ рассмотрим

$$g(\omega) = \frac{3n}{\pi(a-1)} ch_{a,n} \left(\frac{3n\omega}{\pi(a-1)} \right).$$

Тогда

$$\hat{\chi}(t) = 2\pi \operatorname{sinc}(\pi t) \widehat{\operatorname{ch}}_{a,n} \left(\frac{\pi(a-1)t}{3n} \right). \quad (34)$$

При любом натуральном n и вещественном $a > 1$ функция $\chi(\omega)$ строится как сумма ряда (12), а масштабированная функция и вейвлет вычисляются по формулам (13) и (15). При каждом фиксированном n получаем непрерывное семейство вейвлетов, зависящее от параметра a .

Сравним полученные вейвлеты со счетным двуматричным семейством вейвлетов, представленным ранее в [16]. При каждом натуральном n и $r > 2n - 3$ в [16] в качестве $\chi(\omega)$ рассматривалась сумма $n + r$ масштабированных сдвигов функции $\operatorname{ch}_{a,n}(x)$:

$$\chi(\omega) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{n+r-1} \operatorname{ch}_{a,n} \times \left(\frac{3}{4\pi} \left(\frac{n}{a-1} + \frac{n+r-1}{a} \right) \omega + \frac{n+r-1-2k}{a} \right), \quad (35)$$

где

$$a = \frac{r+3+n}{r+3-2n}. \quad (36)$$

Подстановка (36) в (35) приводит к более краткой записи (35):

$$\chi(\omega) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{n+r-1} \operatorname{ch}_{a,n} \left(\frac{n+r}{a\pi} \omega + \frac{n+r-1-2k}{a} \right). \quad (37)$$

Преобразование Фурье (37) имеет вид

$$\hat{\chi}(t) = \frac{2\pi}{n+r} \frac{\sin(\pi t)}{\sin\left(\frac{\pi t}{n+r}\right)} \widehat{\operatorname{ch}}_{a,n} \left(\frac{a\pi t}{n+r} \right). \quad (38)$$

При $n = 1$ функции $\operatorname{ch}_{a,1}(x)$ и $h_a(x)$ совпадают. Получаем вейвлеты, рассмотренные выше. В этом случае (34) преобразуется в (29), (36) в (32), (35) и (37) в (33).

Запишем (38) в виде

$$\frac{\hat{\chi}(t)}{2\pi \operatorname{sinc}(\pi t)} = \operatorname{sinc}^{n-1} \left(\frac{\pi t}{n+r} \right) \widehat{\operatorname{ch}}_{a,n} \left(\frac{\pi t}{n+r} \right). \quad (39)$$

Подставим (36) в (34). Получим

$$\frac{\hat{\chi}(t)}{2\pi \operatorname{sinc}(\pi t)} = \widehat{\operatorname{ch}}_{a,n} \left(\frac{\pi t}{r+3-2n} \right). \quad (40)$$

Заметим, что среди корней правой части (40) присутствует $t = a(r+3-2n)$. Для того чтобы он одновременно являлся корнем правой части (39), необходимо чтобы $\frac{r+3-2n}{n+r} = u$ было целым числом. Однако при $n > 1$ и $r > 2n - 3$ имеет место $0 < u < 1$. Следовательно, при $n > 1$ правые части (40) и (39) различны. Тогда выражение (34) не представимо в виде (38).

Рассмотрим физические характеристики полученных вейвлетов. На рис. 5 представлены графики зависимости констант неопределенности $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$ от значения параметров a и n для вейвлетов, построенных на основе сверток $\operatorname{ch}_{a,n}(x)$ с прямоугольным импульсом. При этом меньшие значения соответствуют вейвлетам с лучшей частотно-временной локализацией. Значение $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}} = 3.27802$ (штриховая линия) соответствует вейвлету Мейера. Вейвлеты с меньшими значениями можно рассматривать как хорошие, с большими – как плохие.

При $n = 1$ получим график $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$ для вейвлетов, построенных на основе свертки h_a с прямоугольным импульсом (жирная линия). График имеет минимум в районе $a \approx 3.85$ и возрастает при больших значениях a . Вейвлеты, полученные в [4, 6, 11, 13] на основе сумм сдвигов $h_a(x)$, представлены темными точками, лежащими на этой линии. Точка $a = 4$ расположена близко к минимуму, точка $a = 2$ соответствует вейвлету на основе $\operatorname{up}(x)$. Каждому непрерывному семейству вейвлетов, предложенных в этом разделе, соответствует своя кривая на рис. 5. Все пять кривых убывают с ростом a . Отметим линию при $n = 2$, расположенную ниже всех. При $a > 7$ она проходит также ниже кривой, соответствующей $h_a(x)$. Значения констант неопределенности вейвлетов, предложенных в [16], отмечены светлыми кружочками. Поскольку эти вейвлеты отличаются от предложенных в данной работе, соответствующие точки не лежат на кривых.

6.5. Семейство атомарных функций $\operatorname{fup}_n(x)$

Для целого неотрицательного n атомарная функция $\operatorname{fup}_n(x)$ [5–10] является решением уравнения

$$y'(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n+2} (C_{n+1}^k - C_{n+1}^{k-1}) y \left(2x + \frac{n+2}{2} - k \right), \quad (41)$$

нормированным на единичную площадь. Носитель функции – отрезок $[-(n+2)/2; (n+2)/2]$. Преобразование Фурье $\operatorname{fup}_n(x)$ имеет вид

$$\widehat{\operatorname{fup}}_n(t) = \operatorname{sinc}^n \left(\frac{t}{2} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{2^k} \right) = \operatorname{sinc}^n \left(\frac{t}{2} \right) \widehat{\operatorname{up}}(t).$$

Кроме того, атомарные функции $\operatorname{fup}_n(x)$ являются свертками $\operatorname{fup}_n(x) = \operatorname{up}(x) * \Theta_{n-1}(x)$, где $\Theta_{n-1}(x)$ – B -сплайн порядка $n - 1$, равный свертке n прямоугольных импульсов $\Theta_0(x)$.

Рассмотрим функцию

$$g(\omega) = \frac{3(n+2)}{2\pi} \operatorname{fup}_n \left(\frac{3(n+2)}{2\pi} \omega \right),$$

соответствующую требованиям (10). Тогда при любом целом неотрицательном n имеем

$$\hat{\chi}(t) = 2\pi \operatorname{sinc}(\pi t) \operatorname{sinc}^n\left(\frac{\pi t}{3(n+2)}\right) \widehat{\operatorname{up}}\left(\frac{2\pi t}{3(n+2)}\right). \quad (42)$$

Домножим и поделим (42) на $\sin\left(\frac{\pi t}{3(n+2)}\right)$. Получим

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(t) &= \frac{2\pi}{3(n+2)} \frac{\sin(\pi t)}{\sin\left(\frac{\pi t}{3(n+2)}\right)} \times \\ &\times \operatorname{sinc}^{n+1}\left(\frac{\pi t}{3(n+2)}\right) \widehat{\operatorname{up}}\left(\frac{2\pi t}{3(n+2)}\right) = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{3n+5} \exp\left(i \frac{3n+5-2k}{3n+2} \pi t\right)\right) \times \\ &\times \frac{2\pi}{3(n+2)} \widehat{\operatorname{fir}}_{n+1}\left(\frac{2\pi t}{3(n+2)}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, $\chi(\omega)$ является суммой $3n+6$ масштабированных сдвигов $\operatorname{fir}_{n+1}(\omega)$

$$\chi(\omega) = \sum_{k=0}^{3n+5} \operatorname{fir}_{n+1}\left(\frac{3(n+2)}{2\pi} \omega + \frac{3n+5-2k}{2}\right). \quad (43)$$

Тогда полученные в этом разделе вейвлеты совпадают с рассмотренными в [5, 6].

Отметим, что общая формула для $\chi(\omega)$ (43) легко выводится из (42) без необходимости проводить сложный и кропотливый анализ уравнения (41).

7. ПОСТРОЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ НА ОСНОВЕ СВЕРТОК ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА С ФУНКЦИЯМИ $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$

Рассмотрим новое семейство бесконечно гладких функций $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$ [8–10]. По определению, для любого вещественного $a > 1$ и целого неотрицательного n функция $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$ есть свертка атомарной функции $h_a(x)$ и B -сплайна

$$\operatorname{fir}_{a,n}(x) = h_a(x) * \Theta_{n-1}(x).$$

При этом $\operatorname{fir}_{a,0}(x) = h_a(x)$. Атомарные функции $\operatorname{fir}_n(x) = \operatorname{fir}_{2,n}(x)$ и $\operatorname{up}(x) = \operatorname{fir}_{2,0}(x)$ также являются частными случаями $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$. Следовательно, вейвлеты, полученные в разд. 6.1, 6.3 и 6.5 будут частными случаями вейвлетов, построенных на основе $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$.

Преобразование Фурье функции $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$ имеет вид

$$\widehat{\operatorname{fir}}_{a,n}(t) = \operatorname{sinc}^n\left(\frac{t}{2}\right) \prod_{k=1}^n \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a^k}\right) = \operatorname{sinc}^n\left(\frac{t}{2}\right) \widehat{h}_a(t).$$

Функции $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$, видимо, не являются атомарными, так как в общем случае для них не найдено уравнений вида (16). Такие уравнения построены только для частных случаев. При $n = 0$ и любом вещественном $a > 1$ функция $\operatorname{fir}_{a,0}(x)$ удовлетворяет уравнению (28). При $n = 1$ и любом вещественном $a > 1$ в [11] установлено, что $\operatorname{fir}_{a,1}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} y' &= \frac{a}{2} y \left(\left(ax + \frac{a+1}{2} \right) + y \left(ax + \frac{a-1}{2} \right) - \right. \\ &\left. - y \left(ax - \frac{a-1}{2} \right) - y \left(ax - \frac{a+1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Для целых значений $a > 1$ и $a = \sqrt[k]{m}$, где $k, m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ возможно итерационное построение уравнений вида (16) для любого n [11–13]. При этом в левой части уравнения стоит производная k -го порядка $y^{(k)}(x)$, а вид правой части существенно зависит от значения a . Отсутствие общего уравнения для всего семейства $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$ затрудняет построение вейвлетов на основе сумм их сдвигов, но не мешает построению вейвлетов на основе свертки.

Носителем функции $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$ является отрезок $[-l; l]$, где $l = \frac{1}{a-1} + \frac{n}{2}$. Рассмотрим

$$g(\omega) = \frac{3l}{\pi} \operatorname{fir}_{a,n}\left(\frac{3l}{\pi} \omega\right)$$

и

$$\hat{\chi}(t) = 2\pi \operatorname{sinc}(\pi t) \operatorname{sinc}^n\left(\frac{\pi t}{6l}\right) \widehat{h}_a\left(\frac{\pi t}{3l}\right). \quad (44)$$

На рис. 6 приведен график зависимости констант неопределенности $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$ вейвлетов, построенных на основе $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$ для $n = 0, \dots, 7$ от a . При $n = 0$ имеем кривую, соответствующую вейвлетам, построенным на основе свертки $h_a(x)$ с прямоугольным импульсом. Лежащие на ней темные точки представляют вейвлеты, основанные на суммах сдвигов $h_a(x)$. Отметим кривую $n = 1$ соответствующую $\operatorname{fir}_{a,1}(x)$. Ее минимум расположен в районе $a \approx 5.85$. При $a \in [4; 9]$ эта кривая проходит ниже всех кривых и ниже минимума кривой $n = 0$. Кривые, соответствующие $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$, при $n \geq 2$ монотонно убывают.

Выясним, при каких условиях $\chi(\omega)$ представима в виде суммы сдвигов $\operatorname{fir}_{a,n}(x)$. Домножим и поделим (44) на $\sin\left(\frac{\pi t}{6l}\right)$:

$$\hat{\chi}(t) = \frac{\pi \sin(\pi t)}{3l \sin\left(\frac{\pi t}{6l}\right)} \operatorname{sinc}^{n+1}\left(\frac{\pi t}{6l}\right) \widehat{h}_a\left(\frac{\pi t}{3l}\right). \quad (45)$$

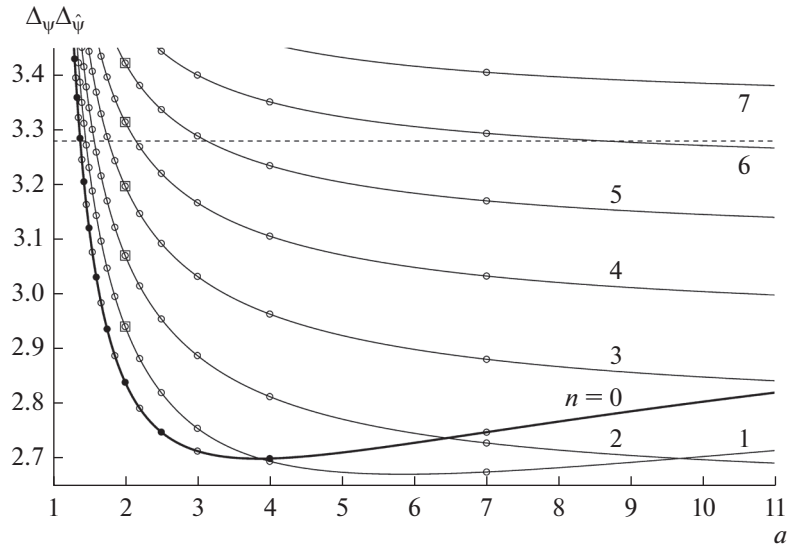


Рис. 6. Значения констант неопределенности $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$ для вейвлетов, построенных на основе свертки $h_a(x)$ с прямоугольным импульсом (кривая $n = 0$), вейвлетов, построенных на основе свертки $\text{fir}_{a,n}(x)$ с прямоугольным импульсом (кривые $n = 1, \dots, 7$); вейвлетов построенных на основе сумм (33) сдвигов $h_a(x)$ (темные точки) и сумм (46) сдвигов $\text{fir}_{a,n}(x)$ (светлые кружочки).

Для осуществления преобразования на основе равенства (31) требуется выполнение условия $\pi t = (r + 1)\pi l / (6l)$. Тогда $l = (r + 1)/6$. Возвращаясь к a и n , получим что для любого целого положительного n , целого $r > 3n - 1$ и $a = \frac{6}{r + 1 - 3n} + 1$ такое представление возможно. Тогда выражение (45) принимает вид

$$\hat{\chi}(t) = \frac{\pi}{3l} \left(\sum_{k=0}^r \exp\left(\frac{i\pi t}{6l}(r - 2k)\right) \right) \text{sinc}^{n+1}\left(\frac{\pi t}{6l}\right) \hat{h}_a\left(\frac{\pi t}{3l}\right).$$

Обратное преобразование Фурье последнего выражения имеет вид

$$\chi(\omega) = \sum_{k=0}^r \text{fir}_{a,n+1}\left(\frac{3l}{\pi}\omega + \frac{r - 2k}{2}\right). \quad (46)$$

Случаи, когда $\chi(\omega)$ представима в виде (46), показаны на рис. 6 (светлые кружочки). Отметим зависимость a от $r - 3n$. Случай $a = 2$ при $r = 3n + 5$ соответствует вейвлетам на основе $\text{fir}_n(x)$ (см. рис. 6, квадратики). При этом (46) преобразуется в (43). При целых $a = 7, a = 4$ и $a = 3$ функции $\text{fir}_{a,n}(x)$ являются атомарными функциями, т.е. решениями дифференциальных уравнений специального вида [9, 10]. Это позволяет построить итерационные алгоритмы для точного вычисления $\text{fir}_{a,n}(x)$, а затем находить $\chi(\omega)$ по формуле (46). Такой же подход применим для $\text{fir}_n(x)$ при $a = 2$.

При $n = 1$ и четных r формулы (33), (46) представляют одну и ту же $\chi(\omega)$ в виде суммы масштабированных сдвигов $h_a(x)$ и $\text{fir}_{a,1}(x)$ соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена новая конструкция вейвлетов на основе свертки финитной функции с прямоугольным импульсом. Кроме теоретического обоснования разработана эффективная схема вычисления значений вейвлетов. Осуществлено практическое построение вейвлетов на основе свертки с прямоугольным импульсом B -сплайнов и некоторых атомарных функций. Для оценки качества полученных вейвлетов найдены значения констант неопределенности. Семейство вейвлетов, построенных на основе свертки атомарных функций $\text{up}_m(x)$ с прямоугольным импульсом, имеет хорошие физические характеристики. Значения констант неопределенности близки к 2.64 и медленно уменьшаются с ростом m . Отметим, что полученные в этом случае $\chi(\omega)$ и, соответственно, вейвлеты отличаются от построенных на основе сумм сдвигов $\text{up}_m(x)$ в [5, 6, 12, 13], совпадая только при $m = 1$.

На основе свертки атомарных функций $h_a(x)$ построено непрерывное семейство вейвлетов. Представленные ранее на основе сумм сдвигов $h_a(x)$ вейвлеты образуют в нем счетное подсемей-

ство. График констант неопределенности имеет минимум при $a \approx 3.85$.

Двупараметрическое семейство атомарных функций $ch_{a,n}(x)$ порождает серию непрерывных семейств вейвлетов. Описанное выше семейство вейвлетов на основе сверток прямоугольного импульса с $h_a(x)$ входит в эту серию при $n = 1$. При каждом $n > 1$ константы неопределенности монотонно убывают с ростом a и возрастают с ростом n . При $n > 1$ новые вейвлеты не совпадают с построенными ранее на основе сумм сдвигов $ch_{a,n}(x)$.

Двупараметрическое семейство атомарных функций $fir_{a,n}(x)$ также порождает серию непрерывных семейств вейвлетов, включающую семейство на основе сверток прямоугольного импульса с $h_a(x)$. При $n = 1$ константы неопределенности имеют минимум при $a \approx 5.85$. При каждом $n > 1$ константы неопределенности монотонно убывают с ростом a и возрастают с ростом n . При $a = 1 + \frac{6}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ функция $\chi(\omega)$ представима суммой сдвигов $fir_{a,n}(x)$.

Непрерывные семейства вейвлетов на основе сверток с прямоугольным импульсом семейств $h_a(x)$, $ch_{a,n}(x)$ и $fir_{a,n}(x)$ могут быть полезны для разработки адаптивных методов обработки сигналов.

Некоторые результаты данной работы были представлены на международных конференциях [18, 19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Meyer Y. Wavelets and Operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
2. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов / Пер. с англ. М.: Мир, 2005.
3. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.
4. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. // Успехи совр. радиоэлектроники. 2008. № 6. С. 67.
5. Кравченко В.Ф., Юрин А.В. // Успехи совр. радиоэлектроники. 2008. № 5. С. 3.
6. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: Техносфера, 2018.
7. Kravchenko V.F., Perez-Meana H.M., Ponomaryov V.I. Adaptive Digital Processing of Multidimensional Signals with Applications. М.: Fizmatlit, 2009.
8. Kravchenko V.F., Kravchenko O.V., Kononov Y.Y., Budunova K.A. // Proc. Conf. IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW), Kharkiv, Ukraine, 21–25 Sept. 2020. N.Y.: IEEE, 2020. P. 619. <https://doi.org/10.1109/UkrMW49653.2020.9252684>
9. Kononov Y.Y. // Photonics & Electromagnetics Research Symposium – Spring (PIERS-Spring). Rome, Italy, June 2019. P. 114. <https://doi.org/10.1109/PIERS-Spring46901.2019.9017707>
10. Коновалов Я.Ю. // Физические основы приборостроения. 2020. Т. 9. № 2. С. 48. <https://doi.org/10.25210/jfor-2002-048059>
11. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами. М.: Техносфера, 2018.
12. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. // ДАН. 2009. Т. 428. № 5. С. 601.
13. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И. и др. // РЭ. 2015. Т. 60. № 2. С. 109.
14. Кравченко В.Ф., Пономарев В.И., Пустовойт В.И. // ДАН. 2011. Т. 440. № 3. С. 335.
15. Кравченко В.Ф., Юрин А.В. // Электромагнитные волны и электрон. системы. 2008. Т. 13. № 8. С. 12.
16. Kravchenko V.F., Kravchenko O.V., Kononov Y.Y., Churikov D.V. // Proc. Int. Conf. Days on Diffraction 2015. Saint Petersburg, Russia, May 2015. P. 180. <https://doi.org/10.1109/DD.2015.7354856>
17. Кравченко В.Ф., Коновалов Я.Ю., Пустовойт В.И. // РЭ. 2015. Т. 60. № 9. С. 931.
18. Кравченко В.Ф., Коновалов Я.Ю. // 14-я Межд. науч.-тех. конф. “Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации”. Т. 14. Астрахань, 5–7 октября 2021. С. 97. <https://doi.org/10.25210/armimp-2021-27>
19. Kravchenko V.F., Kononov Y.Y. // Photonics & Electromagnetics Research Symp. (PIERS). 2021. P. 204. <https://doi.org/10.1109/PIERS53385.2021.9695100>