РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2022, том 67, № 9, с. 875–889

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.2

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ С ПЕРЕПРИСВОЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВОС-СИГНАЛОВ В ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

© 2022 г. М. С. Ярлыков[a], *, С. М. Ярлыкова[b], **

[a] *Редакция журнала "Радиотехника и электроника",*
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

[b] *Институт кибернетики Российского технологического университета МИРЭА,*
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

**E-mail: red@cplire.ru*

***E-mail: yarlykova@mirea.ru*

Поступила в редакцию 05.04.2022 г.
После доработки 24.04.2022 г.
Принята к публикации 26.04.2022 г.

В рамках марковской теории оценивания на основе метода переприсвоения параметров вектора непрерывных процессов разработаны субоптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов, предназначенных для применения в глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС), таких как GPS (США), ГЛОНАСС (Россия), Galileo (Евросоюз) и BeiDou (Китай). Задача решена применительно к векторному дискретно-непрерывному марковскому случайному процессу для случая, когда его непрерывная часть представляет собой векторный диффузионный марковский процесс, а дискретная часть характеризуется простой цепью Маркова на несколько положений. Принято, что полезные ВОС-сигналы наблюдаются на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Получены аналитические соотношения для субоптимальной условной оценки и матрицы ковариаций субоптимальных условных ошибок оценивания выборки вектора непрерывных параметров. Представлены структурные схемы тех модулей субоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС, которые отличаются от соответствующих модулей квазиоптимальной системы. Результаты работы полностью применимы в случаях шумоподобных сигналов современных ГНСС, у которых ВОС-сигналы пока не используются.

DOI: 10.31857/S0033849422090169

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является развитием предыдущей работы [1], в которой на базе марковской теории оценивания (МТО) методом синтеза с переприсвоением параметров вектора непрерывных процессов (НП) были получены аналитические соотношения для оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки навигационных шумоподобных сигналов (ШПС) и, в частности, перспективных ВОС-сигналов (binary offset carrier modulated signals), глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай), а также региональных навигационных спутниковых систем NavIC (Индия) и QZSS (Япония) [2–6].

При реализации на практике в приемниках ГНСС синтезированных квазиоптимальных алгоритмов с учетом области применения и круга решаемых задач на них, как правило, накладываются дополнительные ограничения и приближения. В результате в приемниках ГНСС используются субоптимальные (более простые) алгоритмы.

В работе полагаем, что приемник ГНСС установлен на высокодинамичном подвижном объекте, в частности, на летательном аппарате (ЛА), таком как самолет, вертолет, беспилотный ЛА и т.д. При этом определение местоположения и параметров динамики перемещения подвижного объекта в ГНСС основывается на псевдодальномерном беззапросном методе, при котором требуется одновременная видимость минимум четырех навигационных космических аппаратов (НКА) [5, 6].

Чтобы на основе измеренных псевдодальностей вычислить прямоугольные координаты подвижного объекта (например, в системе ПЗ-90 или WGS-84), в приемнике ГНСС, кроме того, необходимо для каждого НКА иметь сведения об эфемеридах, альманахе, поправках к бортовой шкале времени (ШВ) и т.д., полученные с помощью принятой навигационной служебной информации (СИ) [5, 6].

Таким образом, принимаемый от j-го НКА полезный ВОС-сигнал $s_j(t)$ представляет собой нелинейную функцию от векторного дискретно-непрерывного процесса (ДНП) $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$:

$$s_j(t) = s_j\left[t, \Theta_j(t), \mathbf{X}(t)\right], \tag{1}$$

где j – номер НКА, $j = \overline{1, J}$, J – общее число всех одновременно видимых в данный момент времени НКА, T – символ транспонирования.

Векторный ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ имеет дискретную часть в виде дискретного процесса (ДП) $\Theta_j(t)$, который содержит навигационную СИ от j-го НКА, и непрерывную часть, представляющую собой векторный диффузионный марковский случайный процесс $\mathbf{X}(t)$ (или его выборку).

Компоненты векторного НП $\mathbf{X}(t)$, как правило, характеризуют запаздывание принимаемого радиосигнала (содержащее информацию о пространственном положении и динамике перемещения подвижного объекта), фазу радиосигнала, доплеровский сдвиг частоты и т.д. [5–7].

Дискретный параметр $\Theta_j(t)$ в принимаемом от j-го НКА ВОС-сигнале $s_j(t)$ (1) является манипулируемой фазой и аппроксимируется простой цепью Маркова на M положений [5, 6].

Задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов в [1] была решена на основе МТО методами нелинейной обработки векторных дискретно-непрерывных марковских случайных процессов [7–11].

Как известно, у навигационных ШПС, в том числе и у ВОС-сигналов, время корреляции компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$ много больше длительности такта цепи Маркова, характеризующей ДП $\Theta_j(t)$ $(j = \overline{1, J})$ [4, 10, 11]. В силу этого в [1] вектор НП $\mathbf{X}(t)$ в пределах каждого тактового интервала принимаемого радиосигнала был аппроксимирован векторным квазислучайным процессом, что позволило при разработке алгоритмов применить метод поэтапного решения уравнения Стратоновича [10, 12].

Кроме того, в [1] при разложении совместной апостериорной плотности вероятности (АПВ) векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ был использован метод синтеза с переприсвоением параметров вектора НП $\mathbf{X}(t)$ [10, 11].

При получении субоптимальных алгоритмов многомерные дискриминаторы и другие модули в структуре приемников ГНСС разрабатываются применительно к своему частному пространству состояний, характеризуемому вектором параметров радиосигнала (ПРС) $\mathbf{Y}_j(t)$ [7, 13].

Каждый вектор ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ соответствует принимаемому от j-го НКА ВОС-сигналу $s_j(t)$ (1), который может быть записан в виде [1, 7, 10]:

$$s_j(t) = s_j\left[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_j(t)\right], \quad j = \overline{1, J}. \tag{2}$$

Компоненты вектора ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ представляют собой параметры, от которых принимаемый радиосигнал $s_j(t)$ непосредственно зависит (псевдодальность и псевдоскорость подвижного объекта, фаза и частота сигнала $s_j(t)$ и т.п.). Число векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ равно J – числу всех одновременно видимых НКА.

Взаимосвязь каждого вектора ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ с вектором НП $\mathbf{X}(t)$ определяется соотношением [1, 7, 13]:

$$\mathbf{Y}_j(t) = \mathbf{L}_j\left\{\mathbf{X}(t)\right\}, \tag{3}$$

где $\mathbf{L}_j\left\{\mathbf{X}(t)\right\}$ – известная нелинейная векторная функция, вектор-столбец $\mathbf{Y}_j(t)$ имеет размер $(m \times 1)$, вектор-столбец $\mathbf{X}(t)$ имеет размер $(n \times 1)$.

При получении субоптимальных алгоритмов важную роль играют матрицы Якоби, характеризующие функциональные связи между компонентами вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, где $j = \overline{1, J}$.

Матрица Якоби $L'_j(t)$ определяется как частная производная вектора-столбца $\mathbf{Y}_j(t)$ по вектору-столбцу $\mathbf{X}(t)$ [7, 10, 13]:

$$\mathbf{L}'_j(t) \triangleq \frac{\partial \mathbf{Y}_j(t)}{\partial \mathbf{X}(t)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_{j1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_{j1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_{j1}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_{j2}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_{j2}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_{j2}}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \dfrac{\partial y_{jm}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_{jm}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_{jm}}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, J}. \tag{4}$$

Видно, что каждая матрица Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ имеет размер $(m \times n)$.

Для ряда приложений в области навигации, в том числе и применительно к ГНСС, изменения во времени элементов матриц Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$, где $j = \overline{1, J}$, на тактовых полуинтервалах $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, пренебрежимо малы. В силу этого при формировании субоптимальных алгоритмов полагаем постоянными во времени матрицы Якоби на тактовых полуинтервалах [7, 10, 13]:

$$\mathbf{L}'_j(t) = \mathbf{L}'_j = \text{const}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Как видно из (3) и (4), число матриц Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ равно числу всех одновременно видимых НКА J.

Цель работы – на основе алгоритмов с переприсвоением параметров получить аналитические соотношения субоптимальных условных оценок выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и ковариационной матрицы субоптимальных условных ошибок оценивания выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$, а также разработать соответствующую структурную схему тех модулей субоптимальной системы, которые отличны от модулей соответствующей квазиоптимальной системы.

В примерах используются sinBOC-сигналы с меандровой модуляцией типа BOC(1,1) на несущей частоте $f_\text{Н} = 1575.42$ МГц при базовой (опорной) частоте $f_\text{ОП} = 1.023$ МГц, которые характерны для E1OS сигналов ГНСС Galileo и для L1C сигналов ГНСС GPS применительно к спутникам GPS III [3, 4, 14, 15].

В работе всюду каждый вектор представляет собой вектор-столбец; производная от скалярной функции по вектору-столбцу понимается как вектор-строка, а выражения вида $\left[\partial/\partial\mathbf{Y}^*_{jk}\right]$ рассматриваются как операторы, воздействующие на функции, расположенные после них.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полагаем, что вектор наблюдения (ВН) $\Xi(t)$ на входе приемника ГНСС имеет вид

$$\Xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_j(t), \ldots, \xi_J(t)]^T, \quad \text{где} \quad t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \tag{6}$$

и характеризуется соотношением

$$\Xi(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{G}_\Xi(t)\mathbf{N}(t), \quad t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \ldots, s_j(t), \ldots, s_J(t)]^T$$

– вектор принимаемых полезных BOC-сигналов от всей совокупности J одновременно видимых в данный момент НКА группировки ГНСС;

$$\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \ldots, n_j(t), \ldots, n_J(t)]^T$$

– вектор аддитивных независимых стандартных белых гауссовских шумов (БГШ) с известными характеристиками; j – номер НКА.

Переходная матрица $\mathbf{G}_\Xi(t)$, входящая в (7), определяет матрицу интенсивностей шумов $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t)$:

$$\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t) = \mathbf{G}_\Xi(t)\mathbf{G}^T_\Xi(t), \tag{8}$$

где матрица $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t)$ – невырожденная, т.е. $\mathbf{B}^{-1}_{\Xi\Xi}(t)$ существует.

Наблюдение на входе приемника ГНСС от j-го НКА $\xi_j(t)$ представляет собой согласно (7) аддитивную смесь полезного BOC-сигнала и шума:

$$\xi_j(t) = s_j(t) + n_j(t), \quad t \in [t_0, t), j = \overline{1, J}, \tag{9}$$

где $s_j(t)$ – принимаемый полезный BOC-сигнал от j-го НКА на входе приемника ГНСС, характеризуемый (7); $n_j(t)$ – аддитивная флуктуационная помеха в наблюдении $\xi_j(t)$ от j-го НКА.

Флуктуационная помеха $n_j(t)$, аппроксимируемая стационарным БГШ, имеет статистические характеристики, определяемые согласно (7), которые записываются в виде

$$M[n_j(t)] = 0; \quad M[n_j(t)n_j(t+\tau)] = \frac{1}{2}N_{0j}\delta|\tau|,$$

где N_{0j} – интенсивность j-го БГШ, $M[\cdot]$ – символ усреднения по множеству реализаций.

Полезные BOC-сигналы $\mathbf{S}(t)$ на входе приемника ГНСС достаточно детально рассмотрены в [1].

Принятый от j-го НКА полезный BOC-сигнал $s_j(t)$ (1) с использованием многопозиционной фазовой манипуляции (ФМ) для передачи СИ согласно [1] описывается следующим выражением:

$$\begin{gathered} s_j(t) = A_j d_j(t-\tau_{3j})\cos[(\omega_{\text{Н}j} + \Delta\omega_{Dj} + \Delta\omega_j)\times \\ \times(t-\tau_{3j}) + \Theta_j(t_k - \tau_{3j})\frac{2\pi}{M} + \varphi_j(t)], \quad j = \overline{1, J}, \end{gathered} \tag{10}$$

где A_j – амплитуда BOC-сигнала, принимаемого от j-го НКА; $d_j(t)$ – модулирующая функция (МФ) BOC-сигнала $s_j(t)$, отражающая специфику навигационных ШПС и собственно BOC-сигналов; $\Theta_j(t_k)$ – информационный ДП, предназначенный для передачи СИ от j-го НКА; $\varphi_j(t)$ – фаза радиосигнала; $\omega_{j\text{Н}} = 2\pi f_{j\text{Н}}$ – круговая несущая частота радиосигнала; $f_{j\text{Н}}$ – несущая частота BOC-сигнала; τ_{3j} – запаздывание принимаемого радиосигнала $s_j(t)$ на трассе от j-го НКА до подвижного объекта; $\Delta\omega_{Dj}$ – доплеровский сдвиг несущей частоты принимаемого радиосигнала $s_j(t)$ на трассе от j-го НКА до приемника ГНСС; $\Delta\omega_j$ – медленный сдвиг несущей частоты $\omega_{j\text{Н}}$, возникающий в канале распространения радиосигнала $s_j(t)$ и в измерительном устройстве приемника. Начало отсчета в (10) принято равным $t_0 = 0$.

В формуле (10) $M = 2^n$ представляет собой показатель многопозиционности ФМ, n – целое положительное число. Так, например, при $M = 2$ $(i = \overline{1, 2})$ имеет место двоичная ФМ, при $M = 4$ $(i = \overline{1, 4})$ – квадратурная ФМ.

Отметим, что в (10) и далее используется более общая модель ФМ (многопозиционная ФМ на M положений) по сравнению с двоичной ФМ, которая используется в навигационных сигналах современных ГНСС.

Характеризующий в (10) многопозиционную ФМ ДП $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}$ применительно к j-му НКА определяется соотношением

$$\vartheta_i = i - 1, \quad \Theta_j(t_k) = \{i - 1\}, \tag{11}$$

где i – номер состояния ДП $\Theta_j(t_k)$, $i = \overline{1, M}$.

У навигационных ВОС-сигналов $s_j(t)$ (10) МФ $d_j(t)$ в простейшем случае является результатом перемножения двух двоичных последовательностей: псевдослучайной последовательности (ПСП) дальномерного кода $g_j(t)$ и меандрового поднесущего колебания (МПК) $r_j(t)$ (специфика ВОС-сигналов) [2–4]. Тогда МФ навигационного ВОС-сигнала $d_j(t)$ записывается в виде [2–4]

$$d_j(t - t_0) = g_j(t - t_0)\, r_j(t - t_0), \tag{12}$$

где $g_j(t)$ – ПСП дальномерного кода, характеризующая навигационный ШПС применительно к j-му НКА, и $r_j(t)$ – МПК, отражающее специфику собственно ВОС-сигнала $s_j(t)$. Последовательности $g_j(t)$ и $r_j(t)$ состоят из чередующихся единичных видеоимпульсов соответствующей длительности, меняющих свою полярность по определенным законам согласно кодовым коэффициентам, значения которых на каждом такте равны +1 или –1.

Вектор принимаемых полезных ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t)$ (7) от всей совокупности J одновременно видимых в данный момент НКА группировки ГНСС может быть представлен в виде

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}[t, \boldsymbol{\Theta}_k, \mathbf{X}(t)], \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\Theta}_k = [\Theta_{1k}, \Theta_{2k}, \ldots, \Theta_{jk}, \ldots, \Theta_{Jk}]^T$ – вектор ДП применительно ко всей совокупности J одновременно видимых НКА; $\Theta_{jk} = \Theta_j(t_k)$ – ДП принимаемого ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) от j-го НКА.

Свойства и характеристики вектора НП $\mathbf{X}(t)$, а также его взаимосвязь с векторами ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, где $j = \overline{1, J}$, применительно к решаемой задаче изложены в [1].

Для характеристики вектора НП $\mathbf{X}(t)$ в [1] использована типовая математическая модель (ММ) динамики объектов навигации (например, ЛА) на основе прямоугольной гринвичской системы координат, которая описывает положение подвижного объекта и его движение в пространстве применительно к небольшим отрезкам времени [1, 7].

Согласно принятой ММ динамики ЛА имеем, что вектор НП $\mathbf{X}(t)$ представляет собой многокомпонентный диффузионный гауссовский марковский процесс, который в общем виде может быть описан векторно-матричным линейным стохастическим дифференциальным уравнением [1, 7]:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_X(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{C}_X(t)\,\mathbf{U}_{\text{упр}}(t) + \mathbf{G}_X(t)\,\mathbf{N}_X(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \tag{14}$$

где $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), .., x_n(t)]^T$ – вектор-столбец НП размером $(n \times 1)$; n – число компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$; $\mathbf{A}_\mathbf{X}(t)$ – матрица состояния размером $(n \times n)$; $\mathbf{U}_{\text{упр}}(t)$ – детерминированный вектор управления; $\mathbf{C}_X(t)$ – матрица управления; $\mathbf{N}_X(t)$ – вектор стандартных БГШ; $\mathbf{G}_X(t)$ – матрица интенсивностей шумов; $\mathbf{B}_{XX}(t) = \mathbf{G}_X(t)\mathbf{G}_X^T(t)$ – матрица коэффициентов диффузии вектора НП $\mathbf{X}(t)$.

Конкретный вид матриц применительно к (14) приведен в [1], где также содержится описание компонент нелинейной векторной функции $\mathbf{L}_j\{\mathbf{X}(t)\}$ (3).

У навигационного ВОС-сигнала, излучаемого j-м НКА, возможные моменты перехода ДП $\Theta_j(t_k)$ из одного состояния в другое являются дискретными и определяются выражением $t_k = t_0 + kT$, где длительность такта $T = \text{const}$.

Длительность такта $T = t_{k+1} - t_k$ ДП $\Theta_j(t_k)$ для ГНСС типа ГЛОНАСС, GPS и Galileo равна длительности информационной посылки СИ: $T = \tau_{\text{СИ}} = 20$ мс [5, 6].

На входе приемника ГНСС у принимаемого от j-го НКА полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) возможные моменты времени перехода ДП $\Theta_j(t_k - \tau_{\text{з}\,j})$ из одного состояния в другое являются случайными, поскольку они зависят от случайного запаздывания $\tau_{\text{з}\,j}$ принимаемого сигнала.

Напомним, что далее применительно к ДП $\Theta_j(t_k)$ в принимаемом от j-го НКА ВОС-сигнале $s_j(t)$ (10) индекс j там, где это не затрудняет понимания, не приводим.

На всех тактовых полуинтервалах времени $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, ДП $\Theta(t_k)$ остается постоянным и характеризуется априорным уравнением вида

$$\frac{d\boldsymbol{\Theta}(t)}{dt} = 0, \quad \text{где} \quad t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Вектор вероятностей начального состояния ДП $\Theta(t_k)$ и матрица одношаговых вероятностей перехода соответственно имеют вид [1, 10, 11]:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_\theta(t_0) = \{P_{\vartheta i}(t_0)\}, \quad \text{где} \quad i = \overline{1, M};\\ \boldsymbol{\pi}(t_k) = [\pi_{il}(t_k)], \quad \text{где}\\ \pi_{il}(t_k) = P\{\Theta(t_k+0) = \vartheta_l | \Theta(t_k - 0) = \vartheta_i\},\\ i, l = \overline{1, M}.\end{gathered} \tag{16}$$

В начале k-го такта $[t_k, t_{k+1})$ вероятности состояний ДП $\Theta(t_k)$

$$P_{\vartheta i}(t_k+0) \triangleq P(t_k+0,\ \Theta(t_k+0) = \vartheta_i)$$

определяются формулой [1, 10, 11]:

$$P_{\vartheta i}(t_k+0) = \sum_{m=1}^{M} \pi_{m\,i}(t_k) P_{\vartheta m}(t_k - 0),\ i = \overline{1, M}, \tag{17}$$

где $P_{\vartheta m}(t_k - 0)$ – вероятность состояния ДП $\Theta(t_k)$ в конце $(k-1)$-го такта $[t_{k-1}, t_k)$.

Для повышения конструктивности решения задачи синтеза в [1] при использовании методов МТО было применено двухэтапное решение уравнения Стратоновича [10, 12].

Применяя метод двухэтапного решения уравнения Стратоновича, удается применительно к j-му НКА обоснованно упростить ММ оцениваемого вектора состояния (ВС), представляющего собой ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$, и тем самым улучшить конструктивность решения задачи синтеза [1, 12, 13].

Суть такого упрощения ММ оцениваемого ВС $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ заключается в возможности описания на тактовых полуинтервалах времени $[t_k, t_{k+1})$, где $t_k = t_0 + k\,\tau_{\text{СИ}}$ ($k = 0, 1, 2, ...$), компонент вектора $\mathbf{X}(t)$ квазислучайными процессами. Применительно к ГНСС $\tau_{\text{СИ}} = 20$ мс [5, 6]. Обработка ВН $\Xi(t)$ (6–8) при этом выполняется в два этапа.

На первом этапе применительно к каждому k-му такту $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, ..$, обрабатывается только вектор НП $\mathbf{X}(t)$ (14) оцениваемого ВС $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$, поскольку ДП $\Theta_j(t)$ при этом остается постоянным.

В таком случае для первого этапа обработки удается найти точное решение уравнения Стратоновича как решение нелинейной задачи оценки параметров в силу аппроксимации ММ вектора НП $\mathbf{X}(t)$ (14) векторным квазислучайным процессом.

На втором этапе обработка осуществляется в дискретном времени в точках $t = t_k + 0$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. в точках возможной смены состояния ДП $\Theta_j(t)$ (с учетом запаздывания $\tau_{\text{З}\,j}$ принимаемого ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) на трассе).

При этом оценки компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$, полученные на первом этапе обработки, используются в качестве начальных значений для второго этапа обработки ВС $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$, где $j = \overline{1, J}$.

В дискретные моменты времени t_k, где $k = 0, 1, 2, ..$, вектор НП $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$, характеризуемый (14), описывается эквивалентным линейным векторно-матричным стохастическим разностным уравнением

$$\begin{gathered}\mathbf{X}_k = \boldsymbol{\Phi}_{XX}(t_k, t_{k-1})\mathbf{X}_{k-1} +\\ + \boldsymbol{\Psi}_{XU}(t_k, t_{k-1})U_{\text{упр}\,k} + \boldsymbol{\Gamma}_X(t_k, t_{k-1})\mathbf{N}_{X\,k},\end{gathered} \tag{18}$$

где $\mathbf{N}_{X\,k} = \mathbf{N}_X(t_k)$ – вектор формирующих стандартных дискретных БГШ, $\boldsymbol{\Phi}_{XX}$, $\boldsymbol{\Psi}_{XU}$ и $\boldsymbol{\Gamma}_X$ – известные матрицы, $U_{\text{упр}\,k}$ – дискретный вектор управления.

Аналогично [1] полагаем, что длительность тактового интервала (информационной посылки СИ) $T = t_{k+1} - t_k$ ДП $\Theta(t_k)$ ($T = \tau_{\text{СИ}} = 20$ мс) достаточно мала, чтобы в (1) вектор НП $\mathbf{X}(t)$ на каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, можно было с требуемой для оценивания степенью точности аппроксимировать векторным квазислучайным процессом [1, 10, 12]:

$$\begin{gathered}\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k),\quad t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \ldots,\\ \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0),\end{gathered} \tag{19}$$

где $\mathbf{f}(\cdot)$ – детерминированная векторная функция; $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k) = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{X}_k)$ – начальное значение на k-м такте.

Функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)$ равна [1, 10, 12]

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k) = \boldsymbol{\Phi}_{XX}(t, t_k)\mathbf{X}_k,\quad t \in [t_k, t_{k+1}), \tag{20}$$

где $\boldsymbol{\Phi}_{XX}(t, t_k)$ – переходная матрица состояния (18).

В соответствии с (19) принимаемый от j-го НКА полезный ВОС-сигнал $s_j(t)$ (1) в пределах одного тактового полуинтервала $[t_k, t_{k+1})$ принимает вид

$$s_j(t) = s_j\left[t, \Theta_{jk}, \mathbf{f}(t_k, \mathbf{X}_k)\right], \tag{21}$$

где $\Theta_{jk} = \Theta_j(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = \overline{1, J}$.

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ С ПЕРЕПРИСВОЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ ВЕКТОРНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$

Задача синтеза, решенная в [1], заключается в том, чтобы на k-м такте $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, имея априорные сведения (11), (18) и (17) и располагая ВН (6) и (7) об оцениваемом ВС $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$, на основе метода с переприсвоением параметров вектора НП получить оптимальную оценку $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и оптимальные оценки $\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0)$ компонент вектора ДП $\mathbf{\Theta}_k = [\Theta_{1k}, \Theta_{2k}, \ldots, \Theta_{jk}, \ldots, \Theta_{Jk}]^T$ применительно ко всей совокупности J одновременно видимых НКА.

Полученная в [1] оптимальная оценка $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$ удовлетворяет критерию минимума апостериорного риска при квадратичной функции потерь.

Известно, что оптимальной оценкой $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$, удовлетворяющей этому критерию, является апостериорное математическое ожидание $M_{ps}[\mathbf{X}_{k+1}]$ выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$ [8–11]:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = M_{ps}[\mathbf{X}_{k+1}] = \int\limits_{\mathbf{X}_{k+1}} \mathbf{X}_{k+1}\, p_{ps}(t, \mathbf{X}_{k+1})\, d\mathbf{X}_{k+1}, \quad (22)$$

где $\hat{\mathbf{X}}(t)$ – оптимальная оценка вектора НП $\mathbf{X}(t)$;

$$p_{ps}(t, \mathbf{X}_{k+1}) \triangleq p(t, \mathbf{X}_{k+1} | \Xi_{t_0}^{t_{k+1}})$$

– АПВ выборки вектора НП $\mathbf{X}_{k+1}$;

$$\Xi_{t_0}^{t_{k+1}} = \{\Xi(\tau) : \tau \in [t_0, t_{k+1}]\}$$

– реализация ВН $\Xi(t)$ на отрезке $[t_0, t_{k+1}]$ применительно к входу приемника ГНСС.

Если АПВ $p_{ps}(t, \mathbf{X}_{k+1})$ является унимодальной и гауссовской, то оптимальная оценка $\hat{\mathbf{X}}(t)$ согласно критерию (22) и критерию максимума АПВ совпадают [8–11], что и полагаем выполненным в дальнейшем.

Оптимальная оценка $\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0)$ ДП $\Theta_j(t)$, где $j = \overline{1, J}$, применительно к j-му НКА в соответствии с [1] удовлетворяет критерию минимума апостериорного риска при простой функции потерь, что эквивалентно критерию максимума апостериорной вероятности (АВ) ДП $\Theta_j(t)$ [8–11]:

$$\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0) = \vartheta_i : \max_{\vartheta_1 \le \vartheta_i \le \vartheta_M} \{P_{ips}(t_{k+1}-0)\}, \quad (23)$$

где $P_{ips}(t_{k+1}-0)$ – АВ состояния ДП $\Theta_j(t)$ в момент времени $t = t_{k+1}-0$.

Задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов была решена в [1] на базе МТО методами нелинейной обработки векторных ДНП [7–12].

Реализация полученных в [1] оптимальных алгоритмов практически затруднена, так как требует знания АПВ вектора НП $\mathbf{X}(t)$. В таких случаях, как обычно, применен метод гауссовской аппроксимации, при котором истинная АПВ вектора НП $\mathbf{X}(t)$ аппроксимируется законом Гаусса, и формируются квазиоптимальные алгоритмы [8–11].

Особенностью применения метода гауссовской аппроксимации применительно к алгоритмам с переприсвоением параметров вектора НП в [1] является то, что гауссовским законом аппроксимируются условные по ДП $\Theta(t)$ АПВ

$$p_{ps}(t_{k+1}+0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i).$$

При формировании оптимальной оценки ДП $\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0)$ на k-м такте все АВ $P_{ips}(t_{k+1}-0)$, где $i = \overline{1, M}$, вычисляются в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени $t = t_{k+1}-0$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Поскольку в течение всего полуинтервала $[t_k, t_{k+1})$ ДП $\Theta_j(t)$ не меняет своего значения, то к окончанию полуинтервала точность оценивания АВ $P_{ips}(t_{k+1}-0)$ ДП $\Theta_j(t)$ максимальна.

Соотношение, характеризующее АВ $P_{ips}(t)$ на первом этапе обработки, имеет следующий вид [1]:

$$P_{ips}(t) = \frac{P_{ips}(t_k+0)\exp\{\Phi_{\mathbf{X}_k i}(t)\}}{\sum\limits_{l=1}^{M} P_{lps}(t_k+0)\exp\{\Phi_{\mathbf{X}_k l}(t)\}}, \quad (24)$$

где

$$\Phi_{\mathbf{X}_k i}(t) \triangleq \int\limits_{t_k}^{t} M_{ps\mathbf{X}_k}\{F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_k)\}\, d\tau \quad (25)$$

– усредненный по $\mathbf{X}_k$ парциальный (i-й) логарифм функционала правдоподобия (ЛФП) вектора НП $\mathbf{X}_k$.

Входящая в (25) производная по времени от ЛФП $F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА определяется по формуле [1]

$$\begin{aligned} F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k) &\triangleq F_{\Sigma}[t, \mathbf{\Theta}_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)] = \\ &= \mathbf{S}^T(t, \mathbf{\Theta}_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{X}_k) \times \\ &\times \mathbf{B}_{\Xi\Xi}^{-1}\left[\Xi(t) - \frac{1}{2}\mathbf{S}(t, \mathbf{\Theta}_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{X}_k)\right], \end{aligned} \quad (26)$$

где $\mathbf{\Theta}_k = [\Theta_{1k}, \Theta_{2k}, \ldots, \Theta_{jk}, \ldots, \Theta_{Jk}]^T$ – вектор ДП для всей совокупности J одновременно видимых НКА.

Усредненное по $\mathbf{X}_k$ значение производной по времени от ЛФП $F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_k)$ характеризуется формулой

$$\begin{aligned} &M_{ps\mathbf{X}_k}\{F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)\} \triangleq \\ &\triangleq \int\limits_{\mathbf{X}_k} F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)\, p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k | j, i)\, d\mathbf{X}_k. \end{aligned} \quad (27)$$

Начальное условие для (24) $P_{i\,ps}(t_k + 0)$ определяется на втором этапе обработки на предыдущем $(k - 1)$-м такте.

Таким образом, на основе критерия (23) в соответствии с (24) на k-м такте в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени $t = t_{k+1} - 0$ $(k = 0, 1, 2,\ldots)$, формируются оптимальные оценки ДП $\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0)$, где $j = \overline{1,J}$.

3. СУБОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ С ПЕРЕПРИСВОЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ ВЕКТОРНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$

Как правило, на синтезированные квазиоптимальные алгоритмы при их реализации с учетом области применения и круга решаемых задач накладываются дополнительные ограничения и приближения.

В результате используются субоптимальные (более простые) алгоритмы.

В задачах синтеза, решаемых на основе МТО, основное упрощение субоптимальных алгоритмов (по сравнению с квазиоптимальными алгоритмами) состоит в том, что в таких алгоритмах применительно к векторным ДНП матрицы Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$(4) на тактовых полуинтервалах $[t_k, t_{k+1})$ принимаются постоянными во времени: $\mathbf{L}'_j(t) = \mathbf{L}'_j =$ $=$ const (5) [16]. По этой причине в подобных задачах субоптимальные алгоритмы отличаются от соответствующих квазиоптимальных лишь на первом этапе обработки, где и фигурируют матрицы Якоби.

На втором этапе в случае субоптимальных алгоритмов обработка сигналов на каждом такте производится по тем же алгоритмам, что и при квазиоптимальных алгоритмах [1, 13].

При формировании субоптимальных алгоритмов в качестве исходных в соответствии с [1] используем соотношения в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1} - 0$, для квазиоптимальной условной оценки

$$\mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1} - 0|t_{k+1} - 0) \triangleq \mathbf{X}^*(t_{k+1} - 0|t_{k+1} - 0;\ \Theta_{jk} = \vartheta_i;\ \ j \text{ — номер НКА}) = \int_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p^*_{ps\,1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k|j,i)\, d\mathbf{X}_k$$

и матрицы ковариаций квазиоптимальных условных ошибок оценивания

$$\mathbf{K}^*_{j,i}(t_{k+1} - 0|t_{k+1} - 0) \triangleq \mathbf{K}^*(t_{k+1} - 0|t_{k+1} - 0;\ \Theta_{jk} = \vartheta_i;\ j \text{ — номер НКА}) = \int_{\mathbf{X}_k} \left[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1} - 0|t_{k+1} - 0)\right] \times \left[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1} - 0|t_{k+1} - 0)\right]^T \times p^*_{ps\,1}\left(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k|j,i\right) d\mathbf{X}_k,$$

где

$$p^*_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k|j,i) \triangleq p^*_1\left(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k|\Xi_{t_0}^{t_{k+1}-0};\ \Theta_{jk} = \vartheta_i;\ j \text{ — номер НКА}\right)$$

— квазиоптимальная условная АПВ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1} - 0$; $\mathbf{X}^*_k$ — квазиоптимальная оценка вектора НП $\mathbf{X}_k$; $j = \overline{1,J}$, $i = \overline{1,M}$.

Квазиоптимальная условная оценка (1-й момент условной АПВ $p^*_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k|j,i)$) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1} - 0$, характеризуется следующим рекуррентным соотношением [1]:

$$\mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1} - 0|t_{k+1} - 0) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{K}^*_{j,i}(t_{k+1} - 0|t_{k+1} - 0)\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_0), \tag{28}$$

где

$$\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_0) \triangleq \left[\frac{\partial \Phi_{\Sigma i}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{X}_0}\right]^T = \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} \left[\frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{X}_0}\right]^T d\tau \tag{29}$$

— первая производная по вектору $\mathbf{X}_0$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_0)$, представляющая собой вектор-столбец размером $(n \times 1)$.

В формулах (28), (29) и далее для краткости используется обозначение:

$$\mathbf{X}_0 \triangleq \mathbf{X}^*_{j,i}(t_k + 0|t_k + 0) = \mathbf{X}^*(t_k + 0|\Theta_{jk} = \vartheta_i;\ j \text{ — номер НКА}) = M_{psj,i}\{\mathbf{X}_k\} = \int_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p^*_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k|j,i)\, d\mathbf{X}_k$$

— квазиоптимальная условная оценка выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце второго этапа обработки на предыдущем $(k - 1)$-м такте, т.е. в момент времени $t = t_k + 0$, при приеме ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) от j-го НКА; $k = 0,1,2,..,\ j = \overline{1,J},\ i = \overline{1,M}$.

Входящая в (29) производная по времени от парциального ЛФП (т.е. ЛФП, соответствующего значению ДП $\theta_k = \vartheta_i$) $F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА характеризуется формулой (26). Сам парциальный ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ определяется как

$$\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k) = \int\limits_{t_k}^{t} F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}_k)d\tau. \tag{30}$$

Матрица ковариаций квазиоптимальных условных ошибок оценивания (2-й момент условной АПВ $p^*_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k|j,i)$) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1} - 0$, характеризуется следующим рекуррентным соотношением [1]:

$$\begin{gathered}\mathbf{K}^*_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0) = \\ = \left[[\mathbf{K}_0]^{-1} - \Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_0)\right]^{-1},\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_0) \triangleq \frac{\partial^2\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_0)}{(\partial\mathbf{X}_0)^2} = \left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}_0}\right]^T \frac{\partial\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_0)}{\partial\mathbf{X}_0} = \\ = \int\limits_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}_0}\right]^T \frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}_0)}{\partial\mathbf{X}_0}d\tau = \left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}_0}\right]^T \int\limits_{t_k}^{t}\frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}_0)}{\partial\mathbf{X}_0}d\tau\end{gathered} \tag{32}$$

— вторая производная по вектору $\mathbf{X}_0$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_0)$, представляющая собой матрицу размером $(n\times n)$;

$$\begin{gathered}\mathbf{K}_0 \triangleq \mathbf{K}^*_{j,i}(t_k+0|t_k+0) = \\ = \mathbf{K}^*(t_k+0|\,\Theta_{jk} = \vartheta_i;\ j \text{ — номер НКА}) = \\ = M_{psj,i}\left\{[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_0][\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_0)]^T\right\} = \\ = \int\limits_{\mathbf{X}_k}[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_0][\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_0]^T\, p^*_{ps}\,(t_k+0,\mathbf{X}_k|j,i\,)\,d\mathbf{X}_k\end{gathered} \tag{33}$$

— матрица ковариаций квазиоптимальных условных ошибок оценивания $\left[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}^*_{j,i}(t_k+0|t_k+0)\right]$ в конце второго этапа обработки на предыдущем (k − 1)-м такте, т.е. в момент времени $t = t_k + 0$, при приеме ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) от j-го НКА; функция $F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}^*_k)$ в (32) определяется согласно (26); $k = 0,1,2,..,\ j = \overline{1,J},\ i = \overline{1,M}$.

Отметим, что в (32) и далее производная от скалярной функции по вектору-столбцу всюду, как обычно, понимается как вектор-строка, а выражение $\left(\partial/\partial\mathbf{X}^*_k\right)^T$ представляет собой дифференциальный оператор, воздействующий на функцию, расположенную от него справа.

Соответствующие соотношения для квазиоптимальной безусловной оценки $\mathbf{X}^*(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ и матрицы ковариаций квазиоптимальных безусловных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1}-0$, применительно к (28) и (31) имеют вид [1]

$$\begin{gathered}\mathbf{X}^*(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0) = \\ = \sum_{i=1}^{M} P_{i\,ps}(t_{k+1}-0)\mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0);\end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{K}^*(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0) = \sum_{i=1}^{M} P_{ips}(t_{k+1}-0)\times \\ \times\Big\{\mathbf{K}^*_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0) + \\ + \left[\mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0) - \mathbf{X}^*(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\right]\times \\ \times\left[\mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0) - \mathbf{X}^*(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\right]^T\Big\},\end{gathered} \tag{35}$$

где $P_{i\,ps}(t_{k+1}-0)$ — АВ состояния ДП Θ_{jk} в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1}-0$; $k = 0,1,2,..,\ i = \overline{1,M},\ j = \overline{1,J}$.

Являющиеся исходными для разработки субоптимальных алгоритмов соотношения, которые характеризуют квазиоптимальную условную оценку $\mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ и матрицу ковариаций квазиоптимальных условных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$, соответственно имеют вид (28) и (31).

При переходе от квазиоптимальных алгоритмов к субоптимальным, как следует из рассмотрения (28) и (31), преобразованиям и упрощениям подвергаются первая $\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_0)$ (29) и вторая $\Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_0)$ (32) производные по вектору $\mathbf{X}_0$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_0)$, что обусловлено взаимосвязями векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ и вектора НП $\mathbf{X}(t)$. В выражениях для производных при этом следует переходить к их зависимостям от векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, а не от вектора НП $\mathbf{X}(t)$.

Первая производная $\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_0)$ (29) и вторая производная $\Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_0)$ (32) получены применительно к совокупности принимаемых

ВОС-сигналов $\mathbf{S}\left[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right]$ (7), (13) от всех одновременно видимых J НКА.

Производная по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ (7) от всех одновременно видимых J НКА характеризуется выражением (26).

При рассмотрении зависимостей производных $\Phi'_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ и $\Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ от векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ (а не от вектора НП $\mathbf{X}(t)$) следует использовать производную по времени ЛФП $F_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk})$ и производную по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk}) \triangleq F_j(t,\Theta_j(t_k)=\{\vartheta_i\},\mathbf{Y}_{jk})$ для какого-либо одного ВОС-сигнала $s_j(t)=s_j\left[t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_j(t)\right]$ (2) и (10), принимаемого от j-го НКА, а не от совокупности сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$, принимаемых от всех видимых J НКА.

Производная по времени ЛФП $F_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу $s_j(t)=s_j[t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_j(t)]$, принимаемому от j-го НКА, характеризуется следующим выражением [13]:

$$F_j(t,\mathbf{Y}_{jk})=\frac{2}{N_{0j}}\left[\xi_j(t)s_j(t,\mathbf{Y}_{jk})-\frac{1}{2}s_j^2(t,\mathbf{Y}_{jk})\right]. \quad (36)$$

Производная по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу

$$s_{ji}(t)=s_j\left[t,\Theta_j(t_k)=\{\vartheta_i\},\mathbf{Y}_j(t)\right],$$

принимаемому от j-го НКА, записывается в виде [13]

$$F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk})=\frac{2}{N_{0j}}\left[\xi_j(t)s_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk})-\frac{1}{2}s_{ji}^2(t,\mathbf{Y}_{jk})\right], \quad i=\overline{1,M}. \quad (37)$$

Формула связи между производной по времени ЛФП $F_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)$ для совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА и производной по времени ЛФП $F_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk})$ для ВОС-сигнала $s_j[t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_j(t)]$, принимаемого от j-го НКА, определяется следующим соотношением [10, 13]:

$$F_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)=\sum_{j=1}^{J}F_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk}). \quad (38)$$

Соответствующая формула связи между производной по времени от парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ для совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА и производной по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk})$ для ВОС-сигнала

$$s_{ji}(t)=s_j\left[t,\Theta_j(t_k)=\{\vartheta_i\},\mathbf{Y}_j(t)\right],$$

принимаемого от j-го НКА, имеет вид

$$F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)=\sum_{j=1}^{J}F_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk}), \quad \text{где} \quad i=\overline{1,M}. \quad (39)$$

Формулы связи, аналогичные (38) и (39), для самих ЛФП могут быть представлены в следующем виде:

$$\Phi_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)=\sum_{j=1}^{J}\Phi_j(t,\Theta_j(t_k),\mathbf{Y}_{jk}), \quad (40)$$

$$\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)=\sum_{j=1}^{J}\Phi_{ji}(t,\mathbf{Y}_{jk}), \quad (41)$$

где $\Phi_\Sigma\left(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right)$ – ЛФП для совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА; $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ – парциальный (i-й) ЛФП для совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА.

Как следует из рассмотрения (29) и (32), чтобы вычислить первую $\Phi'_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k^*)$ и вторую $\Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k^*)$ производные, необходимо знать

$$\frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{X}_k^*}$$

и, следовательно, с учетом (39) требуется найти

$$\frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{X}(t)},$$

где $F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))$ определяется согласно (37).

Видно, что

$$\frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{X}(t)}=\frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{Y}_j(t)}\frac{\partial \mathbf{Y}_j(t)}{\partial \mathbf{X}(t)}=\frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{Y}_j(t)}\mathbf{L}'_j(t), \quad (42)$$

где матрица Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ характеризуется формулой (4); $\mathbf{Y}_j(t)=\left[y_{j1}(t)y_{j2}(t),\ldots,y_{jm}(t)\right]^T$ – вектор-столбец размером $(m\times1)$; $\mathbf{X}(t)=[x_1(t)x_2(t)\ldots x_n(t)]^T$ – вектор-столбец размером $(n\times1)$.

3.1. Субоптимальная условная оценка $\tilde{\mathbf{X}}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$

Субоптимальная условная (по ДП Θ_{jk}) оценка $\tilde{\mathbf{X}}_{ji}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$, при приеме ВОС-сигнала $s_j(t)$ (16) от j-го НКА определяется как

$$\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)=\int_{\mathbf{X}_k}\mathbf{X}_k\tilde{p}_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k|j,i)d\mathbf{X}_k, \quad (43)$$

где

$$\tilde{p}_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k|j,i)=\mathcal{N}\left\{\mathbf{X}_k-\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0);\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\right\} \quad (44)$$

– субоптимальная условная АПВ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$; $\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ – субоптимальная условная оценка выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$; $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ – матрица ковариаций субоптимальных условных ошибок оценивания $\left[\mathbf{X}_k-\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\right]$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$; $\mathcal{N}$ – символ гауссовского закона распределения.

Субоптимальная условная оценка $\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$, на основании (28)–(30) характеризуется следующим рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)=\\&=\tilde{\mathbf{X}}_0+\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\,\mathbf{\Phi}'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_0),\end{aligned} \quad (45)$$

где $\mathbf{\Phi}'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_0)$– первая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_0$ парциального ЛФП $\mathbf{\Phi}_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_0)$, определяемая согласно (29) с учетом ограничения (5);

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{X}}_0\triangleq\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_k+0|t_k+0)=\\&=\int_{\mathbf{X}_k}\mathbf{X}_k\tilde{p}_{ps}(t_k+0,\mathbf{X}_k|j,i)d\mathbf{X}_k\end{aligned}$$

– субоптимальная условная оценка выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце второго этапа обработки на предыдущем $(k-1)$-м такте, т.е. в момент времени $t=t_k+0$; $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ – матрица ковариаций субоптимальных условных ошибок оценивания в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$; $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$. В формуле (45) парциальный ЛФП $\mathbf{\Phi}_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_0)$ характеризуется в соответствии с (41) и (30).

Далее применительно к субоптимальным алгоритмам (т.е. с учетом ограничения (5)) получим аналитическое соотношение, определяющее первую производную $\mathbf{\Phi}'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_0)$ для принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ (7) от всех одновременно видимых J НКА.

С этой целью, следуя формуле связи (41), сначала необходимо найти соотношение, характеризующее первую производную $\mathbf{\Phi}'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к ВОС-сигналу

$$s_{ji}(t)=s_j\left[t,\Theta_j(t_k)=\{\vartheta_i\},\mathbf{Y}_j(t)\right],$$

принимаемому от j-го НКА, где $j=\overline{1,J}$.

Первая производная $\mathbf{\Phi}'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ на основании (42) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)&=\int_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T d\tau=\\&=\int_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}'_j(\tau)\right]^T d\tau,\end{aligned} \quad (46)$$

где $\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}=\tilde{\mathbf{Y}}_j(t_k)$ – субоптимальная оценка выборки вектора ПРС $\mathbf{Y}_{jk}$ в соответствии с (3), $\mathbf{L}'_j(t)$ – матрица Якоби (4), $j=\overline{1,J}$.

Учитывая правило транспонирования произведения матриц, производную (46) представим следующим образом:

$$\mathbf{\Phi}'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\int_{t_k}^{t}[\mathbf{L}'_j(\tau)]^T\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau. \quad (47)$$

Формируя субоптимальные алгоритмы, на матрицы Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$(4) накладываем ограничение (5) о постоянстве их во времени на каждом тактовом полуинтервале $[t_k,t_{k+1})$, где $k=0,1,2,\ldots$ [16]. Учтя наложенное ограничение (5), матрицу Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ в формуле (47) вынесем за знак интеграла. При этом производная $\mathbf{\Phi}'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ упрощается и принимает вид

$$\mathbf{\Phi}'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=[\mathbf{L}'_j]^T\int_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau, \quad (48)$$

где $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$

Согласно (41) производные $\mathbf{\Phi}'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ и $\mathbf{\Phi}'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ взаимосвязаны следующим образом:

$$\mathbf{\Phi}'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\sum_{j=1}^{J}\mathbf{\Phi}'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k). \quad (49)$$

Подставив (48) в соотношение (49), находим, что первая производная парциального (i-го) ЛФП $\mathbf{\Phi}'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (29) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$

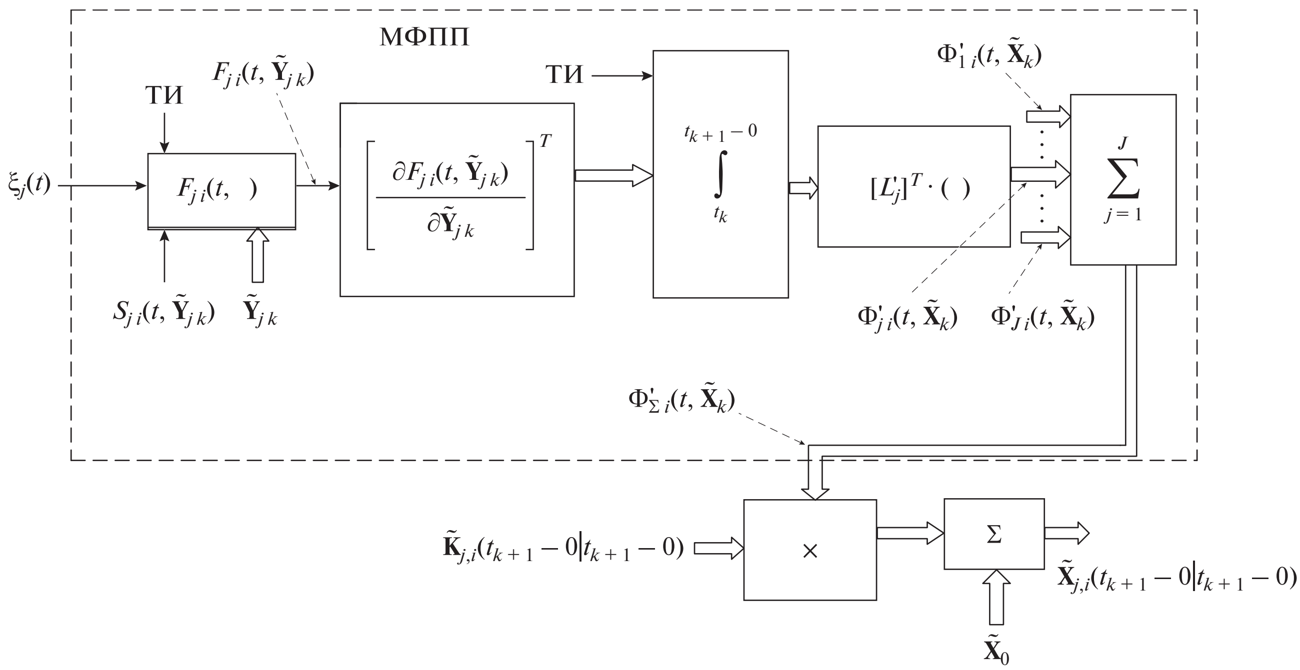

Рис. 1. Структурная схема модуля формирования субоптимальной условной оценки $\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|\,t_{k+1}-0)$: МФПП – модуль формирования первой производной, ТИ – тактовые импульсы; векторные связи показаны двойными линиями.

от всех одновременно видимых J НКА характеризуется следующей итоговой формулой:

$$\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \sum_{j=1}^{J}[\mathbf{L}'_j]^T \int_{t_k}^{t} \left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau, \qquad (50)$$

где $F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется в соответствии с (37).

Таким образом, разностное уравнение для субоптимальной условной оценки $\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1}-0$, согласно (45) и с учетом (5) и (50) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (7) от всех одновременно видимых J НКА окончательно принимает вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_{ji}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0) = \tilde{\mathbf{X}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\times \\ \times\left[\sum_{j=1}^{J}[\mathbf{L}'_j]^T \int_{t_k}^{t_{k+1}-0}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau\right], \qquad (51)$$

где матрица Якоби $\mathbf{L}'_j$ характеризуется в соответствии с (4) и (5), $F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется согласно (37), $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$

Как следует из сопоставления (28), (45) и (51), разностные уравнения, характеризующие квазиоптимальную условную оценку $\mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ и субоптимальную условную оценку $\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$, отличаются друг от друга соотношениями для первых производных $\Phi'_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*_k)$ (29) и $\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (50).

В случае субоптимальной условной оценки $\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ первая производная $\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ вычисляется по менее точной, но более простой формуле (50), чем при использовании квазиоптимальной условной оценки $\mathbf{X}^*_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$.

Структурная схема модуля формирования субоптимальной условной оценки $\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$, выполненная в соответствии с алгоритмами (37), (48)–(51), представлена на рис. 1.

На вход МФПП поступают сигнал $\xi_j(t)$ (9) от j-го НКА, представляющий собой аддитивную смесь полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) и шума $n_j(t)$, а также опорный ВОС-сигнал $\mathrm{S}_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$. На выходной сумматор МФПП поступает как сформированный в нем сигнал первой производной $\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$, так и поступающие с других модулей сигналы первых производных $\Phi'_{li}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$, где $l \neq j$, $l=\overline{1,J}$. С выхода МФПП снимается результирующий сигнал первой производной $\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$, который подается на вход умножителя. На другой вход умножителя подается сигнал матрицы ковариаций субоптимальных условных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$. Выходной сигнал умножителя складывается в сумматоре с начальной субоптимальной условной оценкой $\tilde{\mathbf{X}}_0$. С выхода сумматора снимется сигнал субоптимальной условной оценки $\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$.

3.2. Матрица ковариаций субоптимальных условных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$

Матрица ковариаций $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ субоптимальных условных ошибок оценивания $\left[\mathbf{X}_k-\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\right]$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$, при приеме ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) от j-го НКА определяется как

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)=\\=\int\limits_{\mathbf{X}_k}\left[\mathbf{X}_k-\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\right]\times\\\times\left[\mathbf{X}_k-\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\right]^T\times\\\times\,\tilde{p}_{ps\,1}(t_{k+1}-0\,\mathbf{X}_k|j,i)d\mathbf{X}_k,\end{gathered}\tag{52}$$

где $\tilde{p}_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k\,|j,i)$ – субоптимальная условная АПВ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$, характеризуемая (44).

На основании (31)–(33) матрица ковариаций субоптимальных условных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$, применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}\left[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k\right]$ (7) и (13) от всех одновременно видимых J НКА характеризуется следующим разностным уравнением:

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)=\\=\left[\left[\mathbf{K}_0\right]^{-1}-\Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_0)\right]^{-1},\end{gathered}\tag{53}$$

где $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_0)\triangleq\dfrac{\partial^2\Phi_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_0)}{(\partial\tilde{\mathbf{X}}_0)^2}$ – вторая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_0$ парциального ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_0)$, определяемая согласно (32) с учетом ограничения (5) в случае субоптимальных алгоритмов; $\tilde{\mathbf{X}}_0\triangleq\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_k+0|t_k+0)$ – субоптимальная условная оценка выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце второго этапа обработки на предыдущем $(k-1)$-м такте, т.е. в момент времени $t=t_k+0$;

$$\begin{gathered}\mathbf{K}_0\triangleq\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_k+0|t_k+0)=\\=\int\limits_{\mathbf{X}_k}\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_0\right]\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_0\right]^T\times\\\times\,\tilde{p}_{ps}\left(t_k+0,\mathbf{X}_k|j,i\right)d\mathbf{X}_k\end{gathered}\tag{54}$$

– матрица ковариаций субоптимальных условных ошибок оценивания $\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_0\right]$ в конце второго этапа обработки на предыдущем $(k-1)$-м такте, т.е. в момент времени $t=t_k+0$, при приеме ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) от j-го НКА; $k=0,1,2,..$, $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$.

Далее получим аналитическое соотношение, определяющее вторую производную по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (32) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ (13) от всех одновременно видимых J НКА.

Для вторых производных $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ на основании формулы связи (41) выполняется следующее соотношение:

$$\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\sum_{j=1}^{J}\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k),\tag{55}$$

где $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ – вторая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ для принимаемого от j-го НКА полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10).

Согласно (32) вторая производная $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ может быть вычислена по формуле

$$\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}.\tag{56}$$

Выражение $\left[\partial/\partial\tilde{\mathbf{X}}_k\right]^T$ в (56) на основании (3), (4) и (42) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T=\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T=\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}'_j\right]^T=\\=\left[\mathbf{L}'_j\right]^T\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T.\end{gathered}\tag{57}$$

Применительно к субоптимальным алгоритмам в силу принятого ограничения (5) о постоянстве во времени матриц Якоби на тактовых полуинтервалах в (57) имеем

$$\mathbf{L}'_j(t)=\mathbf{L}'_j\triangleq\frac{\partial\mathbf{Y}_j}{\partial\mathbf{X}}=\text{const},$$

где $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$ [16].

Согласно (30) и (46) с учетом (5) первая производная

$$\Phi'_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) \triangleq \frac{\partial \Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial \tilde{\mathbf{X}}_k}$$

применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (10) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial \Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial \tilde{\mathbf{X}}_k} = \frac{\partial \Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}} \mathbf{L}'_j. \quad (58)$$

Подставив выражения (57) и (58) в формулу (56), окончательно получим, что вторая производная $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ для принимаемого от j-го НКА полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) характеризуется следующим соотношением:

$$\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \left[\mathbf{L}'_j\right]^T \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T \frac{\partial \Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}} \mathbf{L}'_j, \quad (59)$$

где $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$.

Применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА вторая производная парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (32) на основании (55) и (59) равна:

$$\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \sum_{j=1}^{J} \left[\mathbf{L}'_j\right]^T \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T \frac{\partial \Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}} \mathbf{L}'_j, \quad (60)$$

где парциальный (i-й) ЛФП $\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ для принимаемого от j-го НКА полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) по аналогии с (30) имеет вид

$$\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}) = \int_{t_k}^{t} F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})d\tau. \quad (61)$$

Входящая в (61) функция $F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ характеризуется (37).

Согласно (61) можно записать, что

$$\frac{\partial \Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}} = \int_{t_k}^{t} \frac{\partial F_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}} d\tau. \quad (62)$$

Тогда имеем, что вторая производная парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (32) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА на основании (60) с учетом (62) характеризуется следующей итоговой формулой:

$$\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \sum_{j=1}^{J} \left[\mathbf{L}'_j\right]^T \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T \times \\ \times \left[\int_{t_k}^{t} \frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}} d\tau\right] \mathbf{L}'_j, \quad (63)$$

где $F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется в соответствии с (37), $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$

Таким образом, разностное уравнение для матрицы ковариаций $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ субоптимальных условных ошибок оценивания $\left[\mathbf{X}_k-\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)\right]$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$, применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (7) и (13) от всех одновременно видимых J НКА с учетом ограничения (5) имеет вид (53), где вторая производная $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ определяется формулой (63).

Из сопоставления (31) и (53) видно, что разностные уравнения для матрицы ковариаций $\mathbf{K}^{*}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ квазиоптимальных условных оценок ошибок оценивания и матрицы ковариаций $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ субоптимальных условных оценок ошибок оценивания различаются соотношениями, определяющими их вторые производные $\Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^{*}_k)$ (32) и $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (63).

При вычислении матрицы ковариаций субоптимальных условных оценок ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k|t_{k+1}-0)$ вторая производная $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ вычисляется по менее точной, но более простой формуле, чем при вычислении матрицы ковариаций квазиоптимальных условных оценок ошибок оценивания $\mathbf{K}^{*}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$.

Структурная схема модуля формирования матрицы ковариаций $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ субоптимальных условных ошибок оценивания, выполненная в соответствии с алгоритмами (37), (53)–(55) и (59)–(63), представлена на рис. 2.

На вход МФВП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ поступают сигнал $\xi_j(t)$ (9) от j-го НКА, представляющий собой аддитивную смесь полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$(10) и шума $n_j(t)$, а также опорный ВОС-сигнал $\mathrm{S}_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$. Структура МФВП определяется алгоритмом (63). На выходной сумматор МФВП поступают как сформированный в нем сигнал второй производной $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$, так и поступающие с

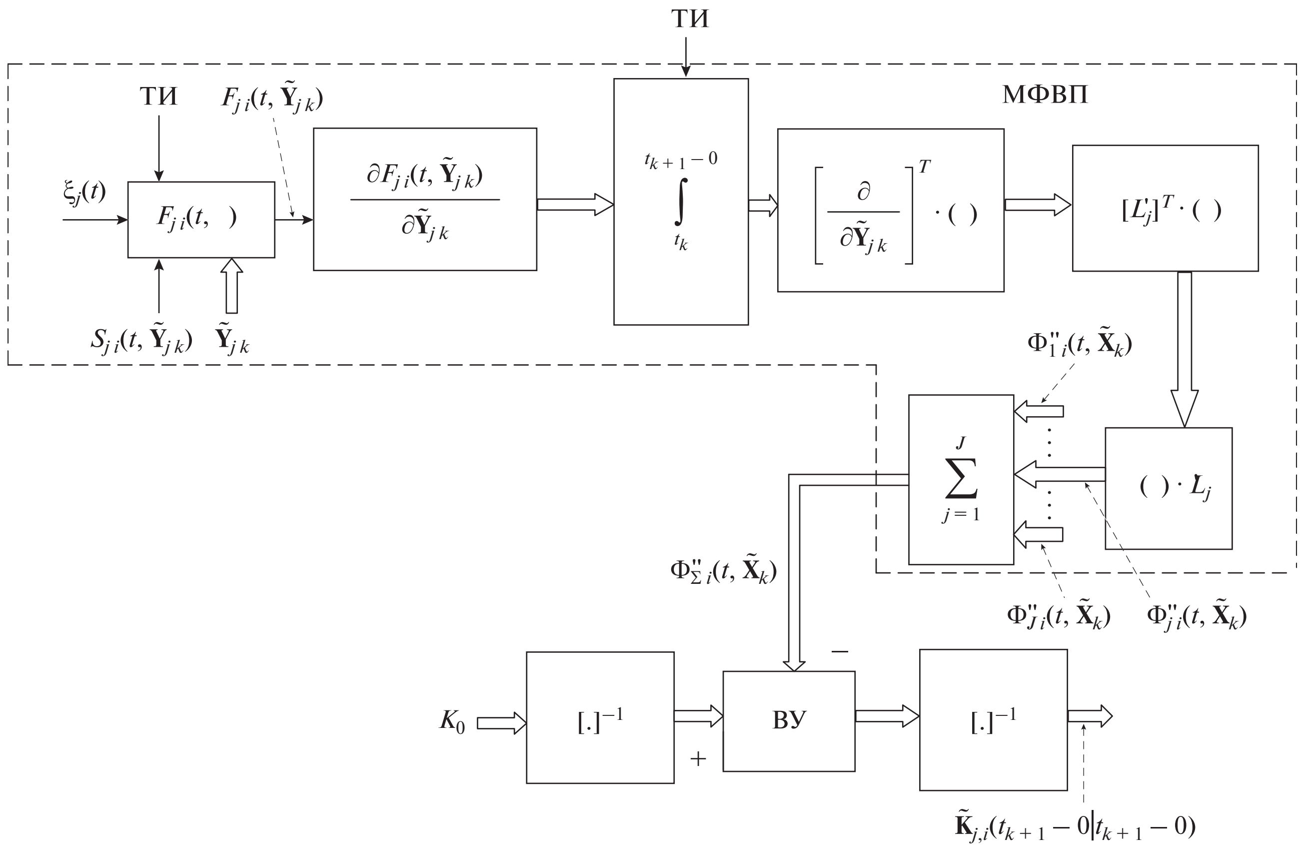

Рис. 2. Структурная схема модуля формирования матрицы ковариаций $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0)$ субоптимальных условных ошибок оценивания: МФВП – модуль формирования второй производной, ВУ – вычитающее устройство, ТИ – тактовые импульсы; векторные связи показаны двойными линиями.

других модулей сигналы вторых производных $\Phi''_{li}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, где $l \neq j$, $l = \overline{1, J}$. С выхода МФВП снимается результирующий сигнал второй производной $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, который подается на вход ВУ. На другой вход ВУ подается сигнал обратной матрицы $[\mathbf{K}_0]^{-1}$, где $\mathbf{K}_0$ – матрица ковариаций субоптимальных условных ошибок оценивания в конце второго этапа обработки на предыдущем $(k-1)$-м такте. Выходной сигнал ВУ в соответствии с алгоритмом (53) подается на модуль обращения матрицы, где и формируется сигнал матрицы ковариаций $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0)$ субоптимальных условных ошибок оценивания.

Алгоритмы для вычисления субоптимальной безусловной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0)$ и матрицы ковариаций $\tilde{\mathbf{K}}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0)$ субоптимальных безусловных ошибок оценивания в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1} - 0$, по сути те же самые, что в случае квазиоптимальных алгоритмов [1].

В случае субоптимальных алгоритмов обработка сигналов на втором этапе на каждом такте производится по тем же алгоритмам, что при квазиоптимальных алгоритмах [1].

Основные соотношения субоптимальных алгоритмов для вычисления оценок ДП $\tilde{\Theta}_{j(k+1)}$, $j = \overline{1, J}$, остаются теми же, что и в случае квазиоптимальных алгоритмов [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены субоптимальный прием и обработка навигационных ШПС и, в частности, быстро развивающихся ВОС-сигналов (меандровых ШПС), которые предназначены для применения в ГНСС, таких как GPS (США), ГЛОНАСС (Россия), Galileo (Европейский союз) и BeiDou (Китай).

В представленной работе, являющейся развитием [1], на основе метода синтеза с переприсвоением параметров получены более простые аналитические соотношения – субоптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС, что важно для практической реализации.

При переходе от квазиоптимальных алгоритмов к субоптимальным учтено то, что в многоканальном приемнике ГНСС, установленном, например, на ЛА, каждый канал обработки радиосигналов функционирует применительно к своему принимаемому от j-го НКА сигналу $s_j(t)$ (10) и к своему вектору ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ (3), соответствующему j-му НКА, где $j = \overline{1,J}$ (J – число всех одновременно видимых НКА).

Помимо этого, при получении аналитических соотношений субоптимальных алгоритмов на динамику компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ с целью их упрощения наложено ограничение, состоящее в том, что на каждом тактовом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ матрицы Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$, где $j = \overline{1,J}$, (4) были приняты постоянными во времени (5).

Основной научный результат работы состоит в том, что получены аналитические выражения для субоптимальной условной оценки $\tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ и матрицы ковариаций $\tilde{\mathbf{K}}_{j,i}(t_{k+1}-0|t_{k+1}-0)$ субоптимальных условных ошибок оценивания $\left[\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_{j,i}(t_{k+1}-0|\,t_{k+1}-0)\right]$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1}-0$.

Использованная методика решения задачи синтеза субоптимальных алгоритмов приема ВОС-сигналов в полной мере применима и для тех режимов функционирования ГНСС, при которых используются не ВОС-сигналы (т.е. не меандровые ШПС), а традиционные ШПС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ярлыков М.С.* // РЭ. 2022. Т. 67. № 5. С. 454.
2. *Betz J.W.* // Proc. National Technical Meeting of the Institute of Navigation (ION – NTM'99), San Diego. 25–27 Jan. 1999. Fairfax: ION, 1999. P. 639.
3. *Betz J.W.* // Navigation J. ION. 2001. V. 48. № 4. P. 227.
4. *Ярлыков М.* С. Меандровые шумоподобные сигналы (ВОС-сигналы) и их разновидности в спутниковых радионавигационных системах. М.: Радиотехника, 2017.
5. *Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др.* Сетевые спутниковые радионавигационные системы. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1993.
6. *Соловьев Ю.А.* Системы спутниковой навигации. М.: Эко-Трендз, 2000.
7. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
8. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
9. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
10. *Ярлыков М.С., Миронов М.А.* Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
11. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1991.
12. *Ярлыков М.С., Шишкин В.Ю.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 2. С. 260.
13. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 8. С. 733.
14. *Betz J.W., Blanco M.A., Cahn Ch.R. et al.* // Proc. 19th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2006). Fort Worth. 26–29 Sept. Fairfax: ION, 2006. P. 2080.
15. *Wallner S., Hein G.W., Avila-Rodriguez J.-A.* // Proc. 3rd Europ. Space Agency Workshop on Satellite Navigation, Navitec 2006. Nordwijk. 11–13 Dec. Noordwijk: ESTEC, 2006.
16. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 8. С. 933.