РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2022, том 67, № 8, с. 782–787

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.01

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОСИМВОЛЬНОГО ПРИЕМА ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С КОРРЕКТИРУЮЩИМИ КОДАМИ В НЕДВОИЧНЫХ ПОЛЯХ ГАЛУА

© 2022 г.
Л. Е. Назаров[a, b, *], В. В. Батанов[b]

[a]*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., Российская Федерация*

[b]*АО "Информационные спутниковые системы" им. академика М.Ф. Решетнёва", ул. Ленина, 52, Железногорск, 662972 Российская Федерация*

**E-mail: levnaz2018@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.11.2021 г.
После доработки 12.11.2021 г.
Принята к публикации 25.12.2021 г.

Приведено описание алгоритма оптимального посимвольного приема сигнальных конструкций на основе сигналов с многофазовой манипуляцией и блоковых корректирующих кодов в недвоичных полях Галуа. Показано, что основу разработанного алгоритма посимвольного приема составляет спектральное преобразование в базисе Уолша–Адамара и результирующая сложность алгоритма приема определяется размерностью дуального кода, что обусловливает перспективность его применения для блоковых корректирующих кодов с высокой кодовой скоростью. Даны результаты моделирования алгоритма приема с целью исследования помехоустойчивости ряда сигнальных конструкций на основе фазоманипулированных сигналов и на основе кодов с проверкой на четность в недвоичных полях Галуа.

DOI: 10.31857/S0033849422080137

ВВЕДЕНИЕ

Коды, корректирующие ошибки (помехоустойчивые коды), используются для обеспечения требуемой надежности передачи информации по каналам с помехами [1–5]. Известны два класса корректирующих кодов – систематические блоковые коды с параметрами длины кодового слова и объема информационных символов и коды со сверточной структурой с параметрами кодовой скорости и кодового ограничения [1]. Эти коды используются в сочетании с сигналами с различными видами "созвездий" при формировании сигнальных конструкций [2, 3]. Основные требования, предъявляемые к данным кодам, определяются достижением вероятностных характеристик при приеме сигнальных конструкций, близких к предельным вероятностным характеристикам шенноновской пропускной способности каналов с помехами, а также приемлемой сложностью алгоритмов приема при реализации [5].

В литературе известны два общих класса алгоритмов оптимального приема сигнальных конструкций: алгоритмы, реализующие посимвольный прием с минимизацией вероятности ошибки на кодовый символ, и алгоритмы, реализующие правило максимального правдоподобия с минимизацией вероятности ошибки кодовых слов [5–7].

Алгоритмы посимвольного приема являются основой вычислительных процедур, реализующих итеративную обработку при приеме сигнальных конструкций на основе корректирующих кодов, наиболее эффективных относительно сформулированных критериев (на основе блоковых и сверточных турбокодов, низкоплотностных кодов) [5, 8].

Известен ряд алгоритмов посимвольного приема сигнальных конструкций, соответствующих линейным корректирующим кодам в двоичных полях Галуа $GF(2)$, например, на основе решетчатой структуры порождающих или проверочных матриц кодов, на основе спектрального преобразования в базисе Уолша–Адамара [5, 6, 8].

Актуальной является проблема разработки и исследования алгоритмов посимвольного приема для сигнальных конструкций, соответствующих кодам в недвоичных полях Галуа $GF(2^m)$ и сигналам со сложными "созвездиями", интенсивно используемым в приложениях, в частности, сигналам с многоуровневой (с $M = 2^m$-уровневой) фазовой манипуляцией (ФМ-M-сигналы) [2, 5, 9–11]. Этот подход позволяет расширить класс эффективных сигнальных и кодовых конструкций и согласуется с направлением развития теории класса помехоустойчивых кодов в недвоичных полях [5, 12–15]. В этот класс входят коды Рида–Соломона и низкоплотностные коды [1, 5, 13], интенсивно используемые в приложениях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $H = (h_{ij}; 0 \le i < k; 0 \le j < n)$ – проверочная матрица корректирующего блокового кода с параметрами (n,k); $\vec{B} = (b_j; 0 \le j < n)$ – кодовое слово; h_{ij} и b_j являются элементами поля Галуа $GF(2^m)$ [1]. Параметры кода: n – длина кодовых слов; k – информационный параметр, задающий объем кодовых слов 2^{mk} (информационный объем кодового слова mk); $n-k$ – число проверочных символов; $r = k/n$ – кодовая скорость.

Поле $GF(2^m)$ (элементы поля b_j) задается в виде множества многочленов степени m [1]:

$$b_j(x) = \sum_{p=0}^{m-1} \alpha_p(b_j)\, x^p,\ \ \alpha_p(b_j) \in GF(2). \tag{1}$$

Алгебраические операции в поле $GF(2^m)$ выполняются по модулю неприводимого многочлена $\gamma(x)$ [1, 5].

Кодовые символы b_j, $j = 0,1,\ldots,n-1$ задают сигналы $\dot{s}_j(t)$, которые передаются по физическим каналам.

На вход приемного устройства поступает реализация $\dot{\mathrm{Y}} = (\dot{y}_j; 0 \le j < n)$, $\dot{y}_j$ – "мягкие" (многоуровневые) комплексные отсчеты с выхода демодулятора сигналов.

Оптимальное посимвольное правило приема заключается в вычислении апостериорных вероятностей относительно кодовых символов $\Pr(b_j = \beta | \vec{Y})$, $\beta \in GF(2^m)$ и в принятии "жесткого" решения относительно переданного кодового символа [5, 9, 16]:

$$\hat{b}_j = \max_{\beta \in GF(2^m)} \Pr(b_j = \beta | \vec{Y}).$$

Апостериорные вероятности $\Pr(b_j = \beta | \vec{Y})$ задаются выражением

$$\Pr(b_j = \beta | \vec{Y}) = \sum_{\vec{B}: b_j = \beta} \Pr(\vec{B} | \vec{Y}) = \sum_{\vec{B}: b_j = \beta} \frac{\Pr(\vec{B})}{p(\vec{Y})}\, p(\vec{Y} | \vec{B}). \tag{2}$$

Здесь $\Pr(\vec{B} | \vec{Y})$ – условная вероятность кодового слова $\vec{B}$ для реализации $\vec{Y}$.

Функция правдоподобия $\mathrm{p}(\vec{Y} | \vec{B})$ в (2) определяется моделью физического канала, для канала без памяти справедливо выражение

$$p(\vec{Y} | \vec{B}) = \prod_{j=0}^{n-1} p(\vec{Y} | b_j).$$

Априорные вероятности сообщений $\vec{B}$ полагаются равными $\Pr(\vec{B}) = 2^{-mk}$.

Сложность реализации (2), определяемая требуемым объемом вычислительных операций, оценивается соотношением $P_1 \approx 2^{mk}$, даже для малых значений m, k вычисление (2) представляет трудноразрешимую проблему.

Суть задачи – дать описание производительного алгоритма оптимального посимвольного приема для сигнальных конструкций на основе корректирующих кодов в полях Галуа $GF(2^m)$, привести результаты его моделирования с целью оценки вероятностных характеристик для ряда сигнальных конструкций на основе класса сигналов с многоуровневой фазовой манипуляцией.

2. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПОСИМВОЛЬНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ

Введем в рассмотрение функции $\omega_b(a)$ с номером b и аргументом a на множестве $b, a, d \in GF(2^m)$ [9, 16]

$$\omega_b(a) = \exp(j\pi(a \times b)d). \tag{3}$$

Здесь $a \times b = a(x)b(x)$ – произведение элементов a, b в поле $GF(2^m)$;

$$ad = \sum_{i=0}^{m-1} a_i d_i,$$

a_i, d_i – двоичное представление чисел a и d.

Функции $\omega_b(a)$ принимают значения ± 1.

При фиксированном $b \ne 0$ и для a_i, $0 \le i < 2^m$ произведения $a_i \times b$ принимают все значения поля $GF(2^m)$ и функции $\omega_b(a)$ эквивалентны функциям Уолша $W_b(a)$ с перемеженными значениями их номеров и аргументов. Функции Уолша $W_b(a)$ с длительностью 2^m являются базисными функциями и определяются соотношением

$$W_b(a) = \exp(j\pi ab) = \exp\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i b_i\right).$$

Таблица 1. Порождающие многочлены $\gamma(x)$ для полей Галуа

Поле Галуа	$\gamma(x)$
$GF(2^2)$	$x^2 + x + 1$
$GF(2^3)$	$x^3 + x + 1$
$GF(2^4)$	$x^4 + x + 1$

Справедливы условия ортогональности [9]:

$$\sum_{a\in GF(2^m)} W_b(a)W_c(a) = \sum_{a\in GF(2^m)} W_{b+c}(a) = \begin{cases} 0, b \neq 0, \\ 2^m, b = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Полное множество функций $\omega_b(a)$ представляет также ортогональный базис, по которому можно разложить в ряд дискретные функции длительностью 2^m.

Разработаны производительные алгоритмы быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша (БПУ), которые также могут быть применены к перемеженной базисной системе функций $\omega_b(a)$ (3) [9].

Пусть неприводимый многочлен $\gamma(x)$ степени m, порождающий поле $GF(2^m)$, имеет вид $\gamma(x) = x^m + x^l + 1$ $(1 \le l < m)$, элемент поля d имеет единичную компоненту на $(k-1)$-й позиции и нулевые на остальных позициях $(d_i = 0, i \neq l-1)$. В этом случае закон перемежения номеров b, b' для функций $W_b(a) = w_{b'}(a)$ определяется соотношением для компонент b_i, b_i', $0 \le i < m$ [9, 16]:

$$b_i' = \begin{cases} b_{l-i-1}, & 0 \le i < l \\ b_{m+l-i-1}, & l \le i < m \end{cases}. \quad (5)$$

В табл. 1 приведены порождающие многочлены $\gamma(x)$, удовлетворяющие приведенному условию для полей $GF(2^2)$, $GF(2^3)$, $GF(2^4)$ [1].

Приведем общие соотношения для алгоритма оптимального посимвольного приема сигналов в поле $GF(2^m)$. Алгоритм включает три этапа [9, 16].

На первом этапе выполняется спектральное преобразование в базисе $\omega_b(a)$ с размерностью 2^m над последовательностью "мягких" решений $p(y_l | b(l))$ с использованием алгоритма быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша—Адамара с учетом перемежения спектральных компонент (5):

$$C_l(r) = \sum_{b(l)\in GF(2^m)} p(y_l | b(l)) w_{b(l)}(r), \quad r \in GF(2^m). \quad (6)$$

Здесь $l = 0, 1, \ldots, n-1$ — номер позиции кодовых символов.

На втором этапе вычисляется спектральное множество $\{T_l(\lambda)\}$ с использованием величин $C_l(r)$ (6) и множества кодовых слов R дуального кода C_H с параметрами $(n, n-k)$:

$$T_l(\lambda) = \frac{1}{\sum\limits_{r_p:R\in C_H} \prod\limits_{p=0}^{n-1} C_p(r_p)} \sum_{r_p:R\in C_H} \prod_{p=0}^{n-1} C_p(r_p) \frac{C_l(r_l - \lambda)}{C_l(r_l)}, \quad \lambda \in GF(2^m). \quad (7)$$

Сложность вычисления (7) оценивается как $P_2 \cong 2^{m(n-k)}$, для $n-k \ll k$ справедливо условие $P_2 \ll P_1$.

На третьем этапе вычисляются апостериорные вероятности $\Pr(b(l) = \beta | \vec{Y})$ с использованием обратного спектрального преобразования над $\{T_l(\lambda)\}$ (используется алгоритм быстрого спектрального преобразования Уолша—Адамара с учетом перемежения (5)):

$$\Pr(b(l) = \beta | \vec{Y}) = \sum_{\lambda\in GF(2^m)} T_l(\lambda)\omega_\beta(\lambda). \quad (8)$$

Наиболее простым является рассматриваемый алгоритм посимвольного приема для сигнальных конструкций на основе корректирующего кода с проверкой на четность [16—20]. В этом случае множество кодовых слов дуального кода C_H с параметрами $(k+1, k)$ содержит 2^m последовательностей кодовых символов одинаковых элементов $\alpha \in GF(2^m)$ длительностью $k+1$ [1, 16].

3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИ ПРИЕМЕ ФМ-*М*-СИГНАЛОВ

Кодовый символ $b_j \in GF(2^m)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, определяет ФМ-*М*-сигнал путем отображения последовательности m двоичных символов $\alpha_p(b_j)$, $0 \le p < m$ в сигнальное "созвездие" [21]. На рис. 1 приведен вид сигнального "созвездия" ФМ-8-сигналов — значение фазы $\varphi_i = 2\pi i/8$ $(i = 0, 1, \ldots, 7)$ задается последовательностью трех двоичных символов [21].

Нормированные отсчеты $\dot{y}$ с выхода демодулятора ФМ-*М*-сигналов для каждой квадратурной составляющей представляют случайные величины $\mathrm{Re}(\dot{y})$, $\mathrm{Im}(\dot{y})$ с единичной дисперсией и средними

$$\sqrt{\frac{2mE_б}{N_0}}\cos(\varphi_i) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{2mE_б}{N_0}}\sin(\varphi_i).$$

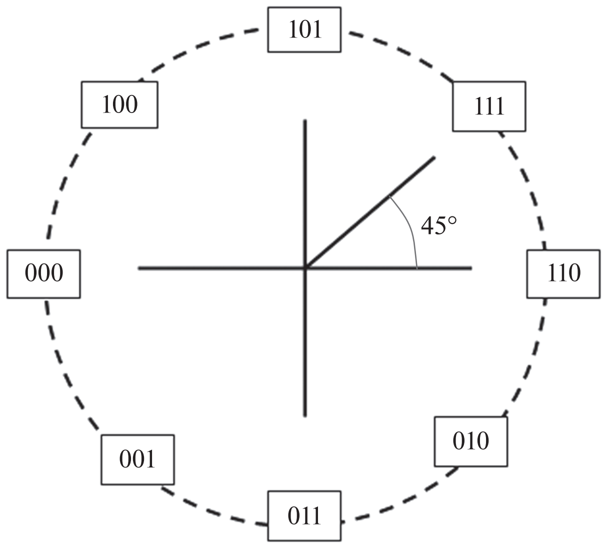

Рис. 1. Сопоставление элементов поля $GF(2^3)$ ФМ-8-сигналам.

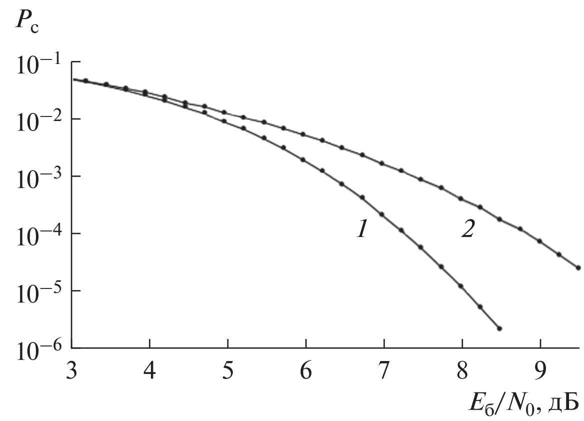

Рис. 2. Зависимости вероятности ошибки $P_с$: *1* – посимвольный прием сигнальных конструкций на основе ФМ-4-сигналов и кода с проверкой на четность в поле $GF(2^2)$; *2* – посимвольный прием ФМ-4-сигналов без кодирования.

Соответствующие апостериорные вероятности $p(\dot{y}|b_i)$ для канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) с односторонней спектральной плотностью N_0 задаются соотношением

$$p(\dot{y}|b_i) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left((\mathrm{Re}(\dot{y}) - \sqrt{\frac{2mE_б}{N_0}}\cos(\varphi_i))^2 + (\mathrm{Im}(\dot{y}) - \sqrt{\frac{2mE_б}{N_0}}\sin(\varphi_i))^2\right)\right). \quad (9)$$

Здесь $E_б$ – энергия сигналов на информационный бит.

Вероятность ошибки $P_с$ при приеме ФМ-M-сигналов без использования корректирующих кодов определяется соотношением [21]

$$P_c = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p(\theta)d\theta. \quad (10)$$

Здесь $p(\theta)$ – плотность распределения фазы:

$$p(\theta) = 1 - \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{mE_б}{N_0}\sin^2(\theta)\right)\times \int_0^\infty x\exp\left(-\frac{1}{2}(x - \sqrt{\frac{2mE_б}{N_0}}\cos(\theta))^2\right)dx. \quad (11)$$

Оценивание вероятности $P_с$ при приеме ФМ-M-сигналов с использованием корректирующих кодов может быть выполнено путем моделирования алгоритмов посимвольного приема. При выполнении моделирования производится интервальная оценка вероятности $P_с$ путем вычисления частости $w = x/u$ (x – число ошибочных решений в последовательности испытаний u). Требуемое количество вычислительных экспериментов u определяется размером доверительного интервала, вероятностью $P_с$, доверительной вероятностью $P_{дов}$ [22]. Например, для значения $P_с = 10^{-4}$, доверительного интервала $[0.5P_с, 1.5P_с]$ и $P_{дов} = 0.95$ требуемое количество экспериментов оценивается значением 1540000.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 2-4 приведены вероятностные характеристики $P_с$ в зависимости от отношения сигнал/помеха $E_б/N_0$ для АБГШ канала при приеме сигнальных конструкций на основе ФМ-M-сигналов и корректирующих кодов с проверкой на четность в полях $GF(2^2)$, $GF(2^3)$ и $GF(2^4)$, порождающие многочлены которых приведены в табл. 1 [1].

Вероятностные характеристики получены путем моделирования приведенного алгоритма оптимального посимвольного приема при передаче кодовых слов с информационным объемом 60 битов. При этом число информационных символов, эквивалентных элементам полей $GF(2^2)$, $GF(2^3)$, $GF(2^4)$, равно $k = 30$ (кодовая скорость $r = 30/31$), $k = 20$ ($r = 20/21$) и $k = 15$ ($r = 15/16$) соответственно.

В табл. 2 приведены предельные теоретические значения параметра $\beta = E_б/N_0$, определяющие возможность безошибочной передачи по каналам с помехами с использованием сигналов с эквивалентными кодовыми скоростями. Значения пара-

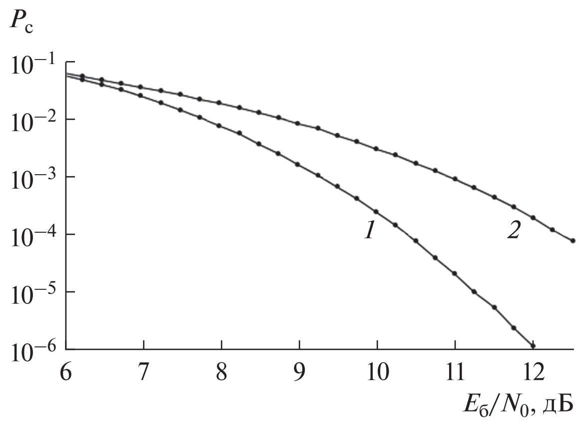

Рис. 3. Зависимости вероятности ошибки $P_с$: *1* – посимвольный прием сигнальных конструкций на основе ФМ-8-сигналов и кода с проверкой на четность в поле $GF(2^3)$; *2* – посимвольный прием ФМ-8-сигналов без кодирования.

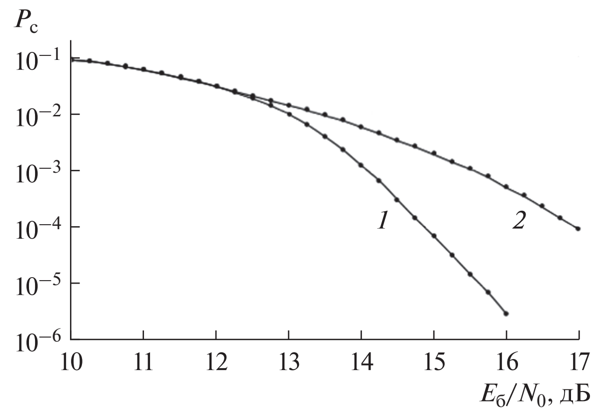

Рис. 4. Зависимости вероятности ошибки $P_с$: *1* – посимвольный прием сигнальных конструкций на основе ФМ-16-сигналов и кода с проверкой на четность в поле $GF(2^4)$; *2* – посимвольный прием ФМ-16-сигналов без кодирования.

метра β вычислены с использованием соотношения, связывающего β и r для шенноновской пропускной способности АБГШ-канала [2, 5]:

$$\beta = \frac{2^{2mr} - 1}{2mr}. \qquad (12)$$

Вероятностные кривые *1* на рис. 2–4 соответствуют результатам моделирования алгоритма посимвольного приема сигнальных конструкций на основе сигналов ФМ-4, ФМ-8 и ФМ-16 и корректирующего кода с проверкой на четность в полях $GF(2^2)$, $GF(2^3)$, $GF(2^4)$ соответственно. Кривые *2* соответствуют теоретическим зависимостям $P_с$ от отношения $E_б/N_0$, вычисленным с использованием соотношений (10), (11) для рассматриваемых фазоманипулированных сигналов без кодирования.

Видно, что применение приведенного алгоритма оптимального посимвольного приема обеспечивает энергетический выигрыш по отношению к передаче и приему фазоманипулированных сигналов без кодирования: для вероятности $P_с = 10^{-4}$ энергетический выигрыш достигает 1.5...2.0 дБ.

Таблица 2. Предельные значения энергетического параметра β для шенноновской пропускной способности канала АБГШ

m	r	β, дБ
2	30/31	5.5
3	20/21	9.5
4	15/16	13.7

Видно также увеличение энергетического выигрыша при уменьшении значений $P_с$.

Анализ данных в табл. 2 и кривых на рис. 2–4 показывает относительно небольшие различия вероятностных характеристик по отношению к предельным теоретическим характеристикам: для сигнальных конструкций на основе сигналов ФМ-4, ФМ-8 и ФМ-16 различие не превышает 1.75, 1 и 1.1 дБ соответственно для значения $P_с = 10^{-4}$. Это также показывает эффективность рассматриваемого алгоритма оптимального посимвольного приема.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено описание алгоритма оптимального посимвольного приема сигнальных конструкций на основе сигнальных “созвездий” и блоковых корректирующих кодов в недвоичных полях Галуа $GF(2^m)$, формируемых по модулю неприводимого многочлена степени m. Посимвольный прием минимизирует вероятность ошибки на кодовый символ в отличие от известного правила максимального правдоподобия, минимизирующего вероятность ошибки на кодовое слово. Основу алгоритма посимвольного приема составляет спектральное преобразование в базисе Уолша–Адамара, размерность которого определяется размерностью поля 2^m. Результирующая сложность алгоритма посимвольного приема определяется размерностью дуального кода, что обусловливает перспективность его применения для помехоустойчивых кодов с высокой кодовой скоростью (с низкой избыточностью), в частности для кодов с проверкой на четность с добавлением лишь одного проверочного символа.

Исследование вероятностных характеристик рассматриваемого алгоритма посимвольного приема произведено путем его моделирования для сигнальных конструкций на основе интенсивно используемых в приложениях фазоманипулированных сигналов ФМ-4, ФМ-8 и ФМ-16 и корректирующих кодов с проверкой на четность в полях $GF(2^2)$, $GF(2^3)$, $GF(2^4)$. Показано, что применение алгоритма посимвольного приема обеспечивает энергетический выигрыш до 1.5...2.0 дБ по отношению к передаче и приему фазоманипулированных сигналов без кодирования.

Показано также относительно небольшие различия вероятностных характеристик по отношению к предельным теоретическим характеристикам пропускной шенноновской способности АБГШ-канала: для рассматриваемых сигнальных конструкций на основе сигналов ФМ-4, ФМ-8 и ФМ-16 различие не превышает 1.75, 1 и 1.1 дБ соответственно для $P_c = 10^{-4}$.

Разработка и исследование вычислительных процедур итеративного приема на основе рассмотренного алгоритма посимвольного приема для эффективных кодовых конструкций, например для блоковых турбо-кодов, формируемых на основе блоковых кодов в недвоичных полях $GF(2^m)$, представляет перспективное направление исследований.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00525).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир. 1976.
2. *Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Панкратов Д.Ю.* Технологии в системах радиосвязи на пути к 5G. М.: Горячая линия-Телеком, 2018.
3. *Вишневский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В.* Широкополосные сети передачи. М.: Техносфера, 2005.
4. *Волков Л.Н., Немировский М.С., Шинаков Ю.С.* Системы цифровой радиосвязи. Базовые методы и характеристики. М.: Эко-Трендз, 2005.
5. *Johnson S.J.* Iterative Error Correction: Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes. Cambridge: Univ. Press, 2010.
6. *Bahl L.R., Cocke J., Jelinek F., Raviv J.* // IEEE Trans. 1974. V. IT-20. № 3. P. 284.
7. *Ping Li, Chan S., Yeng K.L.* // Electronic Lett. 1997. V. 33. № 19. P. 1614.
8. *Назаров Л.Е.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 12. С. 1474.
9. *Смольянинов В.М., Назаров Л.Е.* // РЭ. 1999. Т. 44. № 7. С. 838.
10. *Назаров Л.Е., Шишкин П.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 12. http://jre.cplire.ru/jre/dec18/10/text.pdf.
11. *Назаров Л. Е.* // Физ. основы приборостроения. 2020. № 2. С. 10.
12. *Steiner F., Bocherer G., Liva G.* // IEEE Commun. Lett. 2018. V. 22. № 11. P. 2210.
13. *Lin S.-J.* // IEEE Trans. 2018. V. COM-66. № 8. P. 3235.
14. *Ben-Haim X., Litsyn S. A.* // Advances in Mathematics Commun. 2007. V. 1. № 1. P. 83.
15. *Kaipa K.* // IEEE Commun. Lett. 2018. V. 22. № 11. P. 2210.
16. *Назаров Л.Е., Шишкин П.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 910.
17. *Назаров Л.Е., Головкин И.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2011. № 1. http://jre.cplire.ru/jan11/3/text.pdf.
18. *Назаров Л.Е., Батанов В.В., Кузнецов О.О.* // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 9. http://jre.cplire.ru/jre/sep14/1/text.pdf.
19. *Li J., Narayanan R., Kurtas E., Georghiades C.N.* // IEEE Trans. 2002. V. COM-50. № 5. P. 723.
20. *Farhadi G., Jamali S.H.* // IEEE Trans. 2006. V. COM-54. № 9. P. 1643.
21. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: ИД “Вильямс”. 2003.
22. *Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В.* Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М.: Гостехтеориздат, 1955.