*РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 68, № 1, с. 3–12*

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

*УДК 537.874.6:621.396.677*

# ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНОГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ АНАЛИЗА ПОГЛОЩАЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР СО СФЕРИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ТИПА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

**© 2023 г. Я. И. Чижевская[a, b], О. Н. Смольникова[b, c], Б. А. Левитан[a, b, c], И. В. Зимин[a, b], С. П. Скобелев[a, b, *]**

[a]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Институтский пер., 9, Долгопрудный Московской обл., 141700 Российская Федерация*

[b]*Публичное акционерное общество "Радиофизика", ул. Героев Панфиловцев, 10, Москва, 125363 Российская Федерация*

[c]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шос., 4, Москва, 125993 Российская Федерация*

**E-mail: s.p.skobelev@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.04.2022 г.
После доработки 26.04.2022 г.
Принята к публикации 27.05.2022 г.

Рассмотрена задача рассеяния плоской электромагнитной волны на двумерно-периодической структуре, образованной из поглощающих сферических радиально неоднородных диэлектрических элементов типа электромагнитных черных дыр, расположенных на полубесконечной подложке. Разработан численный алгоритм решения, основанный на гибридном проекционном методе с учетом особенностей конструкции черных дыр. Алгоритм также обобщен на случай расположения черных дыр на идеально проводящем экране. Выведены новые выражения для расчета мощности, поглощенной элементами структуры, и представлены численные результаты, характеризующие эффективность поглощения структуры.

**DOI:** 10.31857/S0033849423010047, **EDN:** CCRCIB

## ВВЕДЕНИЕ

Исследования и разработки поглощающих структур для работы в сверхвысокочастотном (СВЧ) и оптическом диапазонах представляют большой интерес уже долгое время, так как они находят ряд важных практических приложений. Указанные структуры применяются в безэховых камерах, предназначенных для измерения характеристик антенн и СВЧ-устройств, в качестве средств обеспечения электромагнитной совместимости различных устройств, в качестве средств снижения эффективной площади рассеяния наземных и воздушных объектов и в устройствах для приема и преобразования солнечного света.

Современные требования для поглощающих структур включают близкую к 100% эффективность поглощения в широкой полосе частот и в широком секторе углов падения. Одним из перспективных типов элемента для таких структур, удовлетворяющих указанным требованиям, является так называемая электромагнитная черная дыра. Такой элемент был впервые предложен в [1] в форме цилиндра с поглощающей однородной центральной частью и неоднородной оболочкой без потерь. Указанный поглотитель характеризуется тем фактом, что благодаря специальному радиальному профилю проницаемости оболочки геометрооптические лучи, входящие в него, оказываются в ловушке и поглощаются в его центральной части. Другие модификации цилиндрических черных дыр предложены и исследованы в [2–9]. Аналогичные исследования одиночных сферических электромагнитных черных дыр были проведены в [10–12].

Результаты исследований, приведенные в указанных выше публикациях, показывают, что одиночные электромагнитные черные дыры как цилиндрической, так и сферической формы могут обеспечивать высокую эффективность поглощения в широкой области частот. Этот факт вызвал определенный интерес в исследовании эффективности использования черных дыр в качестве элементов поглощающих периодических структур. Одномерно-периодические структуры из цилиндрических черных дыр были исследованы в

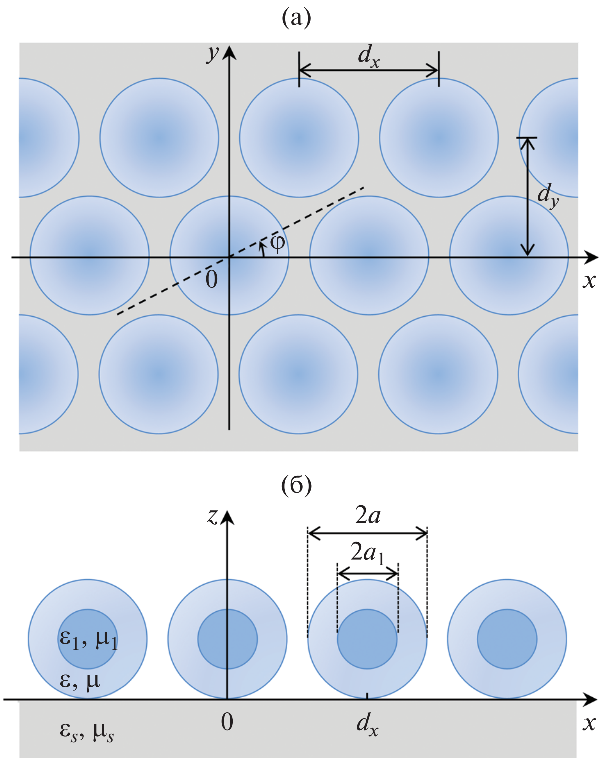


**Рис. 1.** Вид сверху (а) и продольный разрез (б) двумерно-периодической структуры со сферическими элементами на подложке.

[13—15]. Исследования показали высокую эффективность указанных структур, сравнимую с эффективностью структур с клиновидными элементами, но достижимую при значительно меньшей толщине поглощающего слоя.

Первые результаты, полученные для двумерно-периодических структур со сферическими черными дырами, были недавно доложены в [16]. Цель данной работы — дальнейшие исследования указанных структур на основе соответствующих модификаций гибридного проекционного метода, предложенного в [17] для анализа структур только с *продольно* неоднородными элементами. В работе описаны алгоритмы, соответствующие расположению *радиально* неоднородных черных дыр на полубесконечной диэлектрической подложке и на идеально проводящем экране, приведен вывод новых соотношений для расчета мощности, поглощенной черными дырами, которые будут использоваться для расчетов эффективности поглощения структуры. Полученные результаты, характеризующие эффективность применения сферических черных дыр в поглощающих структурах, сравниваются с аналогичными результатами для структур с традиционными пирамидальными поглощающими элементами.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Геометрия исследуемой двумерно-периодической структуры в декартовой системе координат приведена на рис. 1. Структура образована двухслойными сферическими элементами внешнего радиуса $a$, расположенными на подложке в узлах прямоугольной или треугольной сетки с межэлементным расстоянием $d_x$ в строках, а соседние строки расположены на расстоянии $d_y$ друг от друга. Внешний слой каждого элемента является неоднородным с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x, y, z)$, зависящей от радиальной координаты $r = [x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{1/2}$. Центральная область элемента представляет собой однородную диэлектрическую сферу радиусом $a_1$ и с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1$. Подложка представляет собой однородное полупространство с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_s$. Относительная магнитная проницаемость элементов структуры $\mu$ и $\mu_1$, а также подложки $\mu_s$ равны единице. Относительная диэлектрическая проницаемость и относительная магнитная проницаемость над подложкой вне сфер также считаются равными единице.

Предполагается, что структура возбуждается плоской поперечно электрической ($TE$) волной с амплитудой $A_1$ или поперечно магнитной ($TM$) волной с амплитудой $A_2$, падающей под углом $\theta$ к оси $z$ в вертикальной плоскости, расположенной под углом $\varphi$ к плоскости $x0z$ (см. рис. 1а). Цель задачи — определить поле, отраженное от структуры, и поле как в области, содержащей сферические элементы, так и в подложке. Наибольший практический интерес представляет коэффициент отражения волны от структуры, характеризующий согласование последней со свободным пространством, и мощность, поглощенную в элементах структуры и в подложке.

Согласно [17], поперечные составляющие электрического и магнитного полей над элементами структуры при $z \geq h$, $h = 2a$ (см. рис. 1б) представляются в виде разложений по полной системе гармоник Флоке:

$$\vec{E}_t = \eta_0(A_1 k\,\vec{\psi}_{100} - A_2\Gamma_{00}\,\vec{\psi}_{200})\exp[-i\Gamma_{00}(z-h)] + \eta_0\sum_{p,q}(R_{1pq}k\,\vec{\psi}_{1pq} + R_{2pq}\Gamma_{pq}\,\vec{\psi}_{2pq})\exp[i\Gamma_{pq}(z-h)], \quad (1)$$

$$\vec{H}\times\vec{e}_z = (-A_1\Gamma_{00}\,\vec{\psi}_{100} + A_2 k\,\vec{\psi}_{200})\exp[-i\Gamma_{00}(z-h)] + \sum_{p,q}(R_{1pq}\Gamma_{pq}\,\vec{\psi}_{1pq} + R_{2pq}k\,\vec{\psi}_{2pq})\exp[i\Gamma_{pq}(z-h)], \quad (2)$$

соответствующих зависимости от времени $\exp(-i\omega t)$, где $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ — волновое сопротивление для свободного пространства, $R_{jpq}$ — неизвестные амплитуды отраженных $TE$-($j = 1$) и $TM$-волн ($j = 2$),

$$\Gamma_{pq} = (k^2 - w_{pq}^2)^{1/2} \tag{3}$$

— продольные постоянные распространения, $w_{pq} = (\alpha_p^2 + \beta_{pq}^2)^{1/2}$,

$$\alpha_p = ku + 2\pi p/d_x, \quad \beta_{pq} = kv + 2\pi(q - p\delta)/d_y, \tag{4}$$

— поперечные постоянные распространения, $u = \sin\theta\cos\varphi$ и $v = \sin\theta\sin\varphi$ — направляющие косинусы для падающей волны, $\delta = 0$ для прямоугольной сетки и $\delta = 1/2$ для треугольной сетки, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\lambda$ — длина волны в свободном пространстве, $\vec{\psi}_{1pq}(x, y)$ и $\vec{\psi}_{2pq}(x, y)$ — ортонормированные поперечные векторные функции, определяемые через поперечные постоянные распространения (4) и ортонормированные скалярные функции

$$\psi_{pq}(x, y) = \frac{\exp(i\alpha_p x + i\beta_{pq} y)}{\sqrt{d_x d_y}}, \tag{5}$$

как указано в [17].

Для упрощения записи последующих формул мы вводим сквозную порядковую нумерацию гармоник Флоке для каждого типа. И далее двойной индекс $pq$, используемый в (1)—(5), заменим одиночным.

Поля в подложке ($z \le 0$) также представляем в виде разложения по гармоникам Флоке

$$\vec{E}_t = \eta_0 \sum_q (T_{1q} k\, \vec{\psi}_{1q} - T_{2q}\Gamma_{sq}\, \vec{\psi}_{2q}) \exp(-i\Gamma_{sq} z), \tag{6}$$

$$\vec{H} \times \vec{e}_z = \sum_q (-T_{1q}\Gamma_{sq}\, \vec{\psi}_{1q} + T_{2q} k\varepsilon_s\, \vec{\psi}_{2q}) \exp(-i\Gamma_{sq} z) \tag{7}$$

с неизвестными амплитудами $T_{jq}$ и постоянными распространения $\Gamma_{1q} = (k^2\varepsilon_s - w_q^2)^{1/2}$, учитывающими специфику подложки.

Поперечные составляющие полей в области $0 \le z \le h$, содержащей сферические элементы, ищем в виде разложений по поперечным функциям

$$\vec{E}_t = \eta_0 k \sum_q [E_{1q}(z)\, \vec{\psi}_{1q} + E_{2q}(z)\, \vec{\psi}_{2q}], \tag{8}$$

$$\vec{H}_t = k \sum_q [H_{1q}(z)\, \vec{\psi}_{1q} + H_{2q}(z)\, \vec{\psi}_{2q}], \tag{9}$$

с неизвестными коэффициентами, зависящими от $z$.

Выражения для продольных составляющих полей, определяемые через (6) и (7) из уравнений Максвелла

$$\nabla \times \vec{H} + \frac{ik\hat{\varepsilon}}{\eta_0}\vec{E} = 0, \tag{10}$$

$$\nabla \times \vec{E} - ik\eta_0 \vec{H} = 0, \tag{11}$$

где $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(x, y, z)$ в оболочках элементов, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1$ в центральных частях последних и $\hat{\varepsilon} = 1$ вне элементов, приведены в [17].

Сшивание электрических полей (1) и (8), а также магнитных полей (2) и (9) (последнее должно быть векторно умножено на $\vec{e}_z$) при $z = h$ дает соотношения

$$R_{1q} = E_{1q}(h) - A_1\delta_{1q}, \tag{12}$$

$$R_{2q} = -H_{1q}(h) - A_2\delta_{1q}, \tag{13}$$

$$E_{2q}(h) = -H_{1q}(h)\Gamma_q/k - 2A_2\delta_{1q}\Gamma_q/k, \tag{14}$$

$$H_{2q}(h) = E_{1q}(h)\Gamma_q/k - 2A_1\delta_{1q}\Gamma_q/k, \tag{15}$$

где $\delta_{1q}$ — символ Кронекера. Аналогичное сшивание электрических полей (6) и (8), а также магнитных полей (7) и (9) при $z = 0$ дает еще четыре соотношения

$$T_{1q} = E_{1q}(0), \tag{16}$$

$$T_{2q} = -H_{1q}(0)/\varepsilon_s, \tag{17}$$

$$E_{2q}(0) = H_{1q}(0)\Gamma_{sq}/(k\varepsilon_s), \tag{18}$$

$$H_{2q}(0) = -E_{1q}(0)\Gamma_{sq}/k, \tag{19}$$

которые будут использоваться при выводе последующих выражений.

Проектирование уравнений Максвелла (10) и (11) для полей в области, содержащей сферические элементы, на поперечные функции $\vec{\psi}_{1p}^*(x, y)$ и $\vec{\psi}_{2p}^*(x, y)$, как это описано в [17] и более подробно в [18], сводит указанные уравнения к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных коэффициентов, стоящих в разложениях (8) и (9):

$$\Gamma_p^2 H_{1p} + w_p \sum_q w_q W_{pq} H_{1q} - ik\frac{dE_{2p}}{dz} = 0, \tag{20}$$

$$ik\frac{dH_{2p}}{dz} + \Gamma_p^2 E_{1p} + k^2 \sum_q (Z_{pq}E_{1q} - Y_{pq}E_{2q}) = 0, \tag{21}$$

$$-ik\frac{dH_{1p}}{dz} + k^2 \sum_q (Y_{pq}E_{1q} + Z_{pq}E_{2q}) + k^2 E_{2p} = 0, \tag{22}$$

$$H_{2p} = \frac{1}{ik}\frac{dE_{1p}}{dz}, \tag{23}$$

где

$$Z_{pq}(z) = \frac{\alpha_p\alpha_q + \beta_p\beta_q}{w_p w_q} X_{pq}(z), \tag{24}$$

$$Y_{pq}(z) = \frac{\alpha_p\beta_q - \alpha_q\beta_p}{w_p w_q} X_{pq}(z), \tag{25}$$

$$X_{pq}(z) = \int\limits_{S(z)} (\hat{\varepsilon} - 1)\psi_p^* \psi_q ds, \quad (26)$$

$$W_{pq}(z) = \int\limits_{S(z)} (1 - 1/\hat{\varepsilon})\psi_p^* \psi_q ds, \quad (27)$$

и $S(z)$ – площадь горизонтального сечения сферы. Учитывая осевую симметрию элемента структуры и проводя интегрирование по φ' в (26) и (27) в цилиндрической системе координат ρ' и φ', получим

$$X_{pq}(z) = \frac{2\pi}{d_x d_y} \int\limits_0^{\rho(z)} [\varepsilon(r') - 1] J_0(\Delta_{pq}\rho')\rho' d\rho', \quad (28)$$

$$W_{pq}(z) = \frac{2\pi}{d_x d_y} \int\limits_0^{\rho(z)} [1 - 1/\varepsilon(r')] J_0(\Delta_{pq}\rho')\rho' d\rho', \quad (29)$$

где

$$\rho(z) = [a^2 - (z-a)^2]^{1/2},$$
$$r' = [\rho'^2 + (z-a)^2]^{1/2},$$
$$\Delta_{pq} = [(\alpha_p - \alpha_q)^2 + (\beta_p - \beta_q)^2]^{1/2}$$

и $J_0(...)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Решение дифференциальных уравнений (20)–(23) ищем в виде разложений по треугольным функциям $f_n(z)$ [17], [18]

$$H_{1q}(z) = \sum_{n=1}^{N} H_{1nq} f_n(z), \quad (30)$$

$$E_{jq}(z) = \sum_{n=1}^{N} E_{jnq} f_n(z), \quad j = 1, 2, \quad (31)$$

с вершинами в $N$ узлах, расположенных равномерно на интервале $0 \le z \le h$, включая его концы. Подстановка (30) и (31) в дифференциальные уравнения (20)–(23) и проектирование последних на треугольные функции $f_m(z)$ в рамках метода конечных элементов, в процессе которого учитываются явное выражение (23), а также соотношения (14), (15), (18) и (19), сводит задачу к системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\frac{i\Gamma_{sp}}{k\varepsilon_s} H_{11p}\delta_{1m} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{q} \hat{W}_{pq}^{mn} H_{1nq} + \frac{i\Gamma_p}{k} H_{1Np}\delta_{Nm} + \\ + i\sum_{n=1}^{N} \bar{K}^{mn} E_{2np} = -\frac{2i\Gamma_p}{k} A_2 \delta_{0p}\delta_{Nm},\end{gathered} \quad (32)$$

$$\begin{gathered}\frac{i\Gamma_{sp}}{k} E_{11p}\delta_{1m} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{q} (\bar{Z}_{pq}^{mn} E_{1nq} - Y_{pq}^{mn} E_{2nq}) + \\ + \frac{i\Gamma_p}{k} E_{1Np}\delta_{Nm} = \frac{2i\Gamma_{1p}}{k} A_1 \delta_{0p}\delta_{Nm},\end{gathered} \quad (33)$$

$$\sum_{n=1}^{N} [-iK^{mn} H_{1np} + \sum_{q} (Y_{pq}^{mn} E_{1nq} + \hat{Z}_{pq}^{mn} E_{2nq})] = 0, \quad (34)$$

с матричными элементами

$$\hat{W}_{pq}^{mn} = \frac{\Gamma_p^2}{k^2} I^{mn}\delta_{pq} + \frac{w_p w_q}{k^2} W_{pq}^{mn}, \quad (35)$$

$$\bar{Z}_{pq}^{mn} = \left(\frac{\Gamma_p^2}{k^2} I^{mn} - \bar{I}^{mn}\right)\delta_{pq} + Z_{pq}^{mn}, \quad (36)$$

$$\hat{Z}_{pq}^{mn} = I^{mn}\delta_{pq} + Z_{pq}^{mn}, \quad (37)$$

$$K^{mn} = \int\limits_0^h f_m \frac{df_n}{dz} dz, \quad \bar{K}^{mn} = \int\limits_0^h \frac{df_m}{dz} f_n dz, \quad (38)$$

в которых

$$I^{mn} = k\int\limits_0^h f_m f_n dz, \quad \bar{I}^{mn} = \frac{1}{k}\int\limits_0^h \frac{df_m}{dz}\frac{df_n}{dz} dz, \quad (39)$$

$$W_{pq}^{mn} = k\int\limits_0^h W_{pq} f_m f_n dz. \quad (40)$$

Коэффициенты $Y_{pq}^{mn}$ и $Z_{pq}^{mn}$ вычисляются по формулам, аналогичным формуле (40), где коэффициент $W_{pq}$ следует заменить на (24) и (25) соответственно. Явные выражения для коэффициентов (38)–(40) имеются в [18].

Уравнения (32)–(34) образуют полную бесконечную алгебраическую систему, которую решаем методом усечения до размера $3PN$, где $P$ – число учитываемых пространственных гармоник для каждого из наборов $H_{1nq}$, $E_{1nq}$, и $E_{2nq}$, $n = 1, ..., N$. Так как каждая треугольная функция частично перекрывается только с ближайшими соседними функциями, то интегралы (35)–(40) равны нулю для $|m - n| > 1$, и поэтому матрица системы является блочно-ленточной. Пример указанной структуры имеется в [17]. Численное решение алгебраической системы позволяет затем рассчитать коэффициенты отражения волн в свободное пространство (12), (13) и коэффициенты прохождения волн в подложку, а также мощность, поглощенную элементами структуры.

## 2. СООТНОШЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Соотношение энергетического баланса (или баланса мощностей) используется как один из способов проверки корректности работы различных численных алгоритмов. Такое соотношение было приведено в [17] для случая отсутствия потерь в элементах структуры и подложке. Ниже представлено аналогичное соотношение, выведенное с учетом потерь в элементах и подложке, определяемых мнимой частью диэлектрической проницаемостью в них.

Соотношение энергетического баланса

$$P^r + P^t + P^a = P^i \tag{41}$$

включает отраженную мощность $P^r$, мощность $P^t$, прошедшую в подложку, и мощность $P^a$, поглощенную элементами структуры, сумма которых равна мощности $P^i$, падающей на структуру.

Падающая, отраженная и прошедшая мощности определяются общей формулой

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_{S_a}(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot\vec{n}\,dxdy, \tag{42}$$

где $\vec{n} = -\vec{e}_z$ для падающей и прошедшей мощностей, $\vec{n} = \vec{e}_z$ для отраженной мощности и $S_a$ – площадь ячейки периодической структуры, равная $d_x \times d_y$.

Подставляя первые слагаемые из (1) и (2) при $z = h$ в (42), получим

$$P^i = \frac{\eta_0}{2}(|A_1|^2 + |A_2|^2)k^2\cos\theta, \tag{43}$$

где учтено, что $\Gamma_{00} = \Gamma_1 = k\cos\theta$. Аналогичная подстановка вторых слагаемых из (1) и (2) в (42) дает

$$P^r = \frac{\eta_0 k}{2}\sum_q(|R_{1q}|^2 + |R_{2q}|^2)\,\mathrm{Re}\{\Gamma_q\}. \tag{44}$$

Выражение для мощности, прошедшей в подложку –

$$P^t = \frac{\eta_0 k}{2}\sum_q(|T_{1q}|^2\ \mathrm{Re}\{\Gamma^*_{sq}\} + |T_{2q}|^2\ \mathrm{Re}\{\varepsilon^*_s\Gamma_{sq}\}), \tag{45}$$

выводится в результате подстановки (6) и (7) в (42).

Мощность, поглощенная в элементах структуры, определяется формулой

$$P^a = \frac{1}{2}\int\limits_0^h dz\int\limits_{S(z)}\sigma|\vec{E}|^2\,dxdy, \tag{46}$$

где $\sigma = \omega\varepsilon_0\varepsilon'' = k\varepsilon''/\eta_0$ – проводимость элемента структуры, определяемая мнимой частью $\varepsilon''$ его диэлектрической проницаемости. Полное электрическое поле равно сумме его поперечной составляющей (8) и продольной составляющей [17, 18]

$$E_z = \frac{\eta_0}{\hat{\varepsilon}}\sum_q w_q H_{1q}(z)\psi_q, \tag{47}$$

полученной в результате подстановки (9) в уравнение Максвелла (10). В результате этого формулу (46) можно переписать в виде

$$P^a = P^a_t + P^a_z, \tag{48}$$

где

$$P^a_t = \frac{k}{2\eta_0}\int\limits_0^h dz\int\limits_{S(z)}\varepsilon''|\vec{E}_t|^2\,dxdy, \tag{49}$$

$$P^a_z = \frac{k}{2\eta_0}\int\limits_0^h dz\int\limits_{S(z)}\varepsilon''|\vec{E}_z|^2\,dxdy. \tag{50}$$

Подставляя (8) в (49) и учитывая, что $\varepsilon''(r') = \mathrm{Im}\{\varepsilon(r') - 1\}$, а также, что $\varepsilon(r') - 1$ умножается на действительную функцию в (28) и на действительное произведение треугольных функций в выражениях для $Y^{mn}_{pq}$ и $Z^{mn}_{pq}$, аналогичных выражению (40), получим

$$P^a_t = \frac{\eta_0 k^2}{2}\sum_{m,n=1}^N\sum_{p,q}[(E^*_{1mp}E_{1nq} + E^*_{2mp}E_{2nq})\times \\ \times\mathrm{Im}\{Z^{mn}_{pq}\} + (E^*_{2mp}E_{1nq} - E^*_{1mp}E_{2nq})\,\mathrm{Im}\{Y^{mn}_{pq}\}]. \tag{51}$$

Аналогично, подставляя (47) в (50) и учитывая, что

$$\frac{\varepsilon''}{|\hat{\varepsilon}|^2} = -\mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{\varepsilon}^*}{|\hat{\varepsilon}|^2}\right\} = -\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\hat{\varepsilon}}\right\} = \mathrm{Im}\left\{1 - \frac{1}{\hat{\varepsilon}}\right\}, \tag{52}$$

а также что $1 - 1/\varepsilon(r')$ умножается на действительную функцию в (29) и на действительное произведение треугольных функций в (40), получим

$$P^a_z = \frac{\eta_0}{2}\sum_{m,n=1}^N\sum_{p,q}w_p w_q H^*_{1mp}H_{1nq}\,\mathrm{Im}\{W^{mn}_{pq}\}. \tag{53}$$

Таким образом, видим, что мощность, поглощаемая в элементах структуры, определяется через мнимые части матричных элементов системы уравнений (32)–(34).

## 3. МОДИФИКАЦИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ СТРУКТУРЫ НА ЭКРАНЕ

Если элементы структуры расположены не на диэлектрической подложке, а на идеально проводящем экране в плоскости $z = 0$, то алгоритм, описанный выше, может быть модифицирован следующим образом. Наличие экрана исключает поля (6) и (7) из рассмотрения. Граничные условия (16)–(19) заменяются условиями $E_{1q}(0) = E_{2q}(0) = 0$, что исключает первые члены из разложений (31). В этом случае система уравнений (32)–(34) модифицируется следующим образом:

$$\frac{i\Gamma_{sp}}{k\varepsilon_s}H_{11p}\delta_{1m} + \sum_{n=1}^N\sum_q\hat{W}^{mn}_{pq}H_{1nq} + \frac{i\Gamma_p}{k}H_{1Np}\delta_{Nm} + \\ + i\sum_{n=2}^N\bar{K}^{mn}E_{2np} = -\frac{2i\Gamma_p}{k}A_2\delta_{0p}\delta_{Nm}, \tag{54}$$

$$\sum_{n=2}^{N}\sum_{q}(\bar{Z}_{pq}^{mn}E_{1nq}-Y_{pq}^{mn}E_{2nq})+ \\ +\frac{i\Gamma_p}{k}E_{1Np}\delta_{Nm}=\frac{2i\Gamma_{1p}}{k}A_1\delta_{0p}\delta_{Nm}, \quad (55)$$

$$-i\sum_{n=1}^{N}K^{mn}H_{1np}+\sum_{n=2}^{N}\sum_{q}(Y_{pq}^{mn}E_{1nq}+\hat{Z}_{pq}^{mn}E_{2nq})=0, \quad (56)$$

т.е. суммирование по $n$, содержащее коэффициенты разложения электрических полей $E_{1nq}$ и $E_{2nq}$ по треугольным функциям, начинается с $n = 2$.

Наконец, мощность $P^t$, прошедшая в подложку в соотношении (41), исключается из указанного соотношения.

## 4. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Базовый алгоритм и его модификация, описанные выше, были реализованы в компьютерных программах на языке МАТЛАБ с учетом профиля диэлектрической проницаемости во внешнем слое сферической электромагнитной черной дыры

$$\varepsilon(r)=(1+i\beta)\frac{a^2}{r^2}-i\beta, \quad (57)$$

предложенного в [7] и затем использованного в [9] и [15], где $r$ – расстояние от центра сферического элемента (см. разд. 1), $\beta$ – параметр, определяющий скорость возрастания мнимой части проницаемости слоя от нуля на внешней границе в направлении к центральной области. Постоянная диэлектрическая проницаемость последней определяется как $\varepsilon_1=\varepsilon(a_1)$. Таким образом, профиль диэлектрической проницаемости элемента соответствует полному согласованию между внешней поверхностью элемента и свободным пространством при $r = a$, а также между внешним слоем и внутренней областью элемента при $r = a_1$.

Функция (28) вычисляется с использованием кусочно-постоянной аппроксимации диэлектрической проницаемости в области интегрирования, что приводит к формуле

$$X_{pq}(z)=\frac{2\pi}{d_xd_y}\left\{\frac{\rho_0J_1(\Delta_{pq}\rho_0)}{\Delta_{pq}}(\varepsilon_1-1)+\right. \\ \left.+\sum_{l=1}^{L(z)}\left[\frac{\rho_lJ_1(\Delta_{pq}\rho_l)}{\Delta_{pq}}-\frac{\rho_{l-1}J_1(\Delta_{pq}\rho_{l-1})}{\Delta_{pq}}\right](\bar{\varepsilon}_l-1)\right\}, \quad (58)$$

где $\rho_0=[a_1^2-(a-z)^2]^{1/2}$ при $|a-z|<a_1$ и $\rho_0=0$ при $|a-z|\geq a_1$, $\rho_l=\rho_0+[\rho(z)-\rho_0]l/L(z)$; $L(z)$ – число отрезков разбиения области интегрирования, обеспечивающее заданную точность интегрирования, и $\bar{\varepsilon}_l$ – значение диэлектрической проницаемости в середине $l$-го отрезка интегрирования. Функция (29) вычисляется аналогичным способом.

Эффективность гибридного проекционного метода при анализе двумерно-периодических структур исследовалась в [17], путем проверки сходимости результатов и их сравнения с данными, имеющимися в литературе для некоторых частных случаев. Здесь также была исследована сходимость результатов для случая сферических элементов и проверена точность выполнения соотношения энергетического баланса (41) и его модификации для случая структуры, расположенной на экране. Во всех расчетах погрешность выполнения указанных соотношений, нормированных на $\eta_0k^2/2$ при единичных амплитудах $A_1$ и $A_2$ падающих волн, не превышала $10^{-12}$.

Параметры $a_1/a$ и $\beta$ подбирали в процессе численных исследований так, чтобы обеспечить наиболее высокую эффективность поглощения структуры, определяемую отношением мощности, поглощенной элементами структуры, к мощности, падающей на структуру. Расчеты показали, что наилучшие результаты достигаются при значениях $a_1/a$, лежащих в интервале от 0.3 до 0.5, а оптимальные значения для $\beta$ в разных случаях превышают 2. Кроме того, наилучшие результаты достигаются при плотном расположении черных дыр в сетке, т.е. при $a = d_x/2$.

Нормированные поглощенная, отраженная и прошедшая мощности, соответствующие черным дырам с параметрами $a = d_x/2$, $a_1/a = 0.5$ и $\beta = 2.5$, расположенным в гексагональной сетке в свободном пространстве (при $\varepsilon_s = \mu_s = 1$) и возбуждаемым при нормальном падении ($\theta = 0$), показаны на рис. 2 в зависимости от периода $d_x$. Как мы видим, эффективность поглощения $P^a/P^i$ не достигает единицы (или 100%) при увеличении $d_x$. Этот эффект объясняется наличием зазоров между сферическими элементами, через которые просачивается падающая волна, не проходя через поглощающую среду.

Аналогичные результаты для таких же черных дыр, но расположенных в квадратной сетке, приведены на рис. 3. Здесь эффективность поглощения еще ниже, а прошедшая мощность соответственно возрастает, так как площадь зазоров между сферическими элементами оказывается больше, чем в случае гексагональной сетки.

Результаты, полученные для эффективности поглощения рассматриваемых структур при наклонном падении *TE*- и *TM*-волн под углом $\theta = 30°$, приведены на рис. 4 для гексагональной сетки и плоскости падения $\varphi = 90°$, а также на рис. 5 для квадратной сетки и плоскости падения $\varphi = 45°$. Отметим, что в отличие от случая нормального падения характеристики структуры при наклонном падении *TE*- и *TM*-волн отличаются друг от друга.

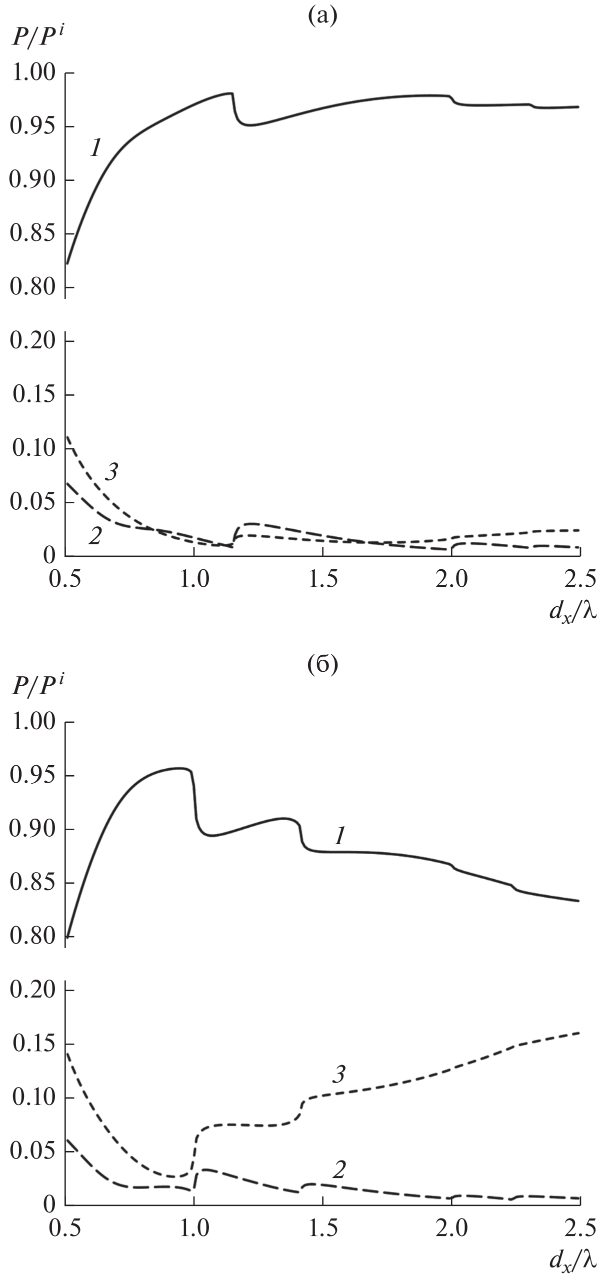


**Рис. 2.** Эффективность поглощения (*1*), а также нормированные отраженная (*2*) и прошедшая (*3*) мощности для структуры черных дыр с гексагональной (а) и с квадратной (б) сеткой в зависимости от периода $d_x$ при $a = d_x/2$, $a_1/a = 0.5$, $\beta = 2.5$ $\varepsilon_s = 1$ и $\theta = 0$.

Как мы видим, эффективность поглощения в этих случаях выше, чем при нормальном падении. Этот эффект объясняется тем, что проекции поперечных сечений сферических элементов на плоскости перпендикулярные направлению падения становятся перекрывающимися, что уменьшает просветы в поглощающей среде, через которые просачиваются падающие волны.

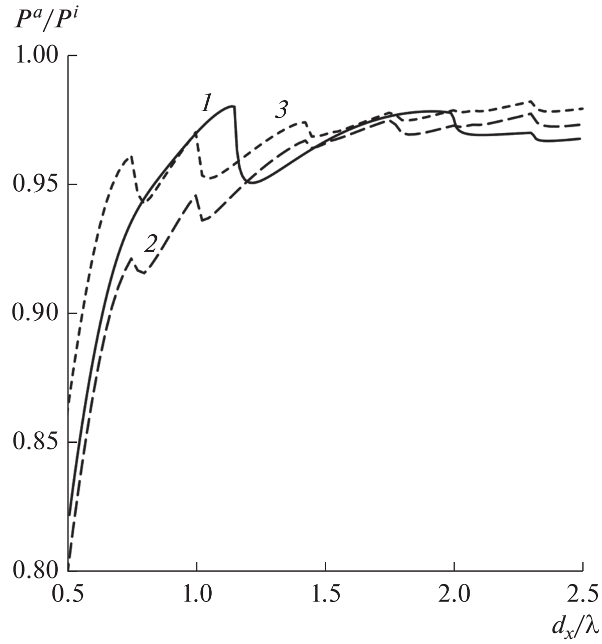


**Рис. 3.** Эффективность поглощения для структуры черных дыр с гексагональной сеткой, облучаемой *TE*- и *TM*-волнами под углом $\theta = 0$ (*1*) и *TE*- (*2*) и *TM*-волнами (*3*) под углом $\theta = 30°$ в плоскости $\varphi = 90°$, в зависимости от периода $d_x$ при $a = d_x/2$, $a_1/a = 0.5$, $\beta = 2.5$ и $\varepsilon_s = 1$.

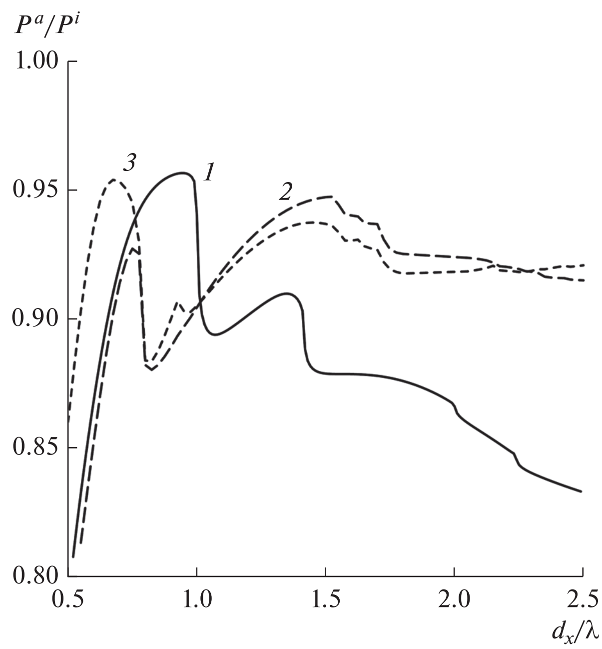


**Рис. 4.** Эффективность поглощения для структуры черных дыр с квадратной сеткой, облучаемой *TE*- и *TM*-волнами под углом $\theta = 0$ (*1*) и *TE*- (*2*) и *TM*-волнами (*3*) под углом $\theta = 30°$ в плоскости $\varphi = 45°$, в зависимости от периода $d_x$ при $a = d_x/2$, $a_1/a = 0.5$, $\beta = 2.5$ и $\varepsilon_s = 1$.

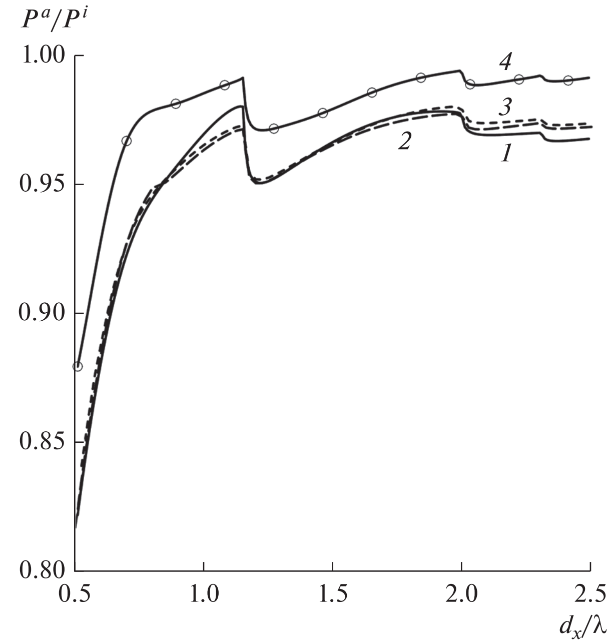


**Рис. 5.** Влияние диэлектрической проницаемости подложки и экрана на эффективность поглощения структуры с гексагональной сеткой при $a = d_x/2$, $a_1/a = 0.5$ и $\beta = 2.5$; $\varepsilon_s = 1$ (*1*), 2 (*2*), 4 (*3*), структура на экране (кривая *4*).

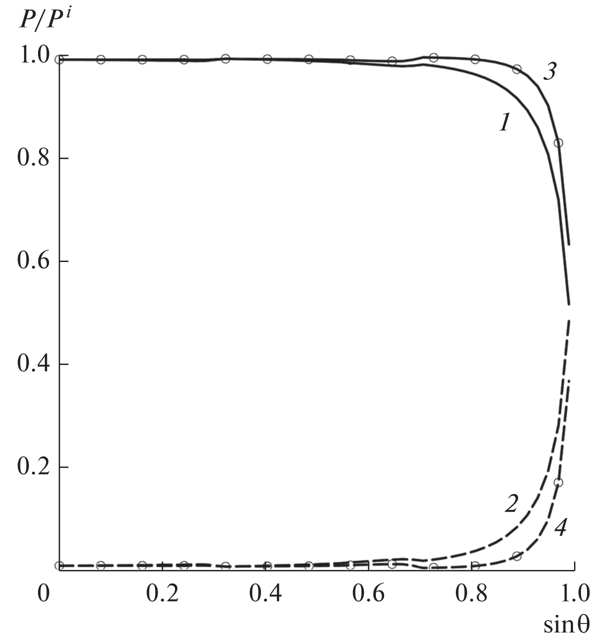


**Рис. 6.** Эффективность поглощения $P^a$ ($TE$ (*1*) и $TM$ (*2*)) и нормированная отраженная мощность $P^r$ ($TE$ (*3*) и $TM$ (*4*)) для гексагональной структуры черных дыр в зависимости от угла падения $\theta$ в плоскости $\varphi = 0°$ при $a_1/a = 0.5$ и $\beta = 2.5$.

Результаты, приведенные на рис. 6, показывают влияние диэлектрической проницаемости подложки $\varepsilon_s$ и идеально проводящего экрана на эффективность поглощения структуры с гексагональной сеткой. Волна, ослабленная в результате прохождения через поглощающие элементы структуры, доходит до границы подложки, от которой она частично отражается. Указанная отраженная волна вновь проходит через поглощающие элементы, что вносит дополнительный вклад в поглощаемую мощность. Ясно, что чем больше мощности отражается от границы подложки, тем больше оказывается добавка в поглощенную мощность, что видно из сравнения эффективности поглощения для подложки с $\varepsilon_s = 2$ и с $\varepsilon_s = 4$. Так как коэффициент отражения во втором случае выше, чем в первом, мы видим более высокую эффективность поглощения для указанного второго случая. В случае структуры, расположенной на идеально проводящем экране, от которого наблюдается полное отражение волны, дошедшей до него, добавка к поглощенной мощности будет максимальной, что и демонстрируется более высокими кривыми эффективности поглощения. Аналогичные эффекты имеют место и в случае структуры, расположенной в квадратной сетке. Однако согласно рис. 3 и 5 эффективность поглощения в этом случае ниже, чем для случая гексагональной сетки, т.е. он представляется менее интересным, и поэтому соответствующие результаты не приводятся.

Поведение эффективности поглощения и нормированной отраженной мощности в зависимости от угла падения $TE$- и $TM$-волн в плоскости $\varphi = 0°$ показано на рис. 7 для случая гексагональной сетки с периодом $d_x = 1.6\lambda$. Как видим, высокая эффективность поглощения обеспечивается в широком секторе углов падения для обоих случаев поляризации. Согласно другим результатам, не приведенным здесь, аналогичное поведение можно наблюдать в плоскости падения $\varphi = 90°$ и в промежуточных плоскостях.

Наконец, рассматривая возможность применять структуры с черными дырами, расположенными в гексагональной сетке, в качестве покрытий стенок в безэховых камерах СВЧ-диапазона, представляет интерес сравнить их характеристики поглощения с аналогичными характеристиками обычных структур с пирамидальными поглощающими элементами, расположенными в квадратной сетке на экране. Подобный элемент состоит из пьедестала квадратного поперечного сечения с длиной стороны квадрата $d$ и высотой $h_0$, а также пирамидальной частью высотой $h_1$. Указанный параметр $d$ равен периоду квадратной сетки, в которой расположены пирамидальные элементы. Типичные пропорции между указанными параметрами можно определить формулами $h_0 = 0.65d$ и $h_1 = 2.5d$. Будем считать, что диэлектрическая

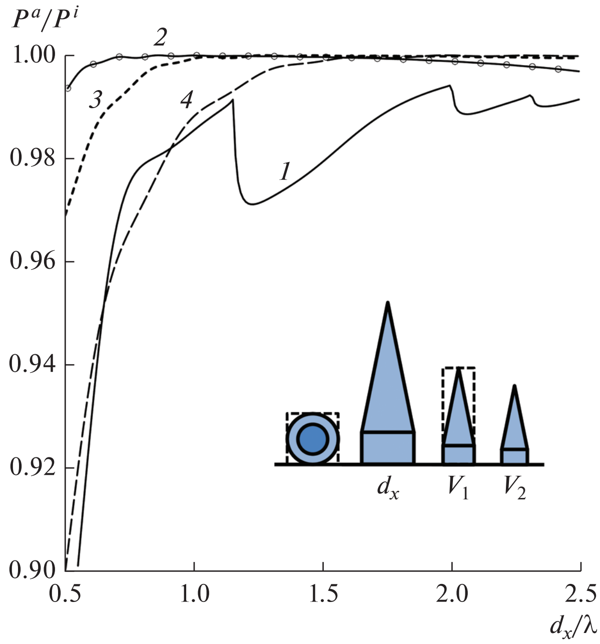


**Рис. 7.** Эффективность поглощения в зависимости от периода сетки при $\theta = 0°$ для черных дыр в гексагональной сетке и пирамидальных поглотителей в квадратной сетке: *1* – черные дыры, *2* – пирамиды с тем же периодом $d_x$, *3* – пирамиды с тем же объемом ячейки $V_1$, *4* – пирамиды того же объема $V_2$, расположенные на экране.

проницаемость такого элемента равна $\varepsilon = 1.5 + 0.7i$ как [19].

Рассмотрим три подхода к сравнению характеристик поглощения. Первый соответствует одинаковым периодам сетки $d_x$, второй – одинаковым объемам $V_1$, приходящимся на элемент структуры, и третий – одинаковым объемам самих элементам $V_2$. На вставке рис. 7 приведены относительные размеры элементов, а также зависимости эффективности поглощения от периода $d_x$ для случая нормального падения. Как видим, эффективность поглощения структуры с черными дырами оказывается несколько ниже эффективности структур с пирамидальными элементами. Но поскольку эффективность поглощения для черных дыр оказывается все-таки достаточно высокой (прядка 98%), а толщина поглощающего покрытия меньше, чем для пирамидальных элементов, что является преимуществом, то структуры с черными дырами представляются перспективными для дальнейшего исследования и усовершенствования. Последнее может быть проведено путем расположения черных дыр на сравнительно тонком поглощающем слое, который может быть как сплошным, так и с выемками, для помещения сферических элементов в них.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрена трехмерная векторная задача рассеяния плоских *TE*- и *TM*-волн на двумерно-периодической поглощающей структуре, образованной сферическими электромагнитными черными дырами, расположенными на полубесконечной диэлектрической подложке. Приведен алгоритм решения, основанный на гибридном проекционном методе, в котором учтена специфика сферических поглощающих элементов. Алгоритм обобщен на случай расположения черных дыр на идеально проводящем экране, а также включает вывод новых выражений для расчета мощности, поглощаемой черными дырами, что представляется важным как с точки зрения исследования эффективности поглощения, так и для проверки необходимого условия выполнения соотношения энергетического баланса.

Разработанные алгоритмы были реализованы в соответствующих программах в среде МАТЛАБ. Численные исследования, проведенные с использованием последних, показали, что наиболее высокая эффективность поглощения (порядка 98%) достигается в широком диапазоне значений периода структуры и в широком секторе углов падения в структурах с черными дырами, расположенными в гексагональной сетке на экране.

Сравнение характеристик исследованных структур с широко применяемыми поглощающими структурами с пирамидальными элементами показали, что эффективность структур со сферическими элементами, между которыми имеются неизбежные воздушные зазоры, оказывается ниже, чем у традиционных структур. Однако различие является несущественным, а толщина поглощающего слоя, содержащего сферические элементы, оказывается существенно меньше, чем в традиционных структурах, что является преимуществом применения сферических элементов и делает перспективными их дальнейшие исследования и усовершенствование поглощающих структур.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Narimanov E.E., Kildishev A.V.* // Appl. Phys. Lett. 2009. V. 95. № 4. P. 041106.
2. *Cheng Q., Cui T.J., Jiang W.X., Cai B.G.* // New J. Phys. 2010. V. 12. № 6. P. 063006.
3. *Kildishev A.V., Prokopeva L.J., Narimanov E.E.* // Opt. Express. 2010. V. 18. P. 16646.
4. *Lu W., Jin J.-F., Lin Z., Chen H.* // J. Appl. Phys. 2010. V. 108. № 6. P. 064517.
5. *Li S., Li L., Lin Z. et al.* // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. № 5. P. 054204.
6. *Wang H.-W., Chen L.-W.* // J. Appl. Phys. 2011. V. 109. P. 103104.

7. *Чижевская Я.И., Смольникова О.Н., Скобелев С.П.* // Радиотехника. 2018. № 4. С. 23. (www.radiotec.ru).
8. *Chizhevskaya Ya.I., Skobelev S.P.* // Proc. 13th Europ. Conf. on Antennas and Propagation (EuCAP'2019), Krakow. 31 Mar.—5 Apr. N.Y.: IEEE, 2019. Article № 18775713.
9. *Чижевская Я.И., Скобелев С.П.* // Оптика и спектроскопия. 2019. Т. 127. № 6. С. 991.
10. *Maslovski S.I., Simovski C.R., Tretyakov S.A.* // New J. Phys. 2016. V. 18. № 1. P. 013034.
11. *Chizhevskaya Ya.I.* // Int. Conf. Engineering & Telecommunication (En&T), Dolgoprudny, Russia, 25—26 Nov. 2020. https://doi.org/10.1109/EnT50437/2020. 9431299
12. *Чижевская Я.И., Скобелев С.П.* // Радиотехника. 2020. № 4. С. 40. https://doi.org/10.18127/j00338486-202004(7)-05
13. *Chizhevskaya Ya.I., Smolnikova O.N., Skobelev S.P.* // Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW 2019), Divnomorskoye, Russia, 24—28 June 2019. P. 220.
14. *Chizhevskaya Ya.I., Skobelev S.P., Smolnikova O.N.* // Proc. 14th Europ. Conf. on Antennas and Propagation (EuCAP 2020), Copenhagen. 15—20 Mar. N.Y.: IEEE, 2020. P. 9135699. https://doi.org/10.23919/EuCAP48036.2020.9135699
15. *Чижевская Я.И., Смольникова О.Н., Скобелев С.П.* // ЖТФ. 2021. Т. 91. № 2. С. 326.
16. *Chizhevskaya Ya.I., Skobelev S.P.* // Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW), Divnomorskoye. 28 Jun.—2 Jul. 2021. N.Y.: IEEE, 2021. P. 51. https://doi.org/10.1109/RSEMW52378.2021.9494093
17. *Skobelev S.P., Smolnikova O.N.* // IEEE Trans. 2013. V. AP-61. № 10. P. 5078.
18. *Скобелев С.П.* Фазированные антенные решетки с секторными парциальными диаграммами направленности. М.: Физматлит, 2010.
19. *Скобелев С.П., Смольникова О.Н.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 10. С. 1066.