

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 623.612

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ БИТОВЫХ ОШИБОК ПРИЕМА РАДИОСИГНАЛОВ С QPSK-МОДУЛЯЦИЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ С ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

© 2023 г. В. В. Звонарев^а, *, А. С. Попов^а

^а Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,
ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198 Российская Федерация

*E-mail: vka@mil.ru

Поступила в редакцию 21.03.2022 г.

После доработки 22.05.2022 г.

Принята к публикации 27.04.2023 г.

На основе разработанной методики анализа помехозащищенности приема радиосигналов с квадратурной фазовой манипуляцией выполнен расчет вероятностей битовой ошибки при наличии помехи с линейной частотной модуляцией и проведено сравнение с влиянием гармонической помехи. Представлена методика без расчета вероятности правильного приема, использующая условные переходные вероятности между позициями сигнального созвездия, не имеющая ограничений в уровнях сигнала и помехи.

DOI: 10.31857/S0033849423110098, EDN: UILOWV

ВВЕДЕНИЕ

Параметр помехозащищенности является одним из основных при выборе и использовании радиосигналов для передачи информации любого назначения. С ростом объемов циркулирующей в коммутационных сетях информации возрастает потребность в спектрально эффективных сигналах с многопозиционной фазовой модуляцией (ФМ) и квадратурной амплитудной модуляцией (КАМ). С точки зрения помехоустойчивости большой интерес вызывают, в частности, биортогональные сигналы с квадратурной фазовой манипуляцией (QPSK). Радиосигналы с QPSK-модуляцией при одинаковой информационной скорости и в два раза меньшей шириной полосы частот имеют такую же вероятность битовой ошибки, что и сигналы с двоичной фазовой манипуляцией (BPSK), которые считаются наиболее устойчивыми к шумовым помехам. При проектировании и оценке качества работы радиолинии важно уметь определять параметры помехоустойчивости расчетным путем не только в присутствии шума, но и при наличии структурных помех. К наиболее известным видам относятся, например, помехи гармонические, сканирующие по частоте и помехи с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ), подобные сигналу, одиночные и в различных сочетаниях.

Если гармонические помехи имеют простые и однозначные математические модели, то сканирующие по частоте помехи разнообразны как по при-

менению, так и по математическим моделям. Они существенно различаются и терминологически.

Сканирование по диапазону частот может осуществляться как одной помехой [1–5], так и синхронно несколькими помехами одновременно [6]. Периодически такая помеха попадает в полосы частот каналов в этом диапазоне. Размах, мощность и периоды сканирования могут быть различными.

Известны направления применения помех со сканированием по частоте при активации импровизированных взрывных устройств [3–7]. В работах [8, 9] предложен алгоритм режекции сканирующей по частоте помехи в системе с широкополосной модуляцией с прямым расширением спектра.

Широкое применение имеют сигналы и помехи с ЛЧМ. Зондирующие сигналы с ЛЧМ используют в радиолокации для расширения полосы частот и повышения точности определения дальности до цели [10, 11]. Находят применение сигналы с ЛЧМ и в акустической связи [12, 13]. Вместе с тем ЛЧМ-сигналы применяются при мультиплексировании с ортогональным частотным разделением каналов для повышения степени разделения сигналов на поднесущих частотах с целью повышения их помехозащищенности [14–17], а также при передаче цифровых сигналов с многопозиционной модуляцией [18].

Оценка и сравнение по помехозащищенности сигналов с многопозиционной модуляцией производятся по сопоставлению величин вероятно-

стей битовых ошибок как функции от отношения сигнал/шум, отнесенного к одному биту.

Цель статьи — расчет вероятностей битовых ошибок приема сигналов с QPSK-модуляцией при наличии помехи с ЛЧМ на основе математически корректной методики. Основой методологического подхода и разработанной методики является диагонализация ковариационной матрицы вектора откликов корреляторов схемы приемника Котельникова и сведение четырехкратного интеграла переходной вероятности к двукратному [19].

Следует отметить, что в данной статье вероятности битовых ошибок будем определять не из вероятностей правильного приема символов [19, 20], а непосредственно из переходных вероятностей ошибочного приема символов. Преимущество данного подхода отмечено в работе [21].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ БИТОВЫХ ОШИБОК ПРИЕМА РАДИОСИГНАЛОВ С QPSK-МОДУЛЯЦИЕЙ

Методика определения переходных вероятностей из позиции созвездия переданного сигнала в позицию принятого опирается на построение вероятностного пространства на множестве совместных событий и представлена в работе [22]. Этот подход отличается от изложенного в работах [23, 24] простотой, наглядностью, и, главное, тем, что применим к случаю наличия структурных помех. Рассмотрим необходимые элементы предлагаемой методики.

Обозначим позиции символов в созвездии сигналов с QPSK-модуляцией порядковыми числительными 1, 2, 3, 4. Тогда вероятности перехода передаваемых символов в принятые обозначим как $P(m/n)$ ($m, n = 1, 2, 3, 4$), где n — номер позиции передаваемого символа, а m — номер позиции принятого символа. При расчете вероятностей битовых ошибок будем учитывать привязку каждой пары значений битовых символов из нулей и единиц номеру позиции сигнального символа в созвездии. Это будет определяться использованием или неиспользованием кодирования по Грея. Для расчета переходных (условных) вероятностей для сигнальных символов фиксированность расположения значений битов в символе не требуется. При первичном выводе формул для вероятностей битовых ошибок вначале требуются только значения битов в символе без привязки к номеру позиции в созвездии символов.

Введем обозначения “0₁”, “1₁”, “0₂”, “1₂” — знаки нулей и единиц в первом и во втором битах в символе, например, (0₁1₂, 1₁0₂). Покажем вывод формул только для первого бита. Тогда события, заключающиеся в ошибке приема 0 и 1 в первом бите есть объединения следующих событий:

$$\begin{aligned} &(\text{Ошибка приема } 0_1) = \\ &= (10, 00) \cup (11, 00) \cup (10, 01) \cup (11, 01); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\text{Ошибка приема } 1_1) = \\ &= (00, 10) \cup (00, 11) \cup (01, 10) \cup (01, 11). \end{aligned}$$

Если все передаваемые символы априорно равновероятны и независимы, то можно написать [22]:

$$P_{\text{ош}}(0_1) = [P(10/00) + P(11/00) + P(10/01) + P(11/01)]/4;$$

$$P_{\text{ош}}(1_1) = [P(00/10) + P(00/11) + P(01/10) + P(01/11)]/4.$$

С использованием кодирования по Грея выражения можно переписать через условные вероятности в виде

$$P_{\text{ош}}(0_1) = [P(4/1) + P(3/1) + P(4/2) + P(3/2)]/4; \quad (1)$$

$$P_{\text{ош}}(1_1) = [P(1/4) + P(1/3) + P(2/4) + P(2/3)]/4. \quad (2)$$

Вероятность ошибок первого бита равна

$$P_{\text{ош}}(1\text{-й бит}) = P_{\text{ош}}(0_1) + P_{\text{ош}}(1_1). \quad (3)$$

Таким образом, остается рассчитать переходные вероятности и привязать пары битовых знаков к номерам позиций символов в созвездии. Эта привязка, в свою очередь, определяется тем, что применяется или не применяется кодирование по Грея. Первый вариант более предпочтителен и чаще применяется. В этом случае привязка в созвездии, как известно, осуществляется следующим образом: 1-я позиция — “00”; 2-я — “01”; 3-я — “11”; 4-я — “10”.

Определим математические модели сигнала $s_i(t)$ и помехи $s_p(t)$ на l -м тактовом интервале длительности T в следующем виде:

$$s_i(t) = A_c \cos(\omega_0 t + \varphi_i), \quad \varphi_i = (i-1)\frac{\pi}{2},$$

$$t \in [(l-1)T, lT], \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$s_n(t) = A_n \cos\left[\omega_0 t + \Delta\omega_n t - a \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n\right],$$

где A_c — амплитуда сигнала: $A_c = \sqrt{2P_c}$; A_n — амплитуда помехи: $A_n = \sqrt{2P_n}$; P_c — мощность сигнала;

ла; P_n — мощность помехи; ω_0 — частота несущего колебания сигнала; $\Delta\omega_n$ — сдвиг частоты помехи относительно ω_0 ; φ_n — фазовый сдвиг помехи; a — коэффициент, принимающий значения 0 или 1.

Модель помехи представляет собой агрегат объединения гармонической помехи и помехи с ЛЧМ. Это обобщение является естественным, поскольку случайная составляющая канального отклика корреляционного демодулятора, как оказывается, не зависит от структуры помехи. Это, в частности, определяется прямым расчетом, как будет видно из дальнейших выкладок. Если $a = 0$, то помеха гармоническая со сдвигом частоты, если $\Delta\omega_n = 0$ и $a = 0$, то помеха гармоническая, когерентная с сигналом, если $a = 1$, то помеха с ЛЧМ.

На вход корреляционного демодулятора поступает аддитивная смесь сигнала, помехи и шума:

$$u^j(t) = s_j(t) + s_n(t) + n(t),$$

где j — номер позиции переданного информационного символа, $n(t)$ — шумовая помеха, моделируемая белым гауссовым шумом (БГШ) с корреляционной функцией:

$$\langle n(t)n(t') \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t-t'),$$

где N_0 — односторонняя спектральная плотность БГШ; $\delta(t-t')$ — дельта-функция Дирака.

Требуется сделать следующее.

1. Найти математические выражения для определения средних вероятностей битовых ошибок когерентного приема радиосигнала QPSK в присутствии помехи.

2. Построить кривые средних вероятностей битовых ошибок от отношения сигнал/шум при заданных значениях девиации частоты ЛЧМ помехи.

3. Провести сравнение помехозащищенности сигнала при наличии гармонической помехи или помехи с ЛЧМ.

2. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БИТОВЫХ ОШИБОК ДЛЯ РАДИОСИГНАЛОВ С QPSK-МОДУЛЯЦИЕЙ

Для расчета вероятностей битовых ошибок выпишем значение напряжения на выходе i -го коррелятора при приеме j -й позиции сигнала ξ_i^j в момент отсчета T :

$$\begin{aligned} \xi_i^j &= \frac{1}{N_0} \int_0^T [s_j + s_n + n(t)] s_i dt = \\ &= \frac{1}{N_0} \int_0^T s_j s_i dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T s_n s_i dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T n(t) s_i dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где $i, j \in (1, 2, 3, 4)$.

Случайную составляющую в (4) обозначим символом

$$\zeta_i = \frac{1}{N_0} \int_0^T n(t) s_i dt.$$

Выбор принятого символа сигнала осуществляется по максимальному значению ξ_i^j с выходов корреляторов по известному правилу:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j &= \max_i \xi_i^j, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{или} \\ \xi_j^j &> \xi_i^j, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Оператор $\max_i$ означает выбор номера (позиции сигнала в созвездии) того коррелятора, отклик которого максимален.

Вектор напряжений на выходах корреляторов ξ^j и вектор случайных составляющих ζ можно представить в виде соответственно:

$$\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j, \xi_4^j)^T, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)^T,$$

где T — знак транспонирования.

Для расчета плотности вероятности (ПВ) вектора ξ^j определим его математическое ожидание по формуле [19]:

$$\langle \xi^j \rangle = \xi^j - \zeta = \frac{1}{N_0} \int_0^T s_j s dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T s_n(t) s dt,$$

где s — вектор копий принимаемых радиосигналов информационных позиций: $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)^T$.

Тогда можно написать:

$$\xi^j = \langle \xi^j \rangle + \zeta.$$

Плотность вероятности вектора ξ^j будет иметь вид [19, 24]

$$\begin{aligned} w_4(\xi^j) &= \frac{1}{(2\pi)^{-2} |K_{\xi^j}|} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} (\xi^j - \langle \xi^j \rangle)^T K_{\xi^j}^{-1} (\xi^j - \langle \xi^j \rangle) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $K_{\xi^j} = (\xi^j - \langle \xi^j \rangle)(\xi^j - \langle \xi^j \rangle)^T = \langle \zeta \zeta^T \rangle = K_\zeta$ — ковариационная матрица вектора ξ^j .

Переходные (условные) вероятности определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P(i/j) &= P\{\xi_i^j > \xi_m^j; m \neq i; m, j, i = 1, 2, 3, 4\} = \\ &= P(\hat{x}_i/x_j). \end{aligned}$$

По общей исходной формуле получаем

$$P(i/j) = \int_0^{\xi_i} d\xi_1 \dots \int_{-\infty}^{\xi_i} d\xi_{i-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_i \int_{-\infty}^{\xi_i} d\xi_{i+1} \dots \times \\ \times \int_{-\infty}^{\xi_i} \omega_{\xi_j}(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m/s_j) d\xi_m, \quad (6)$$

где x_j — переданный информационный символ; $\hat{x}_i$ — принятый информационный символ; s_j — переданный радиосигнал-символ, несущий информационный символ x_j .

Вследствие биортогональности сигнала с QPSK-модуляцией определитель ковариационной матрицы равен нулю ($\det \mathbf{K}_\xi = |\mathbf{K}_\xi| = 0$), а ее ранг равен двум, поэтому интеграл вида (6) не вычисляется.

Для определения переходных (условных) вероятностей ошибки приема символов из системы координат вектора ξ^j необходимо перейти в новую систему координат η , где ковариационная матрица вектора ξ^j приобретает диагональный вид.

Матрица $\mathbf{K}_\xi$ здесь имеет вид [19]

$$\mathbf{K}_\xi = \frac{h_c^2}{2} \mathbf{A},$$

где h_c^2 — отношение сигнал/шум: $h_c^2 = E_{\text{симв}}/N_0$; $E_{\text{симв}} = P_c T$ — энергия символа на длительности информационного символа; $E_b = 0.5 E_{\text{симв}}$ — энергия бита.

Матрица $\mathbf{A}$, определяемая по методике, представленной в [19], будет иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где ранг матрицы равен 2.

Ковариационная матрица $\mathbf{K}_\eta$ в новой системе координат η будет иметь диагональный вид

$$\mathbf{K}_\eta = h_c^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица преобразований $\mathbf{V}$ системы координат ξ , составленная из ортонормированных собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$, в новой системе координат η будет иметь вид [19]

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для примера расчета условных вероятностей приема информационных символов рассмотрим вектор $\langle \xi^j \rangle$ для первой позиции передаваемого сигнала $j = 1$, где $s_1(t) = A_c \cos \omega_0 t$. Непосредственными вычислениями по формуле (4) получим вектор математических ожиданий вектора ξ^1 :

$$\langle \xi^1 \rangle = \begin{bmatrix} h_c^2 + h_c h_n \frac{1}{T} \int_0^T \cos \left(\Delta \omega_n t - \frac{2 \Delta \omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) dt \\ - h_c h_n \frac{1}{T} \int_0^T \sin \left(\Delta \omega_n t - \frac{2 \Delta \omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) dt \\ - \left[h_c^2 + h_c h_n \frac{1}{T} \int_0^T \cos \left(\Delta \omega_n t - \frac{2 \Delta \omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) dt \right] \\ h_c h_n \frac{1}{T} \int_0^T \sin \left(\Delta \omega_n t - \frac{2 \Delta \omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) dt \end{bmatrix},$$

где h_n^2 — отношение помеха/шум на длительности символа: $h_n^2 = E_n/N_0$; E_n — энергия помехи на длительности информационного символа:

$$E_n = P_n T.$$

Используя матрицу преобразования $\mathbf{V}$ (7), получаем вектор математических ожиданий в новой системе координат $\langle \boldsymbol{\eta}^1 \rangle$:

$$\langle \boldsymbol{\eta}^1 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}h_c h_n \frac{1}{T} \int_0^T \cos \left(\Delta\omega_n t - \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) dt \\ \sqrt{2} \left[h_c^2 + h_c h_n \frac{1}{T} \int_0^T \sin \left(\Delta\omega_n t - \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) dt \right] \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что вероятностная мера задана на двумерной плоскости (η_3, η_4) в новой системе координат $\boldsymbol{\eta}$. В этой системе координат четырехмерная ПВ $w_4(\boldsymbol{\eta})$, вычисляемая по формуле (6), будет определяться произведением одномерных ПВ:

$$w_4(\boldsymbol{\eta}^1) = w_1(\eta_1^1) w_1(\eta_2^1) w_1(\eta_3^1) w_1(\eta_4^1).$$

Первые два сомножителя имеют дисперсию, равную нулю, и представляют собой дельта-функцию Дирака, а именно

$$w_1(\eta_1^1) = \delta(\eta_1^1 - \langle \eta_1^1 \rangle) \quad \text{и} \quad w_1(\eta_2^1) = \delta(\eta_2^1 - \langle \eta_2^1 \rangle).$$

Кроме того, имеем $\langle \eta_1^1 \rangle = \langle \eta_2^1 \rangle = 0$. Интегрирование дельта-функции в данном случае приводит к единице, и четырехкратный интеграл становится двукратным.

Тогда расчет условных вероятностей приема информационных символов в системе координат вектора $\boldsymbol{\xi}^1$ при приеме первого информационного символа должен выполняться по формулам

$$\begin{aligned} P(1/1) &= P(\hat{x}_1/x_1) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_4(\boldsymbol{\xi}/s_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \\ P(2/1) &= P(\hat{x}_2/x_1) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_4(\boldsymbol{\xi}/s_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \\ P(3/1) &= P(\hat{x}_3/x_1) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_4(\boldsymbol{\xi}/s_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \\ P(4/1) &= P(\hat{x}_4/x_1) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_4(\boldsymbol{\xi}/s_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \end{aligned}$$

где $w_4(\boldsymbol{\xi}/s_1)$ — условная ПВ вектора $\boldsymbol{\xi}$ при передаче первого символа s_1 .

В системе координат вектора $\boldsymbol{\eta}^1$ формула для расчета условных вероятностей имеет вид произведения однократных интегралов:

$$\begin{aligned} P(i/1) &= \int_{\eta_{1ni}^1}^{\eta_{1ni}^1} w_1(\eta_1^1) d\eta_1 \int_{\eta_{2ni}^1}^{\eta_{2ni}^1} w_1(\eta_2^1) d\eta_2 \times \\ &\times \int_{\eta_{3ni}^1}^{\eta_{3ni}^1} w_1(\eta_3^1) d\eta_3 \int_{\eta_{4ni}^1}^{\eta_{4ni}^1} w_1(\eta_4^1) d\eta_4, \end{aligned}$$

где η_{li}^1 и η_{li}^1 — нижний и верхний l -е пределы интегрирования, подлежащие определению.

Первые два интеграла в их произведении равны единице, следовательно, имеем

$$P(i/1) = \int_{\eta_{3ni}^1}^{\eta_{3ni}^1} w_1(\eta_3) d\eta_3 \int_{\eta_{4ni}^1}^{\eta_{4ni}^1} w_1(\eta_4) d\eta_4. \quad (8)$$

Определим верхние и нижние границы двукратного интеграла переходной вероятности через уравнения плоскостей в четырехмерном пространстве, ограничивающих область интегрирования на примере расчета условной вероятности приема информационного символа $P(2/1)$.

Для этого выпишем уравнения плоскостей, ограничивающих область интегрирования в четырехмерной системе координат $\boldsymbol{\xi}$ из формулы для расчета $P(2/1)$, а именно [19]

$$\xi_1 - \xi_2 = 0, \quad \xi_3 - \xi_2 = 0, \quad \xi_4 - \xi_2 = 0. \quad (9)$$

Используя преобразования $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{V}\boldsymbol{\eta}$, определяем значения составляющих вектора $\boldsymbol{\xi}$ через составляющие вектора $\boldsymbol{\eta}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_2 + \eta_4); \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \eta_3); \\ \xi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_2 - \eta_4); \quad \xi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_3). \end{aligned}$$

Подставляя данные выражения в уравнение (9), учитывая, что $\eta_1 = \eta_2 = 0$, получаем уравнения следов пересечения плоскостей в четырехмерном пространстве, ограничивающих область определе-

ния интеграла с двумерной плоскостью $(\eta_3 0 \eta_4)$, а именно $\eta_4 = \eta_3$, $\eta_4 = -\eta_3$, $\eta_3 = 0$.

Исходя из этих уравнений, можно сделать вывод, что пределы интегрирования по осям для (8)

имеют значения $\eta_{3н} = 0$, $\eta_{3в} = \infty$, $\eta_{4н} = -\eta_3$, $\eta_{4в} = \eta_3$. В выражении (8) одномерные ПВ представляются в следующем виде:

$$w_1(\eta_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_c} \exp \left(-\frac{\left(\eta_3^1 + \sqrt{2}h_c h_n \frac{1}{T} \int_0^T \cos \left(\Delta\omega_n t - \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) dt \right)^2}{2h_c^2} \right).$$

$$w_1(\eta_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_c} \exp \left(-\frac{\left(\eta_4^1 - \sqrt{2} \left[h_c^2 + h_c h_n \frac{1}{T} \int_0^T \sin \left(\Delta\omega_n t - \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) dt \right] \right)^2}{2h_c^2} \right).$$

Как найдено выше, вероятность ошибки приема первого бита состоит из двух слагаемых. Сведем выражения (1)–(3) в одно и получим

$$P_{\text{ош}}(1\text{-й бит}) = [P(4/1) + P(3/1) + P(4/2) + P(3/2) + P(1/4) + P(1/3) + P(2/4) + P(2/3)]/4.$$

Результаты непосредственных расчетов показывают одинаковость вероятностей ошибок приема первого и второго битов при кодировании по Грея [22]. Поэтому достаточно рассмотреть вероятность только одного бита.

Кроме того, результаты расчетов показывают одинаковость вида формул в следующих равенствах:

$$P(4/1) = P(2/1); \quad P(3/2) = P(1/2);$$

$$P(4/3) = P(2/3); \quad P(3/4) = P(1/4).$$

Для получения окончательной формулы для расчета переходной условной вероятности введем обычные нормированные переменные:

$$x = \frac{\eta_3 - \langle \eta_3 \rangle}{h_c}; \quad y = \frac{\eta_4 - \langle \eta_4 \rangle}{h_c}.$$

Тогда нижние $(x_{н2/1}, y_{н2/1})$, и верхние $(x_{в2/1}, y_{в2/1})$ пределы интегрирования имеют вид

$$\begin{cases} x_{н2/1} = \sqrt{2} \frac{h_n}{T} \int_0^T \cos \left(\Delta\omega_n t - \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) dt, x_{в2/1} = \infty; \\ y_{н2/1} = -x - \sqrt{2} \left\{ h_c - \frac{h_p}{T} \int_0^T \left[\cos \left(\Delta\omega_n t - \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) - \sin \left(\Delta\omega_n t - \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) \right] dt \right\}; \\ y_{в2/1} = x - \sqrt{2} \left\{ h_c + \frac{h_p}{T} \int_0^T \left[\sin \left(\Delta\omega_n t - \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) + \cos \left(\Delta\omega_n t - \frac{2\Delta\omega_n t^2}{T} + \varphi_n \right) \right] dt \right\}. \end{cases}$$

Нормированные ПВ для переменных x и y вычисляем по формулам

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right);$$

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right).$$

Переходные (условные) вероятности имеют аргументом параметр φ_n , например, $P(2/1, \varphi_n)$. Для исключения этого параметра применим усреднение по φ_n , стандартно приняв его равномерно

распределенной в пределах $(-\pi, \pi)$ случайной величиной [19, 20]. Тогда примем

$$P(2/1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(2/1, \varphi_n) d\varphi_n.$$

По непосредственным вычислениям и построению графиков сравнения установлены следующие равенства после усреднения по φ_n :

а) для противоположных позиций в символьном созвездии –

$$P(3/1) = P(1/3) = P(4/2) = P(2/4); 16$$

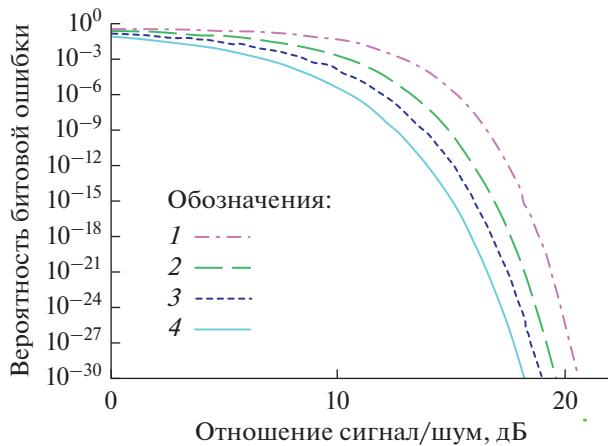


Рис. 1. Зависимости вероятностей битовой ошибки от E_b/N_0 для сигналов с QPSK-модуляцией при фиксированных уровнях помехи с ЛЧМ: 15 (1), 10 (2) и 5 дБ (3), а также для сигнала с BPSK-модуляцией (4).

б) для соседних позиций в созвездии —

$$P(4/1) = P(2/1) = P(3/2) = P(1/2) = \\ = P(4/3) = P(2/3) = P(3/4) = P(1/4).$$

Для расчета вероятности ошибки приема первого бита используем выражение:

$$P_{\text{ош}}(\text{1-й бит}) = \\ = [4P(3/1) + 4P(4/1)]/4 = P(4/1) + P(3/1).$$

Таким образом, достаточно иметь всего два вида слагаемых для получения средней вероятности ошибок приема битов, например:

$$P_{\text{ош б}} = P_{\text{ош}}(\text{1-й бит}) = P(4/1) + P(3/1).$$

На рис. 1 построены графики зависимостей средней вероятности ошибки приема бита от отношения сигнал/шум для бита $h_b^2 = E_b/N_0$ и с длительностью символа 0.004 с при фиксированных уровнях помехи с ЛЧМ и при значении девиации частоты, равном 250 Гц.

На рис. 1 представлены кривые, построенные при отсутствии помехи и при значениях помеха/шум 5, 10 и 15 дБ, и с учетом соотношения $h_c^2 = E_c/N_0 = 2E_b/N_0 = 2h_b^2$, а также представлен график вероятности битовой ошибки для сигнала с BPSK-модуляцией в отсутствие структурных помех.

Как видно из рис. 1: 1) графики имеют пороговый характер, 2) с увеличением уровня помехи средняя вероятность битовой ошибки увеличивается. Графики вероятности битовой ошибки для сигнала с BPSK-модуляцией и вероятности битовой ошибки для сигнала с QPSK-модуляцией при уровне помехи –60 дБ совпали, т.е. в отсутствие

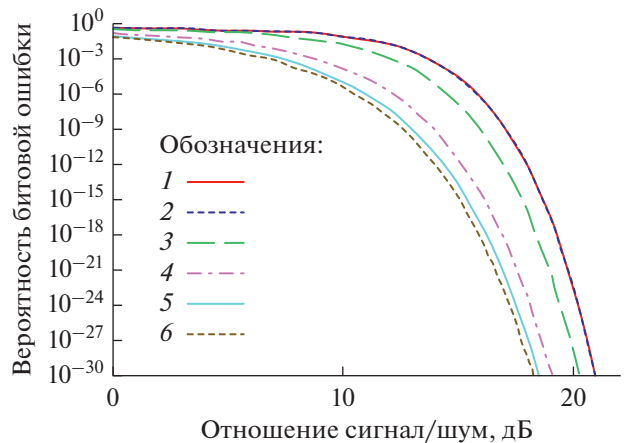


Рис. 2. Зависимости вероятностей битовой ошибки от E_b/N_0 для сигналов с QPSK-модуляцией при фиксированных значениях девиации частоты помехи с ЛЧМ: 0 (1), 10 (2), 100 (3), 1000 (4) и 4000 Гц (5), а также для сигнала с BPSK модуляцией (6).

помехи значения битовой ошибки при QPSK и BPSK, как и должно быть, одинаковы, 3) выведенные формулы дают точные значения и при любых уровнях сигнала и помехи.

На рис. 2 построены графики зависимостей вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум при различных фиксированных значениях девиации частоты помехи с ЛЧМ при следующих условиях: длительность символа сигнала составила $T = 0.004$ с; значения девиации частоты: 0, 10, 100, 1000 и 4000 Гц; отношение помеха/шум с ЛЧМ принято 10 дБ.

Кривые на графиках показывают, что при больших значениях девиации частоты влияние помехи минимально, а при малых значениях — максимально. При этом влияние помехи с ЛЧМ приближается к степени влияния когерентной гармонической помехи (с девиацией частоты — 0) [19].

Для построения графиков зависимостей средних вероятностей битовой ошибки от величины девиации частоты помехи с ЛЧМ при фиксированных значениях уровней сигнала и помехи (рис. 3) использовались следующие входные данные: отношение помеха/шум 10 дБ; отношения сигнал/шум 10, 14 и 16 дБ.

Как видно из рис. 3 максимальное подавляющее воздействие помехи на сигнал имеет место при девиации частоты в пределах 0...40 Гц.

Если в модели помехи принять коэффициент $a = 0$, то помеха становится гармонической со сдвигом частоты [25, 26]. В этом случае интеграл в выражениях для откликов интеграторов-корреляторов демодулятора легко берется и общие формулы упрощаются. При этом формулы при-

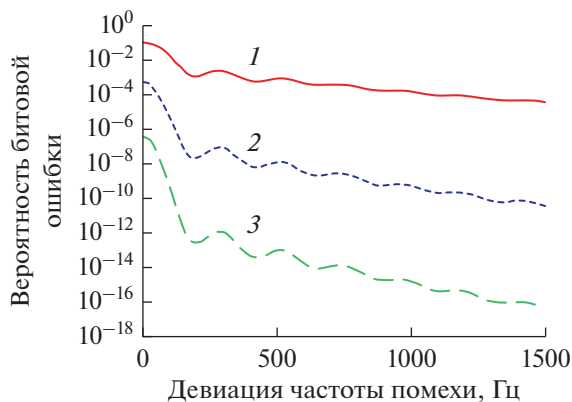


Рис. 3. Зависимости вероятностей битовой ошибки от величины девиации частоты помехи с ЛЧМ при фиксированных значениях уровней сигнала и помехи в виде отношений сигнал/шум и помеха/шум для различных уровней сигнала: 10 (1), 14 (2) и 16 дБ (3).

обретают новое качество. Они позволяют построить графики зависимости вероятности ошибки приема на бит не только от уровня сигнала, но и от величины сдвига частоты.

Методика расчета вероятности битовой ошибки, вид формул и графики через вычисление вероятности правильного решения представлены в работе [19, 20]. В данной же статье представлены результаты при использовании переходных (условных) вероятностей, позволяющих получить точные значения как при малых, так и при больших уровнях сигнала и помехи.

Проведенный анализ полученных результатов показал, что при небольших значениях девиации частоты влияния гармонической помехи и помехи с ЛЧМ мало отличаются, при больших значениях девиации частоты влияние помехи с ЛЧМ существенно меньше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На вероятность ошибки 1-го бита наличие или отсутствие кодирования по Грея никак не сказывается. При использовании кодирования по Грея вероятности ошибок 1-го и 2-го битов одинаковы во всех точках графиков. Без использования кодирования по Грея вероятность ошибки 2-го бита больше, чем у 1-го бита [22].

Представленная корректная методика и результаты позволяют обеспечить точный расчет влияния гармонической помехи и помехи с ЛЧМ на прием радиосигнала с QPSK. Несмотря на несколько меньшую эффективность помехи с ЛЧМ ее устранение представляет теоретически и практически более сложную задачу.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gransart C., Romero G.L., Simon E.P. et al. // IEEE Trans. 2017. V. EC-59. № 5. P. 1625.
2. Romero G., Deniau V., Stienne O. // 2019 Int. Symp. on Electromagnetic Compatibility. Barcelona. 2–6 Sep. 2019. N.Y.: IEEE, 2019. Article No. 8872052.
3. Lebl A.V., Pavic R.B., Radivojevic J.D. et al. // 2020 28th Telecommunications Forum (TELFOR) 2020. Belgrade. 24–25 Nov. Article No. 9306587.
4. Mileusnic M., Pavic B., Marinkovic-Nedelicki V. et al. // Electronics and Energetics. 2022. V. 32. № 2. P. 211.
5. Marinkovic-Nedelicki V., Lebl A., Mileusnic M. et al. // 2019 18th Int. Symp. INFOTEH-JAHORINA (INFO-TEH). East Sarajevo. 20–22 Mar. N.Y.: IEEE, 2019. Article No. 8717747.
6. Mileusnic M., Petrovic P., Pavic B. et al. // 8th Int. Sci. Conf. on Defensive Technologies OTEH. Belgrade. 11–12 Oct. Belgrade: Military Technical Inst., 2018. P. 380.
7. Lebl A., Kosjer V., Radivojevic J., Mileusnic M. // 7th Int. Conf. IcETRAN 2020. Proc. of Papers. Nis, Serbia. 28–29 Sept. 2020. V. 7. P. 740.
8. Caijie X., Aihua W., Jianping A., Yongzheng G. // 2007 Int. Conf. on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing. Shanghai. 21–25 Sep. 2007. N.Y.: IEEE, 2007. P. 1228.
9. Shan P., Beex A.A. // Proc. IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis. Pittsburgh. 9 Oct. 1998. PA. N.Y.: IEEE, 1998. P. 109.
10. Dida M.A., Hao H., Wang X., Ran T. // 2016 IEEE Information Technology. Chongqing. 20–22 May. N.Y.: IEEE, 2016. P. 298.
11. Robertson M., Brown E. // Dig. 2003 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. N.Y.: IEEE, 2003. V. 1. P. 611.
12. Lee H., Kim T.H., Choi J.W., Choi S. // 2015 IEEE Conf. Computer Communications (INFOCOM). 26 Apr.–1 May. Hong Cong. N.Y.: IEEE, 2015. P. 2407.
13. Huang S.-W., Sklivanitis G., Pados D.A., Batalama S.N. // Conf. Record 51st Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers. 29 Oct.–1 Nov. 2017. Pacific Grove. N.Y.: IEEE, 2017. P. 1749.
14. Huang S.-W., Pados D.A. // <https://arxiv.org/pdf/1812.09592.pdf>.
15. Cheng S.-J., Wang W.-Q., Shao H.-Z. // IEEE Sensors J. 2015. V. 15. № 10. P. 5694.
16. Attar H., Solyman A. // Computer and Communications. 2017. V. 5. № 2. P. 34.
17. Ouyang X., Zhao J. // IEEE Trans. 2016. V. COM-64. № 9. P. 3946.
18. Alsharef M.A. // M-ary Chirp Modulation for Data Transmission Digitized Theses. London, Ontario:

- Western Univ., 2011. 100 p. <https://ir.lib.uwo.ca/digitizedtheses/3443>.
19. *Звонарев В.В., Попов А.С.* // Информационно-управляющие системы. 2021. № 1. С. 45.
20. *Куликов Г.В., Нгуен Ван Зунг* // Рос. технол. журн. 2018. Т. 6. № 6. С. 5.
21. *Савищенко Н.В.* Многомерные сигнальные конструкции: их частотная эффективность и потенциальная помехоустойчивость приема/ Под ред. Д.Л. Бураченко. СПб.: Политех. ун-т. 2005.
22. *Звонарев В.В., Бродский М.С., Попов А.С.* // Тр. Военно-космич. акад. им. А.Ф. Можайского. 2021. Вып. 678. С. 50.
23. *Lee P.J.* // IEEE Trans. 1986. V. COM-34. № 5. P. 488.
24. *Скляр Б.М.* Цифровая связь. М.: ИД Вильямс, 2003. С. 1099.
25. *Звонарев В.В., Пименов В.Ф., Попов А.С.* // Тр. Военно-космич. акад. им. А.Ф. Можайского. СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского. 2021. Вып. 677. С. 50.
26. *Куликов Г.В., Нгуен Ван Зунг, Нестеров А.В., Лелюх А.А.* // Научные технологии. 2018. № 11. С. 32.