РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 68, № 12, с. 1165–1171

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 533.9

К ТЕОРИИ ЕМКОСТНОГО РАЗРЯДА В ПОПЕРЕЧНОМ ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2023 г. И. Н. Карташов[a], *, М. В. Кузелев[a]

[a] Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, стр. 2, Москва, 119991 Российская Федерация

*E-mail: igorkartashov@mail.ru

Поступила в редакцию 13.02.2023 г.
После доработки 13.02.2023 г.
Принята к публикации 03.03.2023 г.

Рассмотрены электродинамические свойства плазмы высокочастотного емкостного разряда с магнитным полем вдоль пластин конденсатора. Вычислен комплексный импеданс такой системы. На основе эквивалентной электротехнической схемы плазменного конденсатора проанализированы резонансные свойства разряда. Продемонстрирована роль ионов в устойчивости дрейфующего в скрещенных электрическом и магнитном полях потока электронов.

DOI: 10.31857/S0033849423120094, **EDN:** HVCWTQ

ВВЕДЕНИЕ

Внешнее магнитное поле, перпендикулярное разрядному току, существенно влияет на электромагнитные свойства высокочастотного емкостного (ВЧЕ) разряда, что обусловлено в первую очередь затрудненностью поляризации плазмы поперек магнитного поля. В определенном диапазоне частот продольное электрическое поле слабо экранируется магнитоактивной плазмой в направлении, перпендикулярном внешнему магнитному полю, что наводит на мысль о возможном улучшении некоторых параметров ВЧЕ-разряда применением внешнего магнитного поля. Следует заметить, что в разрядах постоянного тока использование внешнего магнитного поля перпендикулярного разрядному току давно показало свою эффективность (даже необходимость) в стационарных плазменных двигателях (СПД) [1]. В этих двигателях существенной оказывается еще одна роль внешнего магнитного поля: поперечный дрейф замагниченных электронов плазмы в скрещенных постоянных внешнем магнитном и разрядном электрическом полях. Незамагниченные же ионы плазмы свободно ускоряются электрическим полем разряда, создавая тем самым тягу СПД [1].

В связи с задачей разработки низкоорбитальных космических аппаратов возникла идея замены рабочего газа СПД, а именно, инертный газ заменить на атмосферный воздух. Для преодоления возникших в связи с такой заменой трудностей было предложено вместо разряда постоянного тока на базе стандартной конструкции СПД организовать ВЧЕ-разряд. Параметры холловских двигателей на ВЧЕ-разряде с поперечным магнитным полем исследованы в работе [2].

В данной работе не ставится задача расчета плазменного двигателя на ВЧЕ-разряде с поперечным магнитным полем. В реальной геометрии плазменного двигателя получить какие-либо аналитические результаты вряд ли возможно. Однако основной элемент плазменного двигателя — сам ВЧЕ-разряд в поперечном магнитном поле — в простейшей геометрии исследовать не сложно, чему и посвящена эта работа. Мы совсем не обсуждаем здесь вопросов создания и поддержания плазмы разряда, полностью действуя в духе работ [3, 4]. Фактически речь пойдет об электромагнитных, точнее электротехнических, свойствах плазменного конденсатора простейшей геометрии, помещенного в однородное внешнее магнитное поле.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА

Рассмотрим плоский плазменный конденсатор, помещенный в однородное внешнее магнитное поле, параллельное плоскостям обкладок конденсатора $x = 0$ и $x = d$. Пусть внешнее магнитное поле $\vec{B}_0 = \{0, 0, B_0\}$ направлено вдоль координатной оси z. Считая плазму холодной и пренебрегая движением тяжелых ионов, запишем следующую систему уравнений для скалярного потенциала электрического поля $\varphi(t,x,y,z)$, гидродинамической плотности $N(t,x,y,z)$ и компонент гидродинамической скорости $V_{x,y,z}(t,x,y,z)$ электронов плазмы:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi e(N-n_{0e}),\\
\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(NV_x)+\frac{\partial}{\partial y}(NV_y)+\frac{\partial}{\partial z}(NV_z)=0,\\
\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=\\
=\Omega_e V_y-\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\nu_e V_x,\\
\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}=\\
=-\Omega_e V_x-\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\nu_e V_y,\\
\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=-\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\nu_e V_z,
\end{gathered}\tag{1}$$

где $\Omega_e=eB_0/mc$ – электронная циклотронная частота, ν_e – эффективная частота столкновений электронов (с нейтральными атомами и ионами), n_{0e} – невозмущенная плотность электронов плазмы. Пока считаем, что плотность плазмы в конденсаторе не зависит от координат. Полагая, что одна из обкладок конденсатора заземлена, а другая подсоединена к внешнему источнику синусоидального напряжения частоты ω, для скалярного потенциала запишем следующие граничные условия:

$$\begin{gathered}
\varphi(t,0,y,z)=0,\\
\varphi(t,d,y,z)=-\mathrm{Re}[U_0\exp(-i\omega t)].
\end{gathered}\tag{2}$$

Если расстояние между обкладками конденсатора мало по сравнению с их поперечным размером, то можно пренебречь краевыми эффектами (т.е. принять $\partial/\partial y=\partial/\partial z=0$) и записать систему (1) в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-4\pi e(N-n_{0e}),\\
\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(NV_x)=0,\\
\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}=\Omega_e V_y-\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\nu_e V_x,\\
\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}=-\Omega_e V_x-\nu_e V_y,\\
\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}=-\nu_e V_z.
\end{gathered}\tag{3}$$

Решение системы уравнений (3) возьмем следующее:

$$\begin{gathered}
\varphi_0(t,x)=-E_0x\exp(-i\omega t),\\
N(t,x,y,z)=n_{0e},\\
V_z(t,x,y,z)=0,\\
V_x(t,x,y,z)=i\frac{e}{m}E_0\exp(-i\omega t)\times\\
\times\frac{(\omega+i\nu_e)}{(\omega+i\nu_e)^2-\Omega_e^2}\equiv V_{0x}(t),\\
V_y(t,x,y,z)=\frac{e}{m}E_0\exp(-i\omega t)\times\\
\times\frac{\Omega_e}{(\omega+i\nu_e)^2-\Omega_e^2}\equiv V_{0y}(t),
\end{gathered}\tag{4}$$

где $E_0=U_0/d$, а комплексная амплитуда U_0 определена в (2). Отметим, что поскольку для решений (4) нелинейные члены в уравнениях (3) равны нулю, мы записали эти решения в комплексной форме, не выделяя вещественную часть. Вообще говоря, решение (4) не является единственным ввиду наличия производных по x в системе (3) и возможности постановки различных граничных условий для скорости. Если амплитуда колебаний частиц во внешнем электрическом поле и радиус ларморовского вращения малы по сравнению с d, то зависимостью от координаты x в гидродинамической скорости также можно пренебречь и считать систему квазиоднородной, что и было сделано.

2. ИМПЕДАНС ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА

Наличие скорости $V_{0x}(t)$ приводит к появлению дополнительных поляризационных зарядов на обкладках конденсатора. Плотность поляризационного тока определяется формулой

$$\begin{gathered}
j_p(t)=\frac{\partial P_x}{\partial t}=en_{0e}V_{0x}(t)=\\
=i\frac{\omega_{Le}^2}{4\pi}E_0\exp(-i\omega t)\frac{(\omega+i\nu_e)}{(\omega+i\nu_e)^2-\Omega_e^2},
\end{gathered}\tag{5}$$

где ω_{Le} – ленгмюровская частота электронов плазмы, а P_x – компонента вектора поляризации. Из (5) и формулы $\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$ находим выражение для нормальной к обкладкам конденсатора компоненты вектора индукции электрического поля

$$D_x=\varepsilon_\perp(\omega)E_0\exp(-i\omega t),\tag{6}$$

где

$$\varepsilon_\perp(\omega)=1-\frac{\omega_{Le}^2(\omega+i\nu_e)}{\omega[(\omega+i\nu_e)^2-\Omega_e^2]}.\tag{7}$$

Используя далее граничное условие на обкладке конденсатора

$$D_x(x=0)=4\pi\sigma_0$$

(σ_0 – поверхностная плотность электрического заряда), получаем следующее соотношение:

$$q_0=\varepsilon_\perp\frac{S}{4\pi d}U_0, \tag{8}$$

где S – площадь обкладки конденсатора, q_0 – комплексная амплитуда электрического заряда на обкладке (с учетом временной зависимости, как это следует из (2), заряд обкладки конденсатора равен $\mathrm{Re}[q_0\exp(-i\omega t)]$). При получении (8) считалось, что $\sigma_0=q_0/S$, что согласуется с предположением об отсутствии в конденсаторе краевых эффектов.

По определению емкостью конденсатора называется коэффициент пропорциональности между зарядом на обкладке и разностью потенциалов между обкладками. Таким образом, для емкости плазменного конденсатора имеем

$$C_p=\varepsilon_\perp C_0, \tag{9}$$

где $C_0=S/(4\pi d)$ – емкость соответствующего вакуумного конденсатора.

Известно, что структура тензора диэлектрической проницаемости холодной однородной магнитоактивной плазмы определяется формулой [5, 6]

$$\varepsilon_{ij}(\omega)=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}(\omega) & \varepsilon_{xy}(\omega) & 0\\ \varepsilon_{yx}(\omega) & \varepsilon_{yy}(\omega) & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(\omega)\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Здесь $i,j=x,y,z$, а $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_\perp$, где $\varepsilon_\perp$ совпадает с величиной (7). Также известно, что емкость конденсатора с однородным изотропным диэлектрическим заполнением отличается от емкости соответствующего вакуумного конденсатора множителем ε_0, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость заполнения [7]. Формула (9) показывает, что аналогичный результат имеет место и в случае конденсатора, заполненного анизотропной магнитоактивной плазмой.

Предположим теперь, что рассматриваемый плазменный конденсатор включен в электрическую цепь, по которой протекает ток на частоте ω и с комплексной амплитудой I_0. Поскольку амплитуды тока в цепи и поверхностного заряда на обкладке конденсатора связаны соотношением $I_0=-i\omega q_0$, то формулу (8) можно записать в форме закона Ома для участка цепи $U_0=I_0Z_p$, где

$$Z_p=\frac{i}{\omega C_p}=\frac{i}{C_0}\frac{(\omega+i\nu_e)^2-\Omega_e^2}{\omega[(\omega+i\nu_e)^2-\Omega_e^2]-\omega_{Le}^2(\omega+i\nu_e)} \tag{11}$$

– импеданс плазменного конденсатора. В бесстолкновительном пределе формула для импеданса принимает вид

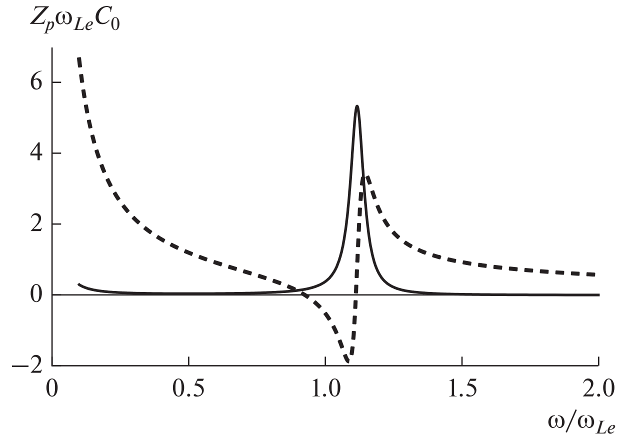

Рис. 1. Импеданс плазменного конденсатора: $\mathrm{Re}\,Z_p$ (сплошная кривая), $\mathrm{Im}\,Z_p$ (штриховая кривая).

$$Z_p=\frac{i}{\omega C_p}=\frac{i}{\omega C_0}\frac{\omega^2-\Omega_e^2}{\omega^2-\Omega_g^2}, \tag{12}$$

где $\Omega_g=\sqrt{\Omega_e^2+\omega_{Le}^2}$ – верхняя гибридная частота.

Формулы (11) и (12) несложно обобщить на случай, когда плазма заполняет конденсатор не полностью. Пусть однородный слой плазмы отделен от обкладок конденсатора одинаковыми слоями изотропного диэлектрика с проницаемостью ε_0, поэтому

$$\omega_{Le}^2(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\Delta,\\ \omega_{Le}^2=\mathrm{const}, & \Delta\le x\le d-\Delta,\\ 0, & d-\Delta<x<d.\end{cases} \tag{13}$$

Очевидно, что если на границах слоя плазмы поместить бесконечно тонкие проводящие плоскости, то емкость конденсатора не изменится, но плазменный конденсатор с диэлектрическими слоями превратится в последовательное соединение двух диэлектрических конденсаторов и одного конденсатора с однородным плазменным заполнением. Так как при последовательном соединении импедансы складываются, то для импеданса плазменного конденсатора с диэлектрическими слоями имеем

$$Z_p=2\frac{i}{\omega C_\Delta}+\frac{i}{\omega\varepsilon_\perp C_0'}, \tag{14}$$

где

$$C_\Delta=\frac{\varepsilon_0 S}{4\pi\Delta},\quad C_0'=\frac{S}{4\pi(d-2\Delta)}. \tag{15}$$

На рис. 1 изображен импеданс плазменного конденсатора со следующими параметрами: $\nu_e/\omega_{Le}=0.05$, $\Omega_e/\omega_{Le}=0.5$, $\Delta/d=0.3$, $\varepsilon_0=1$.

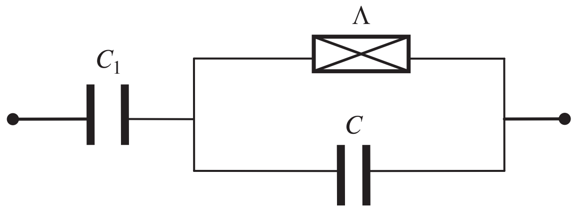

Рис. 2. Эквивалентная схема плазменного конденсатора.

3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА. РЕЗОНАНСЫ

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 2, где C, C_1 и Λ обычные (не плазменные) емкости и индуктивность.

Комплексный импеданс для изображенной схемы определяется формулой

$$Z_0 = \frac{i}{\omega C_\Sigma}\frac{\omega^2 - \beta\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{16}$$

где $C_\Sigma = C_1 C/(C_1 + C)$, $\beta = C/(C_1 + C)$, а $\omega_0 = 1/\sqrt{\Lambda C}$. Сравнивая формулы (16) и (12), видим их полную тождественность, если положить

$$\left.\begin{array}{l} C_\Sigma = C_0 \\ \omega_0^2 = \Omega_g^2 \\ \beta\omega_0^2 = \Omega_e^2 \end{array}\right\} \to \begin{cases} C = C_0\,\Omega_g^2/\omega_{Le}^2 \\ C_1 = C_0\,\Omega_g^2/\Omega_e^2 \\ \Lambda = (\Omega_g^2 C_0)^{-1}\,\omega_{Le}^2/\Omega_g^2 \end{cases}. \tag{17}$$

Таким образом, эквивалентной схемой однородного плазменного конденсатора в поперечном внешнем магнитном поле является схема, представленная на рис. 2. Параметры эквивалентной схемы однозначно определяются формулами (17). В случае плазменного конденсатора с диэлектрическими прослойками, формулы (17) по-прежнему имеют место, только в эквивалентной схеме последовательно с конденсатором C_1 следует подключить две емкости C_Δ.

Формулы (17) и электрическая схема на рис. 2 применимы, если столкновениями в плазме можно пренебречь. Эквивалентную схему плазменного конденсатора со столкновениями можно сконструировать включением дополнительных активных сопротивлений, в первую очередь активного сопротивления последовательного индуктивности Λ. Мы не будем приводить здесь соответствующие схемы и формулы, поскольку в разных частотных диапазонах они оказываются неодинаковыми, в отличие от “бесстолкновительной” схемы рис. 2, справедливой при любой частоте ω.

Импеданс (12) и эквивалентный импеданс (16) имеют ноль и полюс. В случае импеданса (16) ноль соответствует резонансу напряжений, а полюс – резонансу токов в схеме, представленной на рис. 2. Следовательно, такие же резонансы имеют место и в плазменном конденсаторе в поперечном внешнем магнитном поле. Резонанс напряжений имеет место при

$$\omega = \Omega_e, \tag{18}$$

а резонанс токов – при

$$\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}. \tag{19}$$

При $\nu_e = 0$ в точке

$$\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\Omega_e^2 + 2[\omega_{Le}^2 - (\varepsilon_0 - 1)\Omega_e^2]\Delta/d}{\varepsilon_0 - 2(\varepsilon_0 - 1)\Delta/d}} \tag{20}$$

обращается в ноль и импеданс (14). Последняя формула дает условие резонанса напряжений в конденсаторе с диэлектрическими зазорами, а условие резонанса токов по-прежнему дается формулой (19). При $\varepsilon_0 = 1$ и $\Omega_e = 0$ выражение (20) переходит в известное условие геометрического резонанса $\omega = \omega_{Le}\sqrt{2\Delta/d}$ [8].

На рис. 1 резонансу (19) соответствует точка, в которой вещественная часть импеданса достигает максимального значения, а резонансу (20) соответствует точка, в которой обращается в ноль мнимая часть импеданса. Заметим, что формулы (18)–(20) получены для случая бесстолкновительной плазмы, когда $\nu_e = 0$ и вещественная часть импеданса тождественно равна нулю. Однако при $\nu_e \ll \omega$ резонансные точки, показанные на рис. 1 и определяемые формулами (19) и (20), с точностью до величин ν_e/ω совпадают.

Заметим, что понятие импеданса, так же как и само понятие высокочастотного разряда, имеют смысл только в квазистационарной области частот, которую можно определить неравенством

$$\frac{\omega}{c}d \ll 1. \tag{21}$$

Очевидно, что в соответствии с формулами (18)–(20) о резонансах напряжений и токов в плазменном конденсаторе уместно говорить только в том случае, когда электронная циклотронная частота Ω_e и электронная ленгмюровская частота ω_{Le} сами попадают в квазистационарную область. Например, в случае упомянутых ранее экспериментов [2] частота ω безусловно принадлежит квазистационарному диапазону, а Ω_e и ω_{Le} существенно выше. В этом случае для диэлектрической проницаемости (7) можно записать

$$\varepsilon_\perp(\omega) = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2}\left(1 + i\frac{\nu_e}{\omega}\right). \tag{22}$$

При этом резонансные свойства конденсатора вообще не проявляются, а его эквивалентная схема с учетом столкновений сводится к последовательному соединению емкости и активного сопротивления.

4. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Можно сказать, что формулы (4) описывают невозмущенное (равновесное) состояние плазмы и поля в рассматриваемом конденсаторе. Эти формулы являются точным решением нелинейной системы (3), а значит, и полной системы (1), если конечно пренебречь краевыми эффектами. Встает вопрос об устойчивости состояния, описываемого формулами (4). Попытаемся частично ответить, пренебрегая, как и прежде, движением ионов плазмы и считая, что плазма заполняет конденсатор полностью (без диэлектрических зазоров), а также полагая $\nu_e = 0$.

При наличии возмущений ищем решения уравнений (1) в виде

$$\begin{gathered}
\varphi(t,x,y,z) = \mathrm{Re}[\varphi_0(t,x)] + \\
+\ \tilde{\varphi}(t,x)\exp(ik_y y + ik_z z), \\
V_x(t,x,y,z) = \mathrm{Re}[V_{0x}(t)] + \\
+\ \tilde{V}_x(t,x)\exp(ik_y y + ik_z z), \\
V_y(t,x,y,z) = \mathrm{Re}[V_{0y}(t)] + \\
+\ \tilde{V}_y(t,x)\exp(ik_y y + ik_z z), \\
V_z(t,x,y,z) = \tilde{V}_z(t,x)\exp(ik_y y + ik_z z), \\
N(t,x,y,z) = n_{0e} + \tilde{N}(t,x)\exp(ik_y y + ik_z z),
\end{gathered} \tag{23}$$

где величины со знаком ~ обозначают малые возмущения. При написании формул (23) мы считали конденсатор безграничным по координатам y и z, что согласуется с исходным предположением об отсутствии краевых эффектов. В линейном по возмущениям приближении из уравнений (1) имеем следующую систему для возмущений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2} - (k_y^2 + k_z^2)\tilde{\varphi} = -4\pi e\tilde{N}, \\
\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} + \left(n_{0e}\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + V'_{0x}\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}\right) + \\
+\ ik_y(n_{0e}\tilde{V}_y + V'_{0y}\tilde{N}) + ik_z n_{0e}\tilde{V}_z = 0, \\
\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial t} + V'_{0x}\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + ik_y V'_{0y}\tilde{V}_x = \Omega_e\tilde{V}_y - \frac{e}{m}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}, \\
\frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial t} + V'_{0x}\frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial x} + ik_y V'_{0y}\tilde{V}_y = -\Omega_e\tilde{V}_x - ik_y\frac{e}{m}\tilde{\varphi}, \\
\frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial t} + V'_{0x}\frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial x} + ik_y V'_{0y}\tilde{V}_z = -ik_z\frac{e}{m}\tilde{\varphi}.
\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь штрихом обозначены вещественные части скоростей V_{0x} и V_{0y}. Если рассматривать систему (24) как краевую задачу по координате x, то ее исследование окажется весьма сложным. Учитывая упоминавшуюся выше квазиоднородность системы, поступим по-другому. Будем рассматривать всю схему, включающую плазменный конденсатор, источник напряжения, подводящие провода и т.п., как "кольцевую" систему, по которой распространяется некоторая волна. В этом случае зависимость возмущений от координаты x можно описать функцией $\exp(ik_x x)$. Тогда, исключая из (24) возмущение потенциала, несложно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{d\tilde{n}}{dt} + i(k_x\tilde{V}_x + k_y\tilde{V}_y + k_z\tilde{V}_z) + iW(t)\tilde{n} = 0, \\
\frac{d\tilde{V}_x}{dt} + iW(t)\tilde{V}_x = \Omega_e\tilde{V}_y - \frac{ik_x}{k^2}\omega_{Le}^2\tilde{n}, \\
\frac{d\tilde{V}_y}{dt} + iW(t)\tilde{V}_y = -\Omega_e\tilde{V}_x - \frac{ik_y}{k^2}\omega_{Le}^2\tilde{n}, \\
\frac{d\tilde{V}_z}{dt} + iW(t)\tilde{V}_z = -\frac{ik_z}{k^2}\omega_{Le}^2\tilde{n}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Здесь $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, $\tilde{n} = \tilde{N}/n_{0e}$, а

$$\begin{gathered}
W(t) = k_x V'_{0x} + k_y V'_{0y} = \\
= \frac{e}{m}\frac{\mathrm{Re}\left[(ik_x\omega + k_y\Omega_e)\,E_0\exp(-i\omega t)\right]}{\omega^2 - \Omega_e^2}.
\end{gathered} \tag{26}$$

Несложно видеть, что заменой

$$\tilde{A}(t) \to \tilde{A}(t)\exp\left(-i\int W(t)dt\right), \tag{27}$$

($\tilde{A}(t)$ – любое из входящих в систему (25) возмущений) система преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
\frac{d\tilde{n}}{dt} + i(k_x\tilde{V}_x + k_y\tilde{V}_y + k_z\tilde{V}_z) = 0, \\
\frac{d\tilde{V}_x}{dt} = \Omega_e\tilde{V}_y - \frac{ik_x}{k^2}\omega_{Le}^2\tilde{n}, \\
\frac{d\tilde{V}_y}{dt} = -\Omega_e\tilde{V}_x - \frac{ik_y}{k^2}\omega_{Le}^2\tilde{n}, \\
\frac{d\tilde{V}_z}{dt} = -\frac{ik_z}{k^2}\omega_{Le}^2\tilde{n}.
\end{gathered} \tag{28}$$

Полагая входящие в (28) возмущения ~ $\exp(-i\tilde{\omega}t)$, стандартным образом получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(k_x^2 + k_y^2)\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\tilde{\omega}^2 - \Omega_e^2}\right) + k_z^2\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\tilde{\omega}^2}\right) = 0. \tag{29}$$

Последнее уравнение описывает так называемые косые ленгмюровские волны [9], но в силу замены (27) это – волны потока электронов с осциллирующей направленной скоростью. Поскольку частоты $\tilde{\omega}$, определяемые уравнением (29), всегда вещественные, то неустойчивость в плазменном конденсаторе отсутствует. Правда результат этот получен в рамках весьма жестких предположений: неподвижные ионы, полное заполнение конденсатора плазмой, описание зависимости возмущений от координаты x функцией $\exp(ik_x x)$.

В качестве примера рассмотрим, к чему может привести учет движения ионов. При этом ограничимся стационарным случаем $\omega = 0$, имеющим прямое отношения к процессам в СПД. Хотя скорость дрейфа ионов такая же, как и дрейфовая скорость электронов, ионы плазмы можно считать незамагниченными. Дело в том, что дрейфовое движение ионов нивелируется другими движениями, а именно – тепловым движением и движением, обусловленным возмущением самосогласованного электрического поля. Поэтому распределение ионов плазмы по скоростям считаем изотропным.

В этом случае тензор диэлектрической проницаемости плазмы получается прибавлением к диагональным членам тензора диэлектрической проницаемости электронов ионного вклада, равного $-\omega_{Li}^2/\tilde{\omega}^2$, где ω_{Li} – ионная ленгмюровская частота. Электронная диэлектрическая проницаемость получается из уравнений (25), в которых при $\omega = 0$ будет $W(t) = -k_y V_d$, где $V_d = eE_0/m\Omega_e$ – скорость дрейфа. В результате несложных вычислений для поперечной и продольной (поперек и вдоль внешнего магнитного поля) компонент тензора диэлектрической проницаемости электрон-ионной плазмы с анизотропными электронами и изотропными ионами получаются следующие выражения:

$$\begin{gathered} \varepsilon_\perp = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2 - \Omega_e^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2}, \\ \varepsilon_\parallel = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2}. \end{gathered} \tag{30}$$

Как известно, дисперсионное уравнение для определения частот $\tilde{\omega}$ системы с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ в потенциальном приближении имеет вид $(k_x^2 + k_y^2)\varepsilon_\perp + k_z^2\varepsilon_\parallel = 0$ [10]. Откуда, с учетом формул (30), получается следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{gathered} 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}\frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2 - \Omega_e^2} - \\ - \frac{k_z^2}{k^2}\frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2} = 0, \end{gathered} \tag{31}$$

при решении которого следует считать, что выполнено неравенство $\omega_{Li}^2 \ll \omega_{Le}^2$. Несложно видеть, что дисперсионное уравнение (31) имеет комплексные решения относительно частоты $\tilde{\omega}$, т.е. описывает неустойчивую систему. Рассмотрим два частных случая.

В случае если доминирующей является k_z-компонента, то уравнение (31) перейдет в уравнение

$$1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2} = 0, \tag{32}$$

по виду совпадающее с уравнением, описывающим известную бунемановскую неустойчивость безграничной плазмы с током [6, 10]. Из (32), предполагая выполненным неравенства $|\tilde{\omega}| \ll |k_y V_d|$, несложно получить следующие приближенные выражения для инкремента неустойчивости:

$$\begin{gathered} \tilde{\omega} = i\omega_{Li}\frac{|k_y V_d|}{\sqrt{\omega_{Le}^2 - |k_y V_d|^2}}, \ |k_y V_d| < \omega_{Le}, \\ \tilde{\omega} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\omega_{Li}^2\omega_{Le}\right)^{1/3}, \ |k_y V_d| = \omega_{Le}. \end{gathered} \tag{33}$$

Применительно к плазменному конденсатору с поперечным магнитным полем неустойчивость с инкрементами (33) уместно назвать дрейфово-бунемановской неустойчивостью, нерезонансной (первый инкремент (33)) и резонансной (второй инкремент (33)). Величину k_y в (33) можно оценить из того соображения, что длина волны возмущений в конденсаторе должна быть кратна размеру L_y обкладки конденсатора в этом направлении, например, $k_y \sim \pi/L_y$.

Во втором частном случае малых k_z уравнение (31) записывается в виде

$$1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2 - \Omega_e^2} = 0, \tag{34}$$

откуда для инкрементов получаются следующие выражения:

$$\begin{gathered} \tilde{\omega} = i\omega_{Li}\sqrt{\frac{|k_y V_d|^2 - \Omega_e^2}{\Omega_g^2 - |k_y V_d|^2}}, \ \Omega_e < |k_y V_d| < \Omega_g, \\ \tilde{\omega} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\omega_{Li}^2\omega_{Le}\frac{\omega_{Le}}{|k_y V_d|}\right)^{1/3}, \ |k_y V_d| = \Omega_g. \end{gathered} \tag{35}$$

Неустойчивость с инкрементом (35) можно классифицировать как дрейфово-циклотронную неустойчивость – нерезонансную (первый инкремент (35)) и резонансную (второй инкремент (35)). Вероятно, что в случае конденсатора с ВЧ-полем, т.е. при $\omega \neq 0$, при учете движения ионов должны появиться еще какие-то неустойчивости, например параметрические, рассмотрению которых мы предполагаем посвятить отдельную работу.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00642).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И.* Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Т. 3. С. 443. М.: Наука, 2000.
2. *Shvydkiy G.V., Zadiriev I.I., Kralkina E.A., Vavilin K.V.* // Vacuum. 2020. V. 180. P. 109588.
3. *Александров А.Ф., Кузелев М.В.* Теоретическая плазменная электротехника. М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2011.
4. *Александров А.Ф., Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 7. С. 826.
5. *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1970.
6. *Кузелев М.В.* Введение в физику плазмы. М.: Ленанд, 2022.
7. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Электричество. М.: Физматлит, 2004.
8. *Савинов В.П.* Физика высокочастотного емкостного разряда. М.: Физмалит, 2013.
9. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С.* Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Ленанд, 2018.
10. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. шк., 1978.