

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОГОННЫХ ПАРАМЕТРОВ
И ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ© 2023 г. А. Е. Максимов^а *, С. П. Куксенко^а^а Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,
ул. Вершинина, 47, Томск, 634034 Российская Федерация

*E-mail: mae@tusur.ru

Поступила в редакцию 21.07.2022 г.

После доработки 20.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассмотрены особенности вычисления матриц погонных параметров и характеристик многопроводных линий передачи. Представлена методика расчета матриц первичных погонных параметров многопроводных линий передачи. Сформулированы критерии точности расчета емкостной матрицы. Отмечена необходимость точного учета взаимовлияния между проводниками линии передачи для корректной оценки искажений распространяемых в ней сигналов. Продемонстрировано влияние погонных параметров многопроводных линий передачи на отклики и глазковые диаграммы в конце их активных проводников. Изучено влияние расстояний от крайних проводников до границ поперечных сечений линий передачи на точность вычисления их емкостных матриц. С использованием метода моментов показано, что известные подходы к определению этих расстояний не всегда дают точные или экономичные результаты. На примере нескольких линий передачи с разным числом диэлектрических слоев и проводников, а также с экраном и без него определены минимальные значения этого расстояния, при которых удается добиться точного и экономичного расчета их емкостных матриц.

DOI: 10.31857/S0033849423120136, EDN: AGAMTZ

ВВЕДЕНИЕ

Линии передачи широко используются при создании элементов современных радиоэлектронных средств в виде межсоединений цифровых схем, фильтров, кабельных жгутов, цифровых шин, датчиков, линий связи и пр. При этом повышение скорости передачи данных и плотности монтажа приводят к необходимости более точного учета электромагнитных связей в линиях передачи [1, 2]. Поэтому M близко расположенных одиночных линий передачи следует рассматривать как одну многопроводную линию передачи (МПЛП) с M проводниками. При этом для обеспечения целостности сигналов в МПЛП важно оценивать ее параметры и характеристики, такие как отклик, глазковая диаграмма, уровни перекрестных помех, джиттер, искажения фронтов и амплитуд сигналов.

Перекрестные помехи обусловлены близким расположением активных и пассивных проводников МПЛП: из-за взаимных емкостей и индуктивностей между ними происходит нежелательная передача электромагнитной энергии от активного проводника к пассивным. Выделяют перекрестные помехи на ближнем и дальнем концах проводников МПЛП [3, <https://protect.gost.ru/document.aspx?control=7&id=187895>, <https://protect.gost.ru/document1.aspx?control=31&baseC=6&page=40&month=5&year=2020&search=2.&id=234082>]. При этом если по пассивным проводникам МПЛП также распространяются полезные сигналы, то перекрестные помехи складывается с ними, что может повлиять на работоспособность системы в целом. Например, в работах [4–6] показано, что уровень перекрестных помех на дальних концах пассивных проводников МПЛП может достигать до 60% от амплитуды сигнала в активном проводнике.

Проблема целостности сигналов наиболее критична для высокоскоростной передачи данных (частота сигналов выше 100 МГц или их фронты меньше 10 нс) [7]. Одним из путей решения этой проблемы является минимизация взаимных емкостей и индуктивностей между проводниками МПЛП за счет их разнесения в пространстве. Например, известно правило “ $3h$ ”, согласно которому проводники микрополосковых МПЛП должны быть разнесены на расстояние, равное утроенной толщине подложки, для уменьшения уровня перекрестных помех до 10% [8, 9]. Однако для печатных плат с высокой плотностью межсоединений этому правилу часто не удается удовлетворить и требуется поиск альтернативных технических реше-

ний, например, установка дополнительных заземленных (защитных) проводников и (или) изменение параметров сигнала в активном проводнике [10]. Поэтому при проектировании МПЛП требуется тщательное математическое моделирование с использованием программных средств [11–17].

Для математического моделирования МПЛП широкое использование получил подход, основанный на квазистатическом приближении, при котором сначала производится расчет матриц первичных параметров линии, а затем вычисление ее характеристик с использованием телеграфных уравнений [18–21]. Этот подход реализован во многих как коммерческих, так и свободно распространяемых программных средствах. Кроме того, он является более экономичным и дающим в большинстве случаев приемлемую точность результатов по сравнению со строгим электродинамическим подходом [22]. При этом вычислительно-экономичные аналитические решения для расчета первичных параметров МПЛП известны только для одно- и двухпроводных линий передачи [23]. Поэтому для МПЛП используют различные численно-аналитические и численные методы [24], причем для многослойных МПЛП с большим числом проводников применяют только последние [25–34].

Численный расчет матриц первичных параметров МПЛП основан на решении уравнения Пуассона (или Лапласа) в дифференциальной или интегральной форме. При дифференциальной формулировке чаще всего используются методы конечных элементов (finite element method, FEM) [35] и разностей (finite difference method, FDM) [36], а при интегральной – моментов (method of moments, MoM) [37], эквивалентной схемы из частичных элементов (partial element equivalent circuit method, PEES) [38] и вспомогательных источников (method of auxiliary sources, MAS) [39]. Отдельно отметим, что MoM в литературе также иногда называют методом интегральных уравнений [40, 41], методом сингулярных интегральных уравнений [42], методом поверхностных интегральных уравнений [43], методом граничных элементов [44–47] и методом Галеркина–Петрова [48]. Однако во избежание путаницы, в этой работе использовано название “метод моментов” [49, 50].

Известно множество программных средств, позволяющих вычислять матрицы первичных параметров МПЛП разными численными методами (указаны в скобках): Raphael RC2 (FDM), Ansys Q2D/Q3D Extractor (FEM, MoM), COMSOL Multiphysics (FEM), QuickField (FEM), Elcut (FEM), FEMM (FEM), FlexPDE (FEM), FastCap2 и FastCap (MoM, PEES), CONMTL (MoM), LINPAR (MoM), PathWave ADS (MoM), EMCoS PCB VLab (MoM, MAS), Hyperlynx (MoM), TALGAT (MoM), Polar (MoM), CST PCB Studio (MoM, PEES), IC–

EMC (PEES), FastHenry2 (PEES) и др. Однако наиболее часто используемыми численными методами являются FEM и MoM. При этом главное преимущество MoM заключается в том, что при его использовании не требуется ограничения расчетной области искусственной поверхностью, как того требуют, например, FDM и FEM, что, в конечном счете, приводит к уменьшению требуемых вычислительных затрат.

При моделировании МПЛП с использованием численных методов и соответствующих программных средств требуется корректное построение ее геометрической модели. Затем, если МПЛП имеет регулярную структуру, вычисляются матрицы ее погонных параметров с последующим анализом работы линии. Известно, что для учета краевых эффектов и достижения наибольшей точности вычисления этих матриц требуется задание достаточно больших (в идеальном случае – бесконечных) расстояний от крайних проводников до краев (торцов) поперечного сечения МПЛП [51–53] (далее – расстояния до удаленных границ). При этом очевидно, что при последовательном удалении этих границ от крайнего проводника их влияние будет нелинейно уменьшаться. Если в аналитических расчетах это, как правило, учитывается априорно, то в численных – задается на этапе построения поперечного сечения линии передачи. Поэтому в одних программных средствах при расчете матриц погонных параметров МПЛП расстояния до удаленных границ задаются пользователем, а в других – выбираются автоматически. Однако это не всегда позволяет добиться точного и экономичного расчета матриц погонных параметров МПЛП, прежде всего емкостной матрицы C [18, 27, 54, 55], что приводит к некаузальным результатам последующего вычисления характеристик линии, особенно при увеличении числа ее проводников [56, 57].

Цель данной работы – рассмотрение особенностей вычисления матриц погонных параметров и характеристик МПЛП с использованием программных средств на основе MoM.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА МАТРИЦ ПЕРВИЧНЫХ ПОГОННЫХ ПАРАМЕТРОВ МПЛП МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

При анализе МПЛП методом моментов рассматривается уравнение Пуассона (или Лапласа) в интегральном виде

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d\Gamma, \quad (1)$$

где σ – поверхностная плотность заряда, \vec{r} и \vec{r}' – точки наблюдения и источника соответственно, $d\Gamma$ – дифференциал по поверхности МПЛП, ε –

Элементы проводник–проводник ($N_C \times N_C$)	Элементы проводник–диэлектрик ($N_C \times N_D$)
Элементы диэлектрик–проводник ($N_D \times N_C$)	Элементы диэлектрик–диэлектрик ($N_D \times N_D$)

Рис. 1. Схематичное представление структуры матрицы \mathbf{S} из (6): N_C – число проводниковых сегментов, а N_D – диэлектрических, $N = N_C + N_D$.

диэлектрическая проницаемость, а $G(\vec{r}, \vec{r}')$ – функция Грина. В данной постановке задачи считаются заданными граничные условия по приложенному напряжению Φ , при этом требуется найти поверхностную плотность заряда σ . Для двумерного случая функция Грина имеет вид [58, 63]

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (2)$$

При наличии в структуре анализируемой МПЛП бесконечной плоскости земли функция Грина за счет зеркальных изображений принимает следующий вид:

$$G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}''|}, \quad (3)$$

где \vec{r}'' – точка мнимого источника по методу зеркальных изображений. Тогда для проводниковых границ выражение (1), при наличии в структуре бесконечной плоскости земли, записывается как

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_C} \sigma(\vec{r}') \left[\ln |\vec{r} - \vec{r}'| - \ln |\vec{r} - \vec{r}''| \right] dl', \quad (4)$$

$$\vec{r} \in L_C,$$

где L_C – контур проводниковых границ, dl' – элемент этого контура, а для диэлектрических границ –

$$0 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \frac{\sigma(\vec{r})}{2\epsilon_0} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \times \int_{L_D} \sigma(\vec{r}') \left[\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{|\vec{r} - \vec{r}''|^2} \right] \vec{n} dl', \quad \vec{r} \in L_D, \quad (5)$$

где L_D – контур диэлектрических границ, \vec{n} – вектор нормали, а ϵ_1 и ϵ_2 – диэлектрические прони-

цаемости с одной (на которую направлен \vec{n}) и другой (от которой направлен \vec{n}) сторон от границ соответственно. С использованием аппарата базисных и тестовых функций выражения (4) и (5) сводятся к матричному уравнению вида

$$\mathbf{S}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Phi} \quad (6)$$

с числом уравнений N (число базисных и тестовых функций, число элементов расчетной сетки) и числом правых частей M (число проводников МПЛП, не считая опорного). Нахождение решения (6) позволяет рассчитать матрицы первичных погонных параметров МПЛП.

Матрица \mathbf{S} из уравнения (6) имеет блочную структуру, схематично представленную на рис. 1. Стоит отметить, что из-за того, что элементы проводник–диэлектрик вычисляются по формуле (4), а такие же элементы диэлектрик–проводник – по формуле (5), матрица \mathbf{S} является несимметричной.

2. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА МАТРИЦ ПЕРВИЧНЫХ ПОГОННЫХ ПАРАМЕТРОВ МПЛП

В квазистатическом приближении электрические характеристики, меняющиеся вдоль отрезков МПЛП длиной dz , характеризуются матрицами первичных погонных параметров \mathbf{R} (Ом/м), \mathbf{L} (Гн/м), \mathbf{C} (Ф/м) и \mathbf{G} (См/м), или кратко $RLCG$ -параметрами [59]. Если необходимость учета потерь в проводниках и диэлектрике отсутствует, то вычисляются только матрицы \mathbf{L} и \mathbf{C} , причем матрица \mathbf{C} является первичной. В противном случае рассчитываются все четыре матрицы, тогда матрицы \mathbf{R} и \mathbf{G} описывают потери в проводниках и диэлектриках соответственно. Матрица \mathbf{G} позволяет учитывать дисперсию (зависимость фазовой скорости от частоты) МПЛП [60]. При этом волновое сопротивление МПЛП описывается комплексной матрицей порядка M , равного числу сигнальных проводников [68]

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}}{\mathbf{G} + j\omega\mathbf{C}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Y}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{C}}}_{\mathbf{R}=\mathbf{G}=0}, \quad (7)$$

где ω – угловая частота, а \mathbf{Z} и \mathbf{Y} – матрицы сопротивлений и проводимостей соответственно.

В результате строгое решение уравнений Максвелла сводится к двум независимым граничным задачам электростатики и магнитостатики, определяющим поведение поперечных электрических и магнитных компонент поля соответственно [61]. При этом решение первой задачи дает матрицы \mathbf{C} и \mathbf{G} , а второй – \mathbf{L} и \mathbf{R} [62]. Для экономии вычислительных затрат часто прибегают только к решению электростатической задачи,

а по алгоритму расчета емкостной матрицы вычисляют \mathbf{L} и \mathbf{R} [63]. Так, матрица \mathbf{L} может быть вычислена следующим образом [25]:

$$\mathbf{L} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{C}_0^{-1}, \quad (8)$$

где \mathbf{C}_0 – емкостная матрица для структуры без границ диэлектрик–диэлектрик (линия с воздушным заполнением), а μ_0 и ϵ_0 – магнитная и электрическая постоянные соответственно. Для вычисления матрицы \mathbf{G} используется та же модель, что и для матрицы \mathbf{C} , с той лишь разницей, что действительная диэлектрическая проницаемость ϵ заменяется комплексной $\hat{\epsilon}$ с использованием тангенса угла диэлектрических потерь δ , при этом для каждой границы поперечного сечения МПЛП [64, 65]

$$\hat{\epsilon} = \epsilon(1 - j \operatorname{tg}(\delta)). \quad (9)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} + c_{12} + \dots + c_{1M} & -c_{12} & \dots & -c_{1M} \\ -c_{21} & c_{21} + c_{22} + \dots + c_{2M} & \dots & -c_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_{M1} & -c_{M2} & \dots & c_{M1} + c_{M2} + \dots + c_{MM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1M} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{M1} & C_{M2} & \dots & C_{MM} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где c_{ij} – частичная емкость между проводниками i и j , ($i \neq j$), а c_{ii} – собственная частичная емкость проводника i . Матрица \mathbf{C} описывает частичные емкостные связи между всеми проводниками МПЛП, в том числе удаленными, и позволяет оценивать их взаимовлияние, проявляющееся в передаче электромагнитной энергии между ними. Дополнительный точный учет индуктивных связей, описываемых матрицей \mathbf{L} , позволяет повысить точность моделирования в целом.

Отметим особенности матрицы \mathbf{C} , позволяющие судить о точности ее расчета. Во-первых, она должна быть симметричной относительно главной диагонали. Однако при использовании МоМ, из-за различия в базисных и тестовых функциях, дающего ошибки округления, небольшая асимметрия допустима [29]. Во-вторых, она должна иметь диагональное преобладание, т.е. каждый диагональный элемент матрицы должен быть по абсолютному значению больше суммы всех остальных элементов соответствующей строки (столбца) [1]. Выполнение этого условия необходимо для физического представления схемной емкостной матрицы (матрицы собственных и взаимных частичных емкостей), используемой, например, в SPICE-моделировании [68]. В-третьих, все ее диагональные элементы должны быть положительными, а внедиагональные – отрицательными [18]. В-четвертых, она должна быть положительно определенной (собственные значения матрицы должны быть положительны) [1]. Так, например, значительная асимметрия внедиагональных элементов матрицы сигнализирует о некачественной расчетной сетке

Поскольку наиболее вычислительно сложной задачей является нахождение матрицы \mathbf{C} , точный и быстрый ее расчет является одним из важных этапов при моделировании [66, 67]. Отметим, что эту матрицу коэффициентов электростатической индукции [18] в различных работах называют также емкостной матрицей Максвелла, статической емкостной матрицей, узловой емкостной матрицей и погонной емкостной матрицей [5, 7, 68–71]. В данной работе она называется просто “емкостной матрицей”. Подробное обоснование структуры этой матрицы приведено, например, в [1, https://www.fastfieldsolvers.com/Papers/The_Maxwell_Capacitance_Matrix_WP110301_R02.pdf]. Она имеет следующий вид:

[54, 72], а наличие положительных элементов и отсутствие диагонального преобладания в матрице – о недостаточной точности выбранного метода расчета из-за наличия в структуре комбинации сильных и слабых электростатических связей между проводниками или наличием больших ошибок округления из-за плохой обусловленности матричного уравнения [30, 55, 73]. Поэтому невыполнение этих условий оказывает значительное влияние на физичность результатов последующих расчетов. Для микрополосковых МПЛП с одинаковыми проводниками, расположенными на одном уровне над диэлектрической подложкой, есть еще одно условие: значения внедиагональных элементов матрицы \mathbf{C} по мере удаления от диагонального должны уменьшаться [33].

3. ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК МПЛП

Согласно теории цепей, напряжения \mathbf{v} и токи \mathbf{i} в МПЛП, ориентированной вдоль оси z , описываются телеграфными уравнениями или волновыми уравнениями [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{v}(z) = \mathbf{ZYv}(z) = [(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + j\omega\mathbf{C})] \mathbf{v}(z), \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{i}(z) = \mathbf{YZi}(z) = [(\mathbf{G} + j\omega\mathbf{C})(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L})] \mathbf{i}(z). \quad (12)$$

Эти уравнения позволяют учесть все моды Т-волны, распространяющиеся в МПЛП. Так, в M -проводной линии передачи могут распространяться

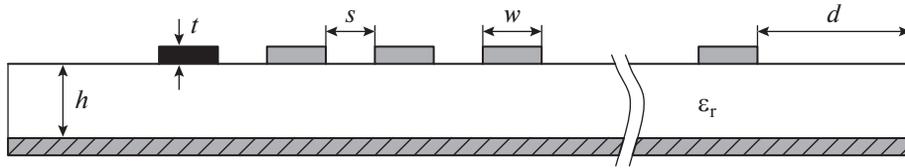


Рис. 2. Обобщенное поперечное сечение меандровой линии задержки.

M мод, каждая из которых имеет свой импеданс и скорость, что в конечном счете влияет на происходящие в линии явления. Так, например, в работе [74] теоретически и экспериментально показано, что при функционировании современных высокоскоростных межсоединений на основе МПЛП часто наблюдается расщепление полезных импульсных сигналов на несколько субимпульсных пачек с M импульсов в каждой. Поэтому для решения (11) и (12) широкое распространение получил подход, основанный на модальном анализе, который позволяет без потери точности рассматривать МПЛП как набор одиночных линий передачи, каждая из которых распространяет волны модальных напряжений и модальных токов [75].

При модальном анализе без учета потерь в проводниках и диэлектрике используются диагональные матрицы модальных индуктивностей и емкостей \mathbf{L}_m и \mathbf{C}_m , которые определяются как

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{S}_v^{-1} \mathbf{L} \mathbf{S}_i, \quad (13)$$

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{S}_i^{-1} \mathbf{C} \mathbf{S}_v, \quad (14)$$

где столбцы матриц \mathbf{S}_v и \mathbf{S}_i — это собственные векторы произведения матриц $\mathbf{L}\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}\mathbf{L}$, а соответствующие им собственные значения — это погонные задержки мод, распространяющиеся в МПЛП, возведенные в квадрат. Матрицы \mathbf{L}_m и \mathbf{C}_m необходимы для преобразования линейных напряжений и токов (\mathbf{v} , \mathbf{i}) в модальные (\mathbf{v}_m , \mathbf{i}_m):

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{S}_v^{-1} \mathbf{v}, \quad (15)$$

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{S}_i^{-1} \mathbf{i}. \quad (16)$$

Элементы матриц \mathbf{L}_m и \mathbf{C}_m используются для вычисления волновых сопротивлений МПЛП

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{L_{m11}/c_{m11}} \\ \sqrt{L_{m22}/c_{m22}} \\ \dots \\ \sqrt{L_{mNN}/c_{mNN}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

и скорости распространения для каждой моды T -волны

$$\mathbf{v}_{pm} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{L_{m11}c_{m11}} \\ 1/\sqrt{L_{m22}c_{m22}} \\ \dots \\ 1/\sqrt{L_{mNN}c_{mNN}} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Из-за плотной компоновки проводников в современных печатных платах возникают перекрестные помехи, которые могут вызвать резкое ухудшение общей временной задержки и даже привести к ложному переключению логических элементов схемы [12, 13, 76]. Продемонстрируем это на примере меандровой линии задержки из работы [13], варьируя число полувитков меандра M (число проводников в поперечном сечении линии) от 1 (прямая линия) до 7. При этом общая длина линии при всех M составляла 0.375 м. На рис. 2 приведен общий вид поперечного сечения такой линии задержки, а на рис. 3 — схемы подключения при разных значениях M (сопротивления R_1 и R_2 приняты по 50 Ом). Параметры линий: ширина проводников $w = 1.6$ мм; расстояние между проводниками $s = 0.5w = 0.8$ мм; толщина проводников $t = 0.05$ мм; толщина диэлектрического слоя $h = 1.5$ мм; относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_r = 4.3$. Отметим, что расстояние до удаленных границ в работе [13] не приведено.

При проектировании таких линий надо учитывать емкостную связь не только с близко расположенными, но и с существенно удаленными (в поперечном сечении) проводниками, для чего требуется расчет матриц \mathbf{C} и \mathbf{L} с контролируемой точностью.

В программном средстве PathWave ADS (далее — ADS) произведено вычисление матриц \mathbf{L} (нГн/м) и \mathbf{C} (пФ/м) для данных линий при $M = 1 \dots 7$. Для наглядности далее приведены эти матрицы при $M = 1, 2, 3$ и 7:

$$\mathbf{L}_1 = 400.15, \quad \mathbf{C}_1 = 85.63;$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 392.51 & 111.24 \\ 111.24 & 392.51 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 90.08 & -16.96 \\ -16.96 & 90.08 \end{bmatrix};$$

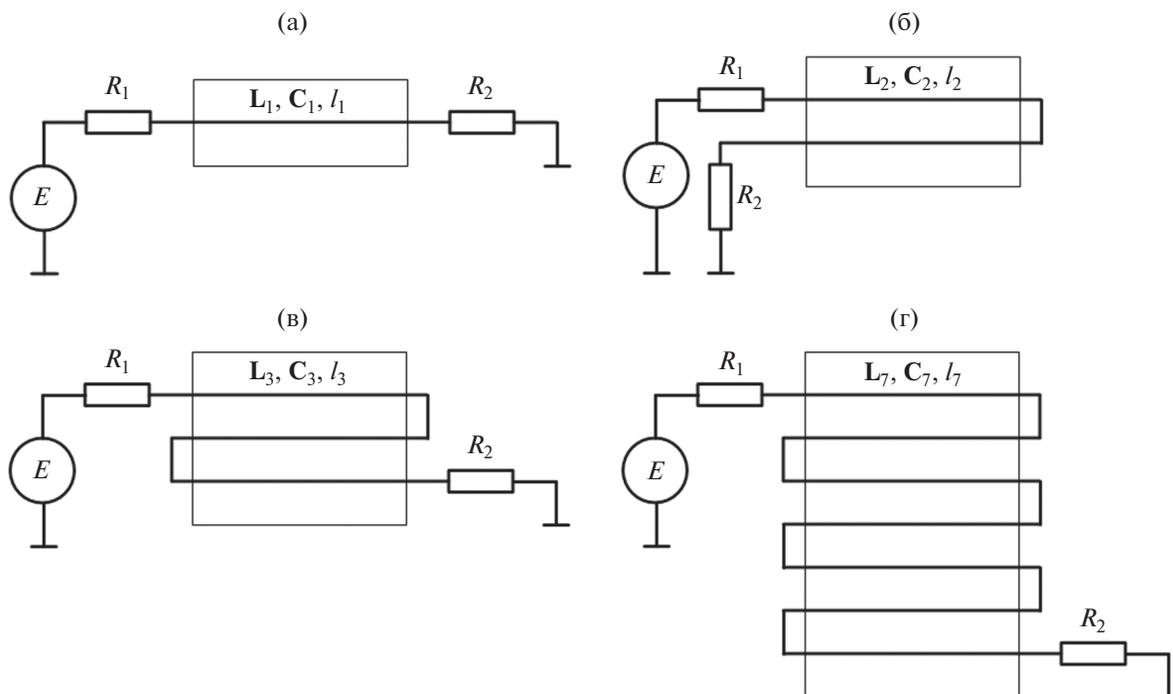


Рис. 3. Схемы подключения линий задержки из рис. 2 при $M = 1$ (а), 2 (б), 3 (в) и 7 (г).

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 391.85 & 109.06 & 42.82 \\ 109.06 & 385.17 & 109.06 \\ 42.82 & 109.06 & 391.85 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 90.09 & -16.77 & -0.95 \\ -16.77 & 94.45 & -16.77 \\ -0.95 & -16.77 & 90.09 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_7 = \begin{bmatrix} 391.98 & 108.78 & 41.64 & 19.72 & 10.96 & 6.86 & 4.73 \\ 108.78 & 384.39 & 106.54 & 40.81 & 19.36 & 10.80 & 6.86 \\ 41.64 & 106.54 & 383.72 & 106.30 & 40.72 & 19.36 & 10.96 \\ 19.72 & 40.81 & 106.30 & 383.64 & 106.30 & 40.81 & 19.72 \\ 10.96 & 19.36 & 40.72 & 106.30 & 383.72 & 106.54 & 41.64 \\ 6.86 & 10.80 & 19.36 & 40.81 & 106.54 & 384.39 & 108.78 \\ 4.73 & 6.86 & 10.96 & 19.72 & 41.64 & 108.78 & 391.98 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_7 = \begin{bmatrix} 90.44 & -16.95 & -0.85 & -0.33 & -0.18 & -0.12 & -0.09 \\ -16.95 & 94.92 & -16.77 & -0.79 & -0.29 & -0.16 & -0.12 \\ -0.85 & -16.77 & 94.92 & -16.77 & -0.79 & -0.29 & -0.18 \\ -0.33 & -0.79 & -16.77 & 94.92 & -16.77 & -0.79 & -0.33 \\ -0.18 & -0.29 & -0.79 & -16.77 & 94.92 & -16.77 & -0.85 \\ -0.12 & -0.16 & -0.29 & -0.79 & -16.77 & 94.92 & -16.95 \\ -0.09 & -0.12 & -0.18 & -0.33 & -0.85 & -16.95 & 90.44 \end{bmatrix}.$$

С использованием этих матриц вычислены отклики на выходе линий задержки при подаче на их вход трапецидального импульса с амплитудой ЭДС 1 В. Длительности фронтов и плоской вершины составляли 0.1 и 10 нс соответственно.

Отклики на выходе линий, рассчитанные в ADS, приведены на рис. 4. Как видно из рисунка, при увеличении числа витков линии задержки отклик на ее конце существенно изменяется. Так, на отклик влияют перекрестные помехи от сосед-

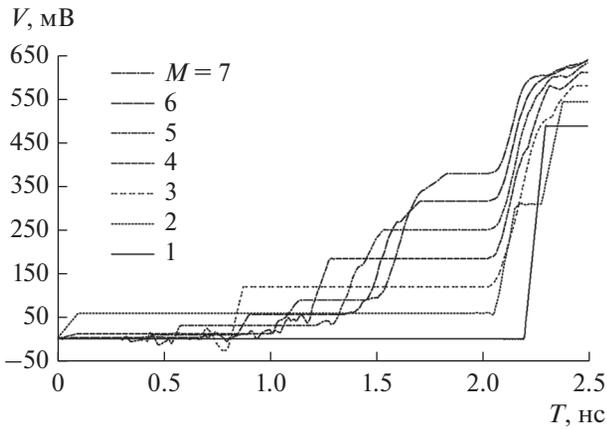


Рис. 4. Отклики на выходе линий задержки из рис. 2 при $w/h = 1.067$, $s = 0.5w$ и $M = 1, \dots, 7$.

них полувитков, что приводит к искажению формы полезного сигнала на выходе линии. Такие искажения могут привести к превышению пороговых уровней срабатывания логических элементов и тем самым их более раннему переключению. Например, для МПЛП при $M = 1$ значение напряжения

0.3 В получено при 2.25 нс, а если $M = 7$, то при 1.65 нс.

Распространенным визуальным индикатором качества сигналов в высокоскоростных цифровых системах передачи данных являются глазковые диаграммы. Продемонстрируем искажения глазковых диаграмм при увеличении числа полувитков исследуемой линии задержки.

На вход линии подавалась битовая последовательность длиной 10000 бит, полученная с использованием 8-битного регистра сдвига с линейной обратной связью. Амплитуда логической единицы составляла 1 В, логического нуля – 0 В. Длительность фронтов составляла 100 пс при битрейте 1 Гб/с.

Полученные глазковые диаграммы при $M = 1, 2, 3$ и 7 приведены на рис. 5. Из рисунка видно, что форма “глаза” при увеличении числа полувитков существенно искажается, что может привести в том числе к ложному переключению логических элементов схемы.

Как уже было отмечено ранее, одним из способов уменьшения перекрестных помех является пространственное разнесение проводников. Для

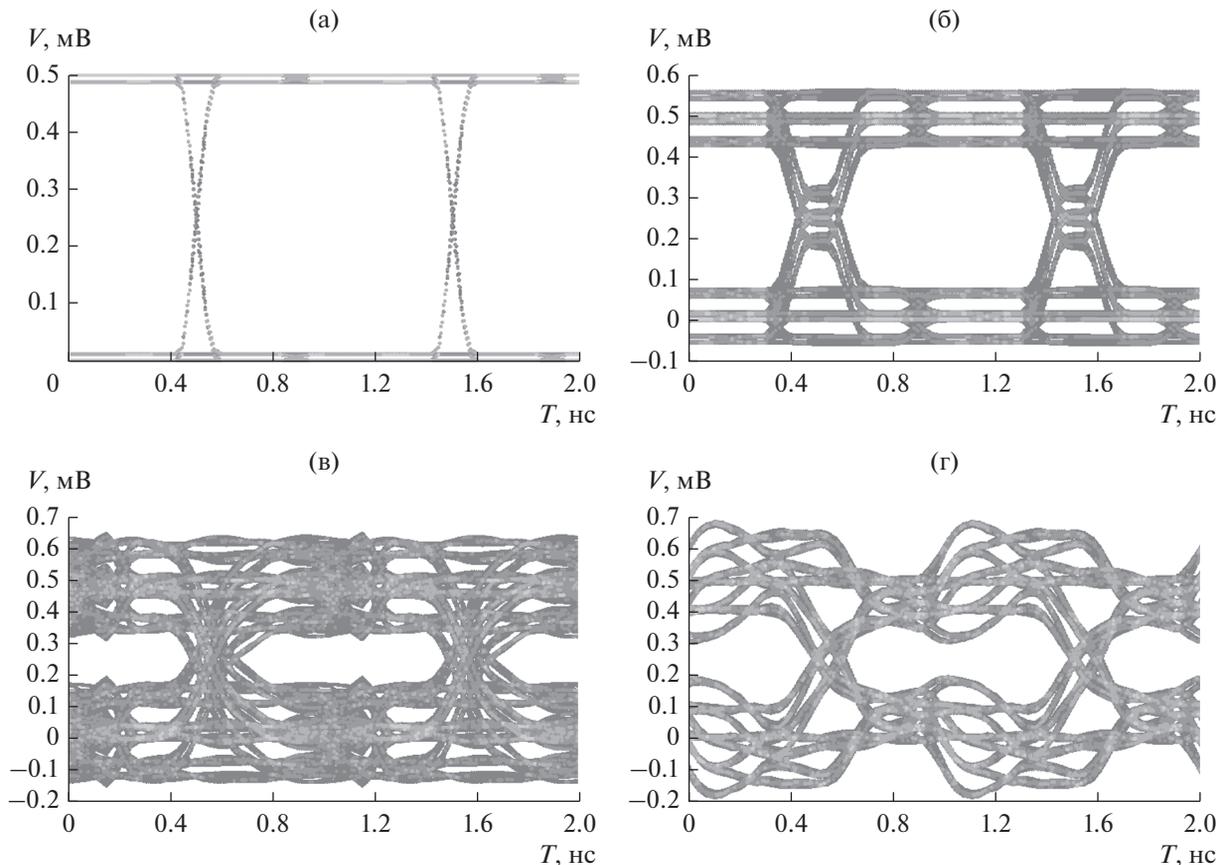


Рис. 5. Глазковые диаграммы для линий задержки из рис. 2 при $M = 1$ (а), 2 (б), 3 (в) и 7 (г).

наглядности на рис. 6 приведены аналогичные отклики в конце линий при увеличенном в 6 раз расстоянии между проводниками s , с $0.5w$ до $3w$

($s = 4.8 \text{ мм} \approx 3h$). Видно, что искажения сигнала значительно уменьшились. При этом матрицы имеют вид

$$L_7 = \begin{bmatrix} 400.7 & 21.02 & 5.54 & 2.47 & 1.39 & 0.89 & 0.62 \\ 21.02 & 400.6 & 21.0 & 5.53 & 2.46 & 1.39 & 0.89 \\ 5.54 & 21.0 & 400.6 & 21.0 & 5.53 & 2.46 & 1.39 \\ 2.47 & 5.53 & 21.0 & 400.6 & 21.0 & 5.53 & 2.47 \\ 1.39 & 2.46 & 5.53 & 21.0 & 400.6 & 21.0 & 5.54 \\ 0.89 & 1.39 & 2.46 & 5.53 & 21.0 & 400.6 & 21.02 \\ 0.62 & 0.89 & 1.39 & 2.47 & 5.54 & 21.02 & 400.7 \end{bmatrix} \text{ нГн/м,}$$

$$C_7 = \begin{bmatrix} 85.89 & -1.19 & -0.19 & -0.08 & -0.04 & -0.023 & -0.024 \\ -1.19 & 85.91 & -1.18 & -0.19 & -0.08 & -0.04 & -0.023 \\ -0.19 & -1.18 & 85.91 & -1.18 & -0.19 & -0.08 & -0.04 \\ -0.08 & -0.19 & -1.18 & 85.91 & -1.18 & -0.19 & -0.08 \\ -0.04 & -0.08 & -0.19 & -1.18 & 85.91 & -1.18 & -0.19 \\ -0.023 & -0.04 & -0.08 & -0.19 & -1.18 & 85.91 & -1.19 \\ -0.024 & -0.023 & -0.04 & -0.08 & -0.19 & -1.19 & 85.89 \end{bmatrix} \text{ пФ/м.}$$

Следует отметить, что значение C_{17} полученной емкостной матрицы превышает значение C_{16} , что является нарушением одного из критериев, приведенных в разд. 2. Это можно объяснить некорректной сегментацией или недостаточным расстоянием до удаленных границ линии. Однако ни используемая сегментация, ни это расстояние пользователем ADS не могут быть определены или скорректированы.

При измененном расстоянии s также были построены глазковые диаграммы. В табл. 1 приведены их численные характеристики (высота и ширина “глаза”, джиттер) в зависимости от числа полувитков линии и величины s . Из таблицы видно,

что при увеличении расстояния s форма “глаза” искажается существенно меньше, даже при большем числе полувитков.

Характеристики МПЛП определяются с использованием матриц C и L . Тогда при моделировании высокоскоростных цифровых систем очень важно убедиться в возможности корректной передачи всех возможных при дальнейшей эксплуатации линии сигналов.

Для крайних случаев исследованных линий задержки ($M = 1$ и 7 , $s = 0.5w$ и $3w$) дополнительно вычислены отклики (рис. 7) при подаче на их вход трапецеидального импульса с амплитудой ЭДС

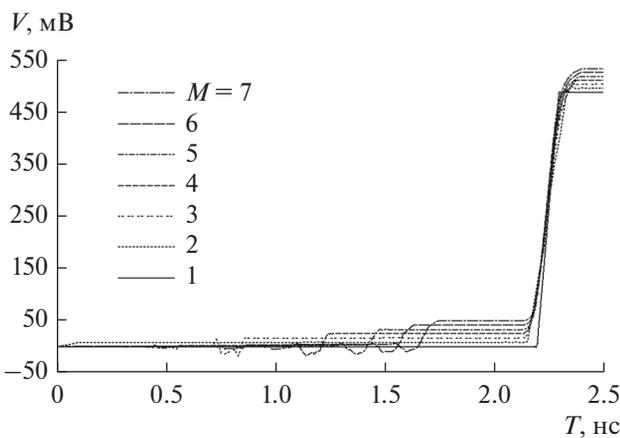


Рис. 6. Отклики на выходе линий задержки из рис. 2 при $w/h = 1,067$, $s = 3w$ и $M = 1, \dots, 7$.

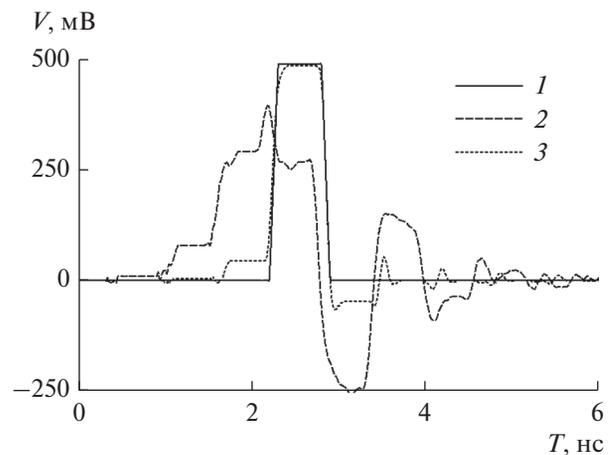


Рис. 7. Отклики на выходе линий задержки из рис. 2 при: $M = 1$ (кривая 1); $M = 7, s = 0.5w$ (кривая 2); $M = 7, s = 3w$ (кривая 3).

Таблица 1. Численные характеристики глазковых диаграмм для линии задержки из рис. 2 в зависимости от числа полувитков линии и величины s

Число полувитков	Высота “глаза”				Ширина “глаза”				Джиттер			
	$s = 0.5w$	$s = w$	$s = 2w$	$s = 3w$	$s = 0.5w$	$s = w$	$s = 2w$	$s = 3w$	$s = 0.5w$	$s = w$	$s = 2w$	$s = 3w$
1	0.475				1.000				6.94×10^{-18}			
2	0.351	0.405	0.445	0.459	0.835	0.890	0.965	0.995	3.04×10^{-11}	2.87×10^{-11}	9.64×10^{-12}	2.50×10^{-12}
3	0.120	0.248	0.334	0.374	0.835	0.910	0.970	0.975	5.15×10^{-11}	2.75×10^{-11}	9.05×10^{-12}	6.84×10^{-12}
4	<0.001	0.189	0.343	0.399	0.145	0.905	0.950	0.970	2.63×10^{-10}	3.62×10^{-11}	1.34×10^{-11}	8.86×10^{-12}
5	0.051	0.142	0.334	0.405	0.320	0.980	0.980	0.990	2.06×10^{-10}	6.11×10^{-12}	5.21×10^{-12}	3.22×10^{-12}
6	0.161	0.232	0.307	0.367	0.500	0.915	0.985	0.990	1.59×10^{-10}	2.65×10^{-11}	4.49×10^{-12}	2.74×10^{-12}
7	0.107	0.362	0.301	0.359	0.875	0.760	0.985	0.995	4.60×10^{-11}	1.02×10^{-10}	5.81×10^{-12}	2.49×10^{-12}

1 В и длительностями фронтов и плоской вершины 0.1 и 0.5 нс соответственно. Как видно из рис. 7, при $s = 0.5w$ форма импульса существенно искажается, в то время как при $s = 3w$ формы импульсов при $M = 1$ и 7 отличаются незначительно.

4. КОРРЕКТНЫЙ ВЫБОР УДАЛЕННЫХ ГРАНИЦ

Исследовано, как на точность расчета емкостной матрицы \mathbf{C} влияет расстояние до удаленных границ МПЛП d . Известно, что примерно 50% электрических и магнитных полей концентрируется между прямым и возвратным проводниками микрополосковых МПЛП, а оставшиеся 50% рас-

пространяются в окружающей среде и определяют краевые эффекты [7]. Тогда электрические поля в МПЛП должны распространяться бесконечно далеко, что невозможно, поскольку требуется неограниченная расчетная область и, соответственно, вычислительные затраты. Поэтому самый простой подход — это расширение расчетной области достаточно далеко настолько, чтобы потенциальное влияние конечных удаленных границ на форму поля стало пренебрежимо малым [77].

Для наглядности на рис. 8 приведено распределение электрического поля в поперечном сечении линии из рис. 2 при $M = 7$: расстояния до боковых и верхней стенок экрана $5h$ и $10h$ (а) и до всех стенок $15h$ (б).

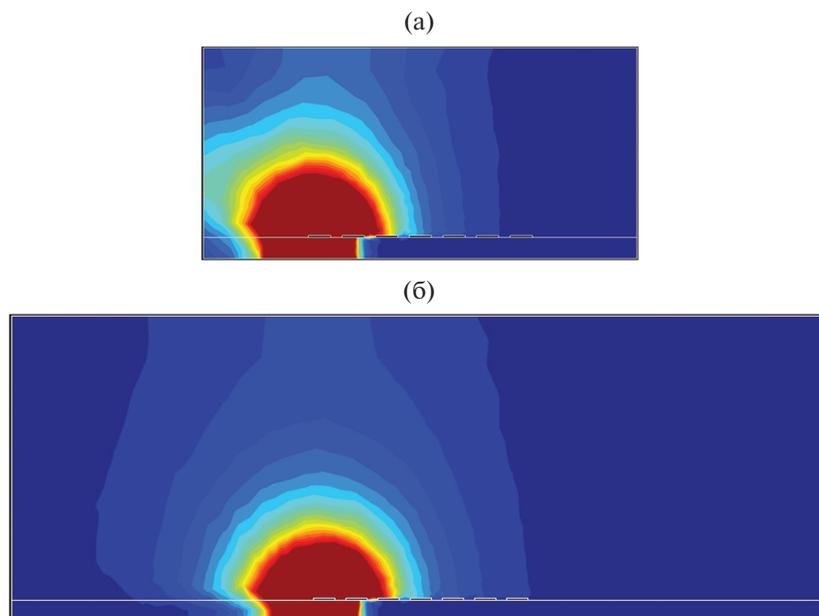


Рис. 8. Распределение электрического поля в поперечном сечении линии из рис. 2 при $M = 7$: расстояния до боковых и верхней стенок экрана $5h$ и $10h$ (а) и до всех стенок $15h$ (б).

Таблица 2. Результаты (первая строка матрицы C , пФ/м) для линии задержки из рис. 2 при $M = 14$ в CONMТL, $d = 5h$

C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{110}	C_{111}	C_{112}	C_{113}	C_{114}
83.07	-14.78	-0.79	-0.29	-0.15	-0.0876	-0.0532	-0.0322	-0.0181	-0.008	-0.00009	0.0066	0.0131	0.0254

гали на расстоянии $5h$ от крайних проводников, а верхнюю часть – на расстоянии $10h$. Как видно из рис. 8а, близость экрана значительно искажает картинку поля, а при удалении границ экрана на расстояние $15h$ (рис. 8б), влияние на результирующую картину поля существенно уменьшается. Поэтому важной задачей становится возможность априорного выбора оптимального расстояния d , дающего точный и экономичный алгоритм расчета емкостной матрицы. Это позволит разработать математическую модель для рационального выбора расстояния до удаленных границ. Модель можно использовать для обучения, например, нейронных сетей, после чего станет возможным автоматически выбирать это расстояние до удаленных границ для требуемой конфигурации МПЛП, не прибегая к многократному перебору.

Единый подход к рациональному заданию удаленных границ, к сожалению, отсутствует. По всей видимости, для неэкранированных микрополосковых МПЛП на практике чаще всего используется соотношение $d = 3...5h$, где h – толщина диэлектрической подложки. В работах [18, 78] для таких линий рекомендуется использовать соотношение $d = 5h$, а для экранированных МПЛП – $d = H$, где H – высота всей структуры. При этом известны и другие соотношения. Так, в программном средстве LINPAR, если расстояние d не задано, то оно рассчитывается как тройная полная высота H линии передачи ($d = 3H$). В CST PCB Studio, согласно онлайн-руководству (https://space.mit.edu/RADIO/CST_online/mergedProjects/3D/special_overview/special_overview_waveguideover.htm), для одиночных линий рекомендуется использовать соотношение $d = 3...15h$ в зависимости от отношения w/h (w – ширина проводников) и величины относительной диэлектрической проницаемости подложки ϵ_r . В программном средстве CONMТL расстояние d в явном виде не задается, а ширина всей структуры определяется автоматически как $8h$, но поскольку на практике это соотношение часто не применимо, то имеется возможность ее изменения пользователем и тем самым задания расстояния d . В ADS ширина структуры выбирается автоматически (по неизвестным авторам соотношениям). В других программных средствах, основанных на МоМ, выбор расстояния d при построении геометрической модели поперечного сечения анализируемой МПЛП чаще всего зависит от пользователя, как сделано, например, в FasterCap и TALGAT.

Важно отметить, что задание расстояния до удаленных границ МПЛП по указанным соотношениям не ставится в зависимость от числа ее проводников. Действительно, для МПЛП с числом проводников до 8 соотношение $d = 3...5h$ часто дает точные результаты. Однако на практике из-за постоянного усложнения межсоединений, роста частот и уменьшения уровней сигналов, используемых в том числе в высокоскоростных печатных платах, все чаще требуется расчет емкостных матриц с большим числом проводников, для которых указанные соотношения не всегда дают точные результаты.

Как показано в разд. 3, даже при $M = 7$ могут не выполняться критерии, приведенные в разд. 2. При этом увеличение числа проводников может еще больше усугубить ситуацию. Так, в программном средстве CONMТL при использовании стандартных настроек рассчитана емкостная матрица линии задержки (см. рис. 2) при $M = 14$ и $d = 5h$ (табл. 2). Полученная матрица обладает диагональным преобладанием, однако, как видно из таблицы, элементы $C_{112}–C_{114}$ имеют положительные значения и последовательно увеличиваются по модулю, чего для микрополосковых МПЛП, как указано в разд. 2 и показано в [33], не должно быть. Поэтому при увеличении числа проводников МПЛП соотношение $d = 3...5h$ не всегда корректно и требует уточнения.

5. КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТОВ

При численном моделировании неизбежна погрешность решения, складывающаяся из погрешностей: выбранного математического метода, математического описания моделируемой структуры и округления [79]. Первая из них является известной, и поэтому контролируемой, чего нельзя сказать о второй из них, так как математическая модель всегда будет отличаться от реального физического объекта. Третья погрешность напрямую связана с машинной точностью вычислений. Поскольку в современных программных средствах числа хранятся в памяти в представлении с плавающей точкой, она не является высокой и может быть оценена достаточно точно.

При решении матричного уравнения (6) на погрешности округления влияет обусловленность матрицы S . Так, известно, что точно (без погрешности округления) гарантированно можно получить $(l - p)$ знаков в Σ , если при расчете матрицы S точно известно не менее l знаков и число ее обу-

словленности $\text{cond}(\mathbf{S})$ имеет порядок $O(10^9)$ [79]. При этом величина l зависит скорее не от машинной точности, а от максимальной точности в используемом программном средстве (и чаще всего даже от используемого при вычислениях типа данных). Для чисел двойной точности под мантиссу числа выделяется 52 бита, что в десятичной системе счисления соответствует 16-значному числу, т.е. $l = 16$ [80].

Поскольку, как показано в разд. 4, часто используемое для задания расстояния до удаленных границ МПЛП соотношение $d = 3...5h$ требует уточнения, для разных МПЛП выполнены вычислительные эксперименты по выявлению минимальных значений расстояния d , дающих точный и экономичный расчет емкостных матриц \mathbf{C} с оценкой обусловленности итогового матричного уравнения (6). Здесь под минимальным понимается расстояние, при котором выполняются все критерии из разд. 2, и его увеличение от итерации к итерации дает требуемое различие в элементах матрицы \mathbf{C} .

Для интегральной оценки различий в емкостных матрицах, полученных на соседних итерациях, часто используется аппарат матричных норм, а именно норма Фробениуса [81]:

$$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{\sum |C_{ij}|^2}, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, M. \quad (19)$$

Тогда различие двух матриц \mathbf{C}^I и \mathbf{C}^{II} оценивается как

$$\Delta C_F = \frac{\|\mathbf{C}^I - \mathbf{C}^{II}\|_F}{\|\mathbf{C}^I\|_F}. \quad (20)$$

Также сходимость матриц может быть оценена по разнице их элементов, расположенных на главных диагоналях:

$$\Delta C = \frac{|C_{ii}^I - C_{ii}^{II}|}{|C_{ii}^I|}, \quad i = 1, \dots, M, \quad (21)$$

как сделано, например, в [33, 82].

Поскольку погрешность определения внедиагональных элементов матрицы \mathbf{C} , как правило, существенно больше диагональных (различия около 25%) [63], а удаленные от главной диагонали элементы часто различаются на несколько порядков, также целесообразно оценивать поэлементные внедиагональные различия:

$$\Delta C' = \frac{|C_{ij}^I - C_{ij}^{II}|}{|C_{ij}^I|}, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, M, \quad i \neq j. \quad (22)$$

Далее в работе требуемое различие в матрицах на соседних итерациях считалось достигнутым при ΔC_F и ΔC менее 1% (аналогично [83]), а $\Delta C'$ – 10% или 25%.

6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

На точность результатов моделирования при использовании численных методов (в том числе МоМ) существенно влияет расчетная сетка. Неверно подобранная сетка может как существенно понизить точность результатов, так и увеличить вычислительную сложность. Из-за обширности этой темы, вычислительным сеткам посвящены другие работы авторов [33, 84], а в данной работе, если не сказано иное, используются вычислительные сетки, заданные в программах по умолчанию.

Стоит отметить, что часто последовательным учащением расчетной сетки удается добиться результатов, удовлетворяющих критериям из разд. 2. Однако для множества сочетаний геометрических параметров разнообразных линий передачи таких результатов получить не удается.

Для доказательства этого утверждения рассмотрена восьмипроводная микрополосковая линия передачи с поперечным сечением, соответствующим рис. 2 и параметрами: $w = 0.5$ мм; $s = 0.4$ мм; $t = 0.1$ мм; $h = 1$ мм; $d = 5$ мм ($d = 5h$); $\epsilon_r = 4.4$. В табл. 3 приведены первые строки матрицы \mathbf{C} , рассчитанные в GNU Octave (далее – Octave),

Таблица 3. Результаты (первые строки матрицы \mathbf{C} , пФ/м) для линии с поперечным сечением из рис. 2 при $M = 8$ в Octave

d	l	N	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}
5h	t/3	1742	70.16	-19.82	-1.54	-0.43	-0.22	-0.15	-0.11	-0.112
	t/5	2902	70.41	-19.96	-1.56	-0.43	-0.23	-0.15	-0.112	-0.113
	t/9	5222	70.56	-20.05	-1.56	-0.44	-0.23	-0.15	-0.113	-0.114
	t/13	7542	70.62	-20.08	-1.57	-0.44	-0.23	-0.15	-0.113	-0.115
	t/17	9862	70.64	-20.10	-1.57	-0.44	-0.23	-0.15	-0.114	-0.115
	t/21	12182	70.97	-19.98	-1.54	-0.44	-0.23	-0.15	-0.114	-0.116
7h	t/3	2102	70.17	-19.82	-1.54	-0.42	-0.22	-0.14	-0.105	-0.104
	t/5	3502	70.42	-19.95	-1.55	-0.43	-0.22	-0.15	-0.107	-0.106

Примечание: l – длина сегментов.

Таблица 4. Результаты (первые строки матрицы C , пФ/м) для МПЛП 1 в программных средствах

Источник	d	N	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{10}
ADS	н.д.*	н.д.	91.74	-8.37	-1.35×10^{-1}	-1.99×10^{-3}	-7.51×10^{-3}	-7.78×10^{-3}	-7.78×10^{-3}	-7.75×10^{-3}	-7.74×10^{-3}	-8.49×10^{-3}
FasterCap	$3h \approx H$	1394	96.7	-9.65	-3.01×10^{-1}	3.23×10^{-2}	1.43×10^{-2}	4.87×10^{-3}	5.29×10^{-3}	-2.03×10^{-3}	$-2.02e \times 10^{-2}$	1.66×10^{-2}
TALGAT	$3h \approx H$	3370	97.65	-9.95	-1.43×10^{-1}	-5.15×10^{-3}	-2.14×10^{-4}	-8.98×10^{-6}	-3.78×10^{-7}	-1.76×10^{-8}	-4.27×10^{-8}	-1.78×10^{-6}
Octave	$3h \approx H$	3370	98.18	-9.99	-1.42×10^{-1}	-5.06×10^{-3}	-2.09×10^{-4}	-8.8×10^{-6}	-4.21×10^{-7}	-6.4×10^{-8}	-8.74×10^{-8}	-1.98×10^{-6}

* н.д. — нет данных.

число сегментов расчетной сетки N и их длина l . Как видно из таблицы, при соотношении $d = 5h$ учащение расчетной сетки даже в 7 раз (до $l = t/21$) не исправило ситуацию, и элемент C_{18} превышает C_{17} , что приводит к невыполнению одного из критериев разд. 2. В то же время при увеличении d до $7h$, все критерии из разд. 2 выполняются, что еще раз подтверждает утверждение, что соотношение $d = 3...5h$ требует уточнения.

Для оценки влияния расстояния до удаленных границ d на точность и экономичность расчетов емкостной матрицы рассмотрено несколько МПЛП с различным числом слоев и проводников.

Первоначально рассмотрена десятипроводная экранированная микрополосковая линия передачи из [82] (далее — МПЛП 1), поперечное сечение которой приведено на рис. 9. Ее параметры: $w = 0.05$ мм; $s = 0.05$ мм; $t = 0.005$ мм; $h_1 = h_2 = h_3 = h = 0.05$ мм; $d = 0.15$ мм ($d = 3h$); $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 3.8$; $\epsilon_{r2} = 2$. Как показано в [32], в таких МПЛП при числе проводников 8 и более часто возникают неточности при расчете матрицы C . Так, в табл. 4 приведены первые строки этой матрицы, рассчитанные различными программными средствами на основе МоМ (результаты в LINPAR и CONMTL не были получены из-за ограничений в них в части числа задаваемых проводников МПЛП и диэлектрических слоев соответственно). В таблице также приведено число сегментов расчетной сетки N . Во всех программных средствах расчет производился со стандартными настройками. В Octave использовалась авторская реализация математической модели, описанной в разд. 1. В TALGAT и

Octave для исключения влияния расчетной сетки на точность результатов моделирования использовалась плотная равномерная сегментация с длиной сегментов $t/3$, аналогично [82].

Как видно из табл. 4, не все результаты, полученные в программных средствах, удовлетворяют критериям из разд. 2 (выделены полужирным шрифтом). Так, в TALGAT и Octave абсолютные значения C_{19} и C_{110} превышают значение C_{18} , что априори недопустимо для данного типа МПЛП. Кроме того, различие в элементах, например C_{110} , составляет до четырех порядков в разных программных средствах. Наконец, элементы $C_{14} - C_{17}$ и C_{110} в программном средстве FasterCap имеют положительные значения. Эти результаты еще раз подтверждают утверждение, что использование соотношения $d = 3h$ для микрополосковых МПЛП приводит к неточным результатам расчета. В работе [32] показано, что для таких структур МПЛП выбор подходящей расчетной сетки часто позволяет получать точные емкостные матрицы, однако подбор такой сетки не всегда возможен, особенно при некорректном задании расстояний до удаленных границ МПЛП.

В Octave выполнены расчеты емкостной матрицы МПЛП 1 при $d = 0.5h, h, \dots, 10h$ и $d = 0.5H, H, \dots, 10H$ и равномерной сегментации с длиной сегментов $t/3$ для выявления минимальных значений расстояния d . Отметим, что для исходной геометрии МПЛП 1 выполняются соотношения $d = 3h \approx H$.

В табл. 5 приведены результаты при выявленных минимальных значениях d , при которых вы-

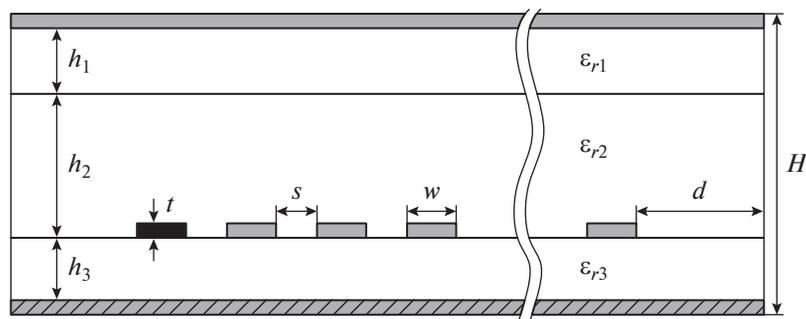


Рис. 9. Поперечное сечение МПЛП 1.

Таблица 5. Результаты (первые строки матрицы C , пФ/м) для МПЛП 1 при изменении расстояния d в Octave

d	N	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{110}
$9h \approx 3H$	7208	98.19	-9.99	-1.42×10^{-1}	-5.06×10^{-3}	-2.09×10^{-4}	-8.77×10^{-6}	-4×10^{-7}	-4.17×10^{-8}	-2.19×10^{-8}	-1.98×10^{-8}
$8h \approx 2.7H$	6848	98.19	-9.99	-1.42×10^{-1}	-5.06×10^{-3}	-2.09×10^{-4}	-8.77×10^{-6}	-4.02×10^{-7}	-4.41×10^{-8}	-2.42×10^{-8}	-2.31×10^{-8}
$5h \approx 1.7H$	5768	98.19	-9.99	-1.42×10^{-1}	-5.06×10^{-3}	-2.09×10^{-4}	-8.92×10^{-6}	-5.37×10^{-7}	-1.71×10^{-7}	-1.56×10^{-7}	-5.89×10^{-7}

Таблица 6. Результаты (первые строки матрицы C , пФ/м) для МПЛП 2 в программных средствах

Источник	d	N	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}
ADS	н.д.*	н.д.	128.69	-59.17	-13.08	-5.75	-3.13	-1.91	-1.3	-1.24
FasterCap	$5h \approx 5H$	9588	128.84	-59.78	-13.16	-5.77	-3.14	-1.91	-1.35	-1.2
TALGAT	$5h \approx 5H$	16207	127.9	-58.95	-12.99	-5.7	-3.1	-1.89	-1.29	-1.24
Octave	$5h \approx 5H$	16207	128.24	-59.13	-13.01	-5.71	-3.1	-1.89	-1.28	-1.23
CONMTL	$5h \approx 5H$	4832	126.46	-58.2	-12.86	-5.65	-3.07	-1.87	-1.27	-1.21
[78]	$5h \approx 5H$	н.д.	127.93	-58.54	-13.05	-5.73	-3.12	-1.9	-1.29	-1.22
[85]	$5h \approx 5H$	н.д.	126.32	-57.14	-12.94	-5.69	-3.09	-1.88	-1.27	-1.19

* н.д. — нет данных.

полняются критерии из разд. 2, а различия от итерации к итерации удовлетворяют требуемым, а именно: по (20) и (21) менее 1%, а по (22) — 10 и 25%. Так, при $d = 8h$ различия по (22) не превышают 25%, а $d = 9h$ — 10%. При этом число обусловленности матричного уравнения (6) в первом случае составило $\text{cond}(\mathbf{S}) = 8.5 \times 10^3$, а во втором — 8.8×10^3 . Отсюда следует, что емкостные матрицы рассчитаны с 12 верными знаками, поскольку $p \approx 4$. В табл. 5 также приведены результаты при $d = 5h$, а при исходном соотношении $d = 3h$ — в табл. 4. Как видно, они не удовлетворяют критериям из разд. 2. При этом они получены с той же точностью, поскольку при $d = 3h$, $\text{cond}(\mathbf{S}) = 6.7 \times 10^3$, а при $d = 5h$ — 7.5×10^3 . В результате, выбор $d = 3...5h$ оказался недостаточным для точного расчета емкостной матрицы МПЛП 1.

На практике часто возникает противоположная ситуация: расстояние d выбирается излишне большим, что приводит к нерациональному увеличению числа сегментов расчетной сетки и тем самым росту вычислительных затрат. Так, известна восьмипроводная линия передачи (далее — МПЛП 2) [78, 85], поперечное сечение которой представлено на рис. 10. Ее параметры: $w = 1$ мм;

$s = 1$ мм; $t = 0.1$ мм; $h_3 = h = 16$ мм; $d = 80$ мм; $\epsilon_{r3} = = 12.9$. Отметим, что $d = 5h \approx 5H$.

Результаты, полученные в тех же программных средствах, а также опубликованные в [78, 85], приведены в табл. 6. Видно, что они соответствуют всем критериям из разд. 2. Максимальное различие (в таблице выделено жирным) между результатами из программных средств не превышает 4% (ADS и FasterCap, элемент C_{17}). Это различие, по всей видимости, связано с различием используемых расчетных сеток. Так, разница в числе сегментов достигает 3.4 раза. В то же время различие полученных результатов с опубликованными данными не превышает 4.2% (ADS и [85], элемент C_{18}).

Аналогично исследованию для МПЛП 1 выполнен поиск минимального расстояния d в тех же диапазонах. В табл. 7 приведены полученные результаты при выявленном минимальном значении d , при котором выполняются критерии из разд. 2, а различия от итерации к итерации удовлетворяют требуемым, а именно: по (20) и (21) менее 1%, а по (22) — 10%. Минимальное расстояние d составило $1.5h$. При этом число обусловленности матричного уравнения (6) составило $\text{cond}(\mathbf{S}) = 4.7 \times 10^3$. Отметим, что различия по (22) менее 25% получены для всех исследованных зна-

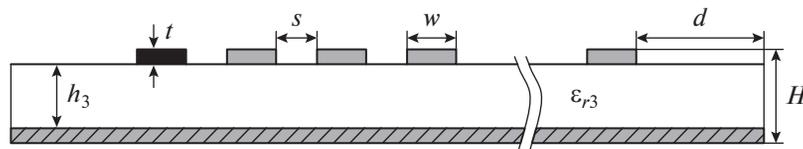
**Рис. 10.** Поперечное сечение МПЛП 2 и 3.

Таблица 7. Результаты (первые строки матрицы C , пФ/м) для МПЛП 2 при изменении расстояния d в Octave

d	N	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}
$5h \approx 5H$	16207	128.24	-59.13	-13.01	-5.71	-3.1	-1.89	-1.28	-1.23
$1.5h \approx 1.5H$	6607	128.03	-59.22	-13.06	-5.75	-3.13	-1.92	-1.32	-1.28

Таблица 8. Минимальные значения d при изменении M и t для МПЛП 3 и 4 в Octave

M	$t = 0.005$ мм				$t = 0.105$ мм			
	МПЛП 3		МПЛП 4		МПЛП 3		МПЛП 4	
	$\Delta C' < 25\%$	$\Delta C' < 10\%$	$\Delta C' < 25\%$	$\Delta C' < 10\%$	$\Delta C' < 25\%$	$\Delta C' < 10\%$	$\Delta C' < 25\%$	$\Delta C' < 10\%$
2	$2H$	$2H$	H	H	$1.5H$	$1.5H$	H	H
4	$2H$	$2.5H$	H	$1.5H$	$1.5H$	$2H$	$2H$	$3H$
6	$2H$	$3H$	$1.5H$	$2H$	$6H$	$6H$	$2H$	$3H$
8	$3.5H$	$3.5H$	$2H$	$2.5H$	–	–	$2.5H$	$3.5H$
10	$5.5H$	$5.5H$	$3H$	$3H$	–	–	$5H$	$5H$
12	$9H$	$9H$	$3.5H$	$3.5H$	–	–	–	–

чений d , а различия между результатами расчетов при одинаковых коэффициентах изменения h и H составили менее 1%. Для наглядности в таблице приведены также результаты для исходной геометрии ($d = 5h \approx 5H$), при которой $\text{cond}(S) = 1.1 \times 10^4$. В результате только за счет уменьшения расстояния d удалось сократить число сегментов в 2.5 раза при максимальном поэлементном различии (элемент C_{18}) около 4%.

После рассмотрения двух крайних случаев (неэкранированная микрополосковая МПЛП и экранированная МПЛП с несколькими слоями диэлектрического заполнения), рассмотрены промежуточные варианты линий передачи с изменяемым числом проводников M . Поскольку расстояние до экрана также влияет на точность вычисления емкостной матрицы (это влияние не исследовалось в работе), надо учитывать его при выборе значения расстояния d . Поэтому далее использована зависимость d от высоты всей структуры H .

Сначала МПЛП 1 была видоизменена так, чтобы ее поперечное сечение соответствовало рис. 10 (далее МПЛП 3), без изменения размеров, ис-

пользованных ранее. Выполнены расчеты в Octave при последовательном изменении $d = 0.5H, H, \dots, 10H$ и $M = 2, 4, \dots, 12$. В табл. 8 (столбец для $t = 0.005$ мм и МПЛП 3) приведены выявленные минимальные значения расстояния d , при которых матрицы удовлетворяют критериям из разд. 2, а изменения в матрицах по (20) и (21) составляют менее 1%, по (22) – 10 и 25%. Видно, что в большинстве случаев рост числа проводников требует увеличения расстояния d .

Затем в МПЛП 3 добавлен экран на расстоянии $h_2 = 3h_3$, как показано на рис. 11 (далее МПЛП 4), и в Octave проведены аналогичные вычисления. Полученные минимальные значения расстояния d приведены в табл. 8 (столбец для $t = 0.005$ мм и МПЛП 4). Видно, что по сравнению с МПЛП 3 рост числа проводников требует не такого сильного увеличения расстояния d .

Для апробации полученных соотношений выполнен расчет емкостных матриц для МПЛП 3 и 4. Результаты расчета в программных средствах CONMTL и TALGAT при $M = 12$ и выявленных соотношениях $d = 9H$ и $d = 3.5H$ соответственно,

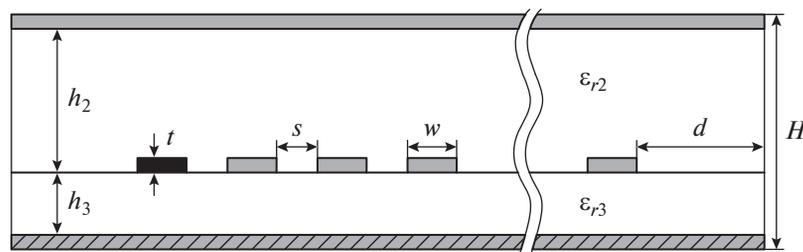


Рис. 11. Поперечное сечение МПЛП 4.

Таблица 9. Результаты (первые строки матрицы C , пФ/м) при изменении расстояния d для МПЛП 3 и 4 при $M = 12$ и $t = 0.005$ мм в CONMТL и TALGAT

Источник	d	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{110}	C_{111}	C_{112}
CONMТL	$3h$	74.51	-8.46	-0.67	-0.27	-0.14	-0.08	-0.05	-0.03	-0.019	-0.009	0.001	0.016
	$5h$	74.45	-8.43	-0.67	-0.27	-0.14	-0.09	-0.06	-0.04	-0.024	-0.015	-0.007	0.001
	$9H$	74.25	-8.4	-0.67	-0.27	-0.14	-0.09	-0.06	-0.04	-0.027	-0.019	-0.012	-0.007
TALGAT (МПЛП 3)	$3h$	76.61	-8.88	-0.72	-0.31	-0.18	-0.12	-0.08	-0.06	-0.052	-0.044	-0.040	-0.045
	$5h$	76.68	-8.85	-0.71	-0.29	-0.17	-0.11	-0.08	-0.06	-0.045	-0.037	-0.032	-0.033
	$9H$	76.70	-8.84	-0.70	-0.29	-0.16	-0.10	-0.07	-0.05	-0.041	-0.033	-0.028	-0.026
TALGAT (МПЛП 4)	$3h$	92.09	-12.04	-0.49	-0.05	-5.95×10^{-3}	-3.81×10^{-4}	2.92×10^{-4}	3.73×10^{-4}	3.83×10^{-4}	3.85×10^{-4}	3.93×10^{-4}	5.47×10^{-4}
	$5h$	92.14	-12.04	-0.49	-0.05	-6.27×10^{-3}	-7×10^{-4}	-2.81×10^{-5}	5.33×10^{-5}	6.31×10^{-5}	6.49×10^{-5}	7.01×10^{-5}	1.48×10^{-4}
	$3.5H$	92.15	-12.04	-0.49	-0.05	-6.33×10^{-3}	-7.65×10^{-4}	-9.25×10^{-5}	-1.12×10^{-5}	-1.34×10^{-6}	-1.5×10^{-7}	-2.8×10^{-8}	-6.5×10^{-9}

а также для наглядности при $d = 3h$ и $d = 5h$, приведены в табл. 9 (из-за ограничений программного средства CONMТL расчет для МПЛП 4 в нем не произведен). Видно, что в обоих программных средствах только при выявленных соотношениях емкостные матрицы точны, а при $d = 3...5h$ полученные матрицы не удовлетворяют критериям из разд. 2.

Далее проанализировано влияние изменения соотношения между толщинами диэлектрической подложки и проводников на минимальное значение d . Для этого использованы МПЛП 3 и 4, для которых в исходных геометриях $h/t = 10$. За счет изменения толщины проводников ($t = 0.105$ мм) это соотношение составило $h/t \approx 0.5$ ($h = h_3 = 0.05$ мм). При этом, как показано в [32], для таких толщин t целесообразно использовать равномерную расчетную сетку с длиной сегментов $t/5$. Полученные минимальные значения расстояния d приведены

Таблица 10. Минимальные значения d при изменении M на каждом слое для МПЛП 5 и 6 в Octave

M	МПЛП 5		МПЛП 6	
	$\Delta C' < 25\%$	$\Delta C' < 10\%$	$\Delta C' < 25\%$	$\Delta C' < 10\%$
2	$1.5H$	$1.5H$	$2H$	$2H$
4	$3H$	$4H$	$4H$	$4H$
6	$4H$	$5H$	$4H$	$5.5H$
8	$4H$	$5H$	$15H$	$15H$
10	$5H$	$6H$	н.д.	н.д.
12	$11H$	$11H$	н.д.	н.д.

Примечание: н.д. – нет данных.

в табл. 8 (столбец для $t = 0.105$ мм). Из нее видно, что при $M > 6$ для МПЛП 3 и $M = 12$ для МПЛП 4 добиться соответствия всем критериям из разд. 2 не удалось (последний критерий не выполнялся даже при соотношении $d = 100H$). Поэтому при таких соотношениях h/t надо дополнительно использовать другие способы повышения точности вычислений, например адаптивную расчетную сетку.

Наконец, проанализированы многослойные МПЛП, у которых проводники находятся на всех слоях. Для них, в отличие от микрополосковых, авторам данной работы не известны общепринятые соотношения для задания расстояния до удаленных границ. Так, в опубликованных работах часто отсутствует упоминание о величине d , а, например, в [54, 86] использованы соотношения $d \approx 1.5H...1.7H$ для двухслойных и $0.8H$ для трехслойных МПЛП.

Рассмотрены двухслойная (далее – МПЛП 5) и трехслойная (далее – МПЛП 6) линии передачи (рис. 12) из [86]. Их параметры: $w = 1$ мм; $s = 1$ мм; $t = 0.01$ мм; $h = 1$ мм; $\epsilon_{r1} = 9.5$, $\epsilon_{r2} = 4.65$ для МПЛП 5 и $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 3$, $\epsilon_{r3} = 4$ для МПЛП 6. Оценена сходимость емкостных матриц при последовательном изменении расстояния $d = 0.5H, H, \dots, 10H$ и увеличении числа проводников M на каждом слое. Нумерация проводников МПЛП осуществлялась послойно слева направо, начиная с нижних слоев. В результате общее число проводников для МПЛП 5 варьировалось от 4 до 24, а для МПЛП 6 – от 6 до 36 (для МПЛП 6 при $M = 10$ и $M = 12$ результаты не были получены из-за ограничений в объеме имеющейся оперативной памяти). Полученные минимальные значения расстояния d приведены в табл. 10. Из нее видно, что известные соотношения ($d = 1.5H...1.7H$ и $d = 0.8H$) для обеих

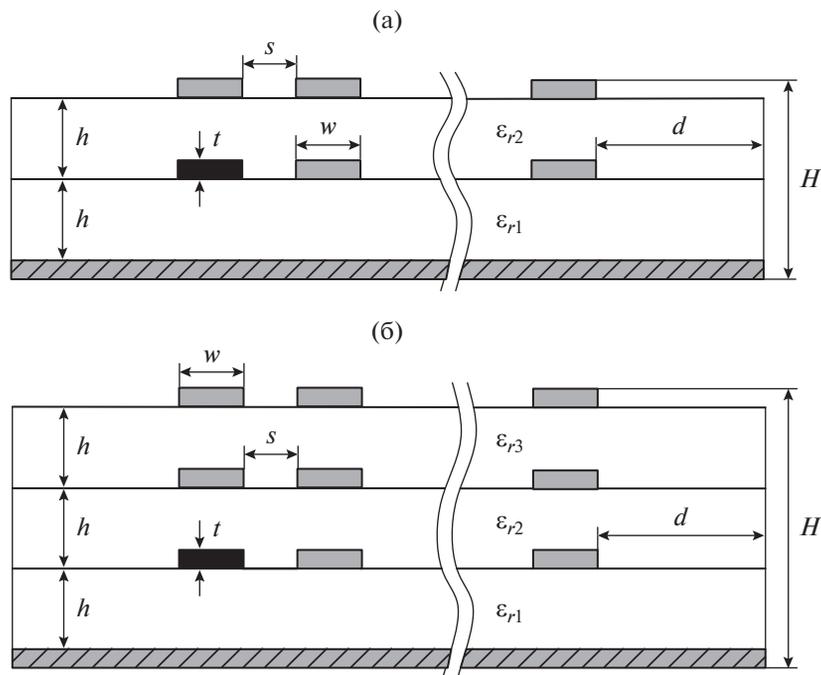


Рис. 12. Поперечные сечения МПЛП 5 (а) и МПЛП 6 (б).

МПЛП в большинстве случаев (при $M > 2$) не дают точные емкостные матрицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены особенности вычисления параметров и характеристик МПЛП. Представлены математическая модель для расчета матриц первичных погонных параметров МПЛП методом моментов и методика их расчета без потерь и с потерями. Сформулированы критерии точности расчета емкостной матрицы и пояснены возможные причины их невыполнения. Показано влияние погонных параметров МПЛП на их характеристики, а именно отклики и глазковые диаграммы.

Изучено влияние расстояний до удаленных границ МПЛП на точный и экономичный расчет их емкостных матриц. С использованием МоМ показано, что известные соотношения для задания этого расстояния для линий передачи с числом проводников более 8, в большинстве случаев не позволяют осуществить расчет емкостных матриц, соответствующих требуемым критериям их точности. Также показана необходимость учета числа проводников МПЛП при задании минимального расстояния до удаленных границ. На примере нескольких МПЛП с разным числом проводников и диэлектрических слоев определены соотношения для задания этих расстояний, при которых удается добиться точного и экономичного расчета емкостных матриц.

С использованием нескольких программных средств продемонстрирована достоверность выявленных соотношений. Их использование на этапе подготовки входных данных позволяет априорно задавать удаленные границы для корректного решения задачи с приемлемой точностью при минимальных вычислительных затратах, а не подбирать их за счет многократного расчета и оценки сходимости. Кроме того, эти соотношения легко встраиваются в существующие программные средства и тем самым способствуют повышению степени их доверенности.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект FEWM-2020-0039).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paul C.R. Analysis of Multiconductor Transmission Lines. N.Y.: Wiley-IEEE Press, 2008.
2. Yordanov H., Ivrlac M., Nossek J., Russer P. // 2007 European Microwave Integrated Circuit Conf. Munich. 8–10 Oct. N.Y.: IEEE, 2007. P. 579. <https://doi.org/10.1109/EMICC.2007.4412779>
3. Johnson H.W., Graham M. High-Speed Signal Propagation: Advanced Black Magic. Hoboken: Prentice Hall, 2003.

4. Джорджевич А.Р., Саркар Т.К., Харрингтон Р.Ф. // ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 6. С. 7.
5. Tesche F., Ianoz M., Karlsson T. EMC Analysis Methods and Computational Models. N.Y.: John Wiley & Sons, 1996.
6. Заболоцкий А.М., Газизов Т.Р. Временной отклик многопроводных линий передачи. Томск: Томский гос. ун-т, 2007.
7. Кециев Л.Н. Проектирование печатных плат для цифровой быстродействующей аппаратуры. М.: ООО "Группа ИДТ", 2007.
8. Montrose M.I. EMC and the Printed Circuit Board: Design, Theory, and Layout Made Simple. N.Y.: Wiley-IEEE Press, 2004.
9. Russ S.H. Signal Integrity: Applied Electromagnetics and Professional Practice. L.: Springer Nature, 2022.
10. Thierauf S.C. High-Speed Circuit Board Signal Integrity. Norwood: Artech House Publishers, 2004.
11. Broyde F., Clavelier E. // IEEE Trans. 2005. V. CSI-52. № 2. P. 405.
<https://doi.org/10.1109/TCSI.2004.841596>
12. Wu R.-B., Chao F.-L. // IEEE Trans. 1995. V. CPMT-18. № 4. P. 644.
<https://doi.org/10.1109/96.475270>
13. Guo W.-D., Shiue G.-H., Lin C.-M., Wu R.-B. // IEEE Trans. 2006. V. MTT-54. № 4. P. 1379.
<https://doi.org/10.1109/TMTT.2002.871913>
14. Rotgerink J.L., Serra R., Leferink F. // IEEE Trans. 2021. V. EMC-63. № 4. P. 1231.
<https://doi.org/10.1109/TEMC.2020.3040689>
15. Cai R., Yang S. // Energies. 2022. V. 15. № 10. P. 3501.
<https://doi.org/10.3390/EN15103501>
16. Гизатуллин З.М., Гизатуллин Р.М., Нуриев М.Г. // РЭ. 2021. Т. 66. № 6. С. 609.
<https://doi.org/10.31857/S0033849421060103>
17. Гизатуллин З.М., Гизатуллин Р.М., Шкиндеров М.С., Архипов А.О. // Докл. ТУСУР. 2019. Т. 22. № 3. С. 13.
<https://doi.org/10.21293/1818-0442-2019-22-3-13-17>
18. Ховратович В.С. // РЭ. 1975. Т. 20. № 3. С. 468.
19. Атемиа Н. // RCA Review. 1967. V. 28. № 2. P. 241.
20. Влостовский Э.Г. // Радиотехника. 1967. Т. 22. № 4. С. 28.
21. Paul C.R. Transmission Lines in Digital Systems for EMC Practitioners. N.Y.: Wiley-IEEE Press, 2012.
22. Surovtsev R.S., Nosov A.V., Gazizov T.R. // Electrical. 2022. № 22. P. 84.
<https://doi.org/10.5152/electr.2021.21062>
23. Аполлонский С.М. Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике. СПб.: Питер, 2012.
24. Sadiku M.N.O. Numerical Techniques in Electromagnetics. Boca Raton: CRC Press, 2019.
25. Wei C., Harrington R.F., Mautz J.R., Sarkar T.K. // IEEE Trans. 1984. V. MTT-32. № 4. P. 439.
<https://doi.org/10.1109/TMTT.1984.1132696>
26. Lupo G., Petrarca C., Vitelli M., Tucci V. // IEEE Trans. 2002. V. DEI-9. № 3. P. 467.
<https://doi.org/10.1109/TDEI.2002.1007711>
27. Sumant P., Cangellaris A. // Int. J. Numerical Modeling. 2007. V. 20. № 5. P. 253.
28. You Y., Palusinski O.A., Szidarovszky F. // IEEE Trans. 1999. V. MTT-47. № 6. P. 798.
<https://doi.org/10.1109/22.769353>
29. Venkataraman J., Rao S.M., Djordjevic A.R. et al. // IEEE Trans. 1985. V. MTT-33. № 10. P. 952.
<https://doi.org/10.1109/TMTT.1985.1133155>
30. Pan G.W., Wang G., Gilbert B.K. // IEEE Trans. 1992. V. CSI-39. № 11. P. 955.
<https://doi.org/10.1109/81.199876>
31. Musa S.M., Sadiku M.N.O. // Int. J. Engineering Research and Development. 2014. V. 10. № 3. P. 87.
32. Khebir A., Kouki A., Mittra R. // J. Electromagnetic Waves and Applications. 1990. V. 4. № 2. P. 145.
<https://doi.org/10.1163/156939390X00041>
33. Maksimov A.E., Kuksenko S.P. // IEEE Trans. 2022. V. EMC-64. № 5. P. 1514.
<https://doi.org/10.1109/TEMC.2022.3175717>
34. Zhu B., Lu J., Zhu M., Jiang M. // 2015 10th Electromagnetic Compability of Integrated Circuits (EMC Compo). Edinburgh. 10–13 Nov. N.Y.: IEEE, 2015. P. 87.
35. Özgün Ö., Kuzuoğlu M. MATLAB-based Finite Element Programming in Electromagnetic Modeling. Boca Raton: CRC Press, 2018.
36. Rosloniec S. Fundamental Numerical Methods for Electrical Engineering. Berlin: Springer, 2008.
37. Харрингтон Р.Ф. // ТИИЭР. 1967. № 2. С. 5.
38. Ruehli A., Antonini G., Jiang L. Circuit Oriented Electromagnetic Modeling Using the PEEC Techniques. N.Y.: Wiley-IEEE Press, 2017.
39. Karkashadze D., Jobava R., Frei S., Soziashvili B. // Proc. 6th Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2001). Lviv. 18–20 Sep. N.Y.: IEEE, 2001. P. 187.
40. Кадников С.Н. Метод интегральных уравнений для расчета электростатических полей. Иваново: Ивановский гос. энергетический ун-т, 1995.
41. Hackbusch W. Integral Equations: Theory and Numerical Treatment/Int. Ser. of Numerical Math. V.120. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 266.
https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9215-5_8
42. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наукова думка, 1984.
43. Yla-Oijala P., Taskinen M., Sarvas J. // Progress in Electromagnetics Research. 2005. V. 52. P. 81.
<https://doi.org/10.2528/PIER04071301>
44. Banerjee P.K., Butterfield R. Boundary Element Methods in Engineering Science. N.Y.: McGraw-Hill, 1981.
45. Rylander T., Ingelström P., Bondeson A. Computational Electromagnetics. N.Y.: Springer, 2013.
46. L'eplattenier P., Çaldichoury I. // 38th Int. Conf. on Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM 38). New Forest. 21–23 Sep. Ashurst: WIT Press, 2015. P. 311.

47. *Yu W., Wang X.* Advanced Field–Solver Techniques for RC Extraction of Integrated Circuits. Berlin: Springer, 2014.
48. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986.
49. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
50. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. М.: ГИФМЛ, 1959.
51. *Matthaei G.L., Young L., Jones E.M.T.* Microwave Filters, Impedance- matching Networks, and Coupling Structures. Norwood: Artech House Publishers, 1980.
52. *Zhai K., Yu W.* // Int. J. Numerical Modelling. 2014. V. 27. № 4. P. 656. <https://doi.org/10.1002/jnm.1934>
53. *Musa S.M., Sadiku M.N.O.* // Microwave and Optical Technology Lett. 2008. V. 50. № 10. P. 2743.
54. *Bazdar M.B., Djordjevic A.R., Harrington R.F. et al.* // IEEE Trans. 1994. V. MTT-42. № 7. P. 1223. <https://doi.org/10.1109/22.299760>
55. *Balakrishnan S., Park J.H., Kim H. et al.* // Proc. 2001 IEEE Int. Conf. on Computer Design: VLSI in Computers and Processors (ICCD 2001). Austin, 23–26 Sep. N.Y.: IEEE, 2001. P. 98.
56. *Zhang J., Drewniak J.L., Pommerenke D.J. et al.* // IEEE Trans. 2010. V. EMC-52. № 1. P. 189. <https://doi.org/10.1109/TEMC.2009.2035055>
57. *Peterson Z.M.* // 2020 IEEE 29th Conf. on Electrical Performance of Electronic Packaging and Systems (EPEPS). San Jose. 5–7 Oct. N.Y.: IEEE, 2020. Paper No. 9231315.
58. *Pan G.-W., Olson K.S., Gilbert B.K.* // IEEE Trans. 1989. V. CADICS-8. № 6. P. 608. <https://doi.org/10.1109/43.31517>
59. *Kovacevic-Badstuebner I., Romano D., Antonini G. et al.* // Energies. 2021. V. 14. № 10. P. 2835. <https://doi.org/10.3390/en14102835>
60. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978.
61. *Ramo S., Whinnery J.R., van Duzer T.* Fields and Waves in Communication Electronics. N.Y.: John Wiley & Sons, 1994.
62. *Shafieipour M., de Silva J., Kariyawasam A. et al.* // Proc. Int. Conf. on Power Systems Transients (IPST) 2017. Seoul, 26–29 Jun 2017. Paper No. 17IPST204.
63. *Scheinfein M.R., Palusinski O.A.* // IEEE Trans. 1987. V. SCS-4. № 3. P. 187.
64. *Harrington R.F.* // IEEE Trans. 1984. V. MTT-32. № 7. P. 705. <https://doi.org/10.1109/TMTT.1984.1132757>
65. *Chen L.F., Ong C.K., Neo C.P. et al.* Microwave Electronics. Measurement and Materials Characterization. N.Y.: John Wiley & Sons, 2004.
66. *Nabors K., White J.* // IEEE Trans. 1991. V. CADICS-10. № 11. P. 1447. <https://doi.org/10.1109/43.97624>
67. *Drandić A., Trkulja B.* // Int. J. Numerical Modelling. 2019. V. 33. № 5. Article e2669. <https://doi.org/10.1002/jnm.2669>
68. *Paul C.* Transmission Lines in Digital and Analog Electronic Systems: Signal Integrity and Crosstalk. N.Y.: Wiley–IEEE Press, 2010.
69. *Makarov S.N., Noetscher G.M., Nazarian A.* Low-Frequency Electromagnetic Modeling for Electrical and Biological Systems Using MATLAB. N.Y.: John Wiley & Sons, 2016.
70. *Ruehli A.E.* Circuit Analysis, Simulation and Design. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1987.
71. *Zhai K., Yu W.* // Int. J. Numerical Modelling. 2014. V. 27. № 4. P. 656. <https://doi.org/10.1002/jnm.1934>
72. *Yang Z., Wang Z.* // Microelectronic Engineering. 2003. V. 65. P. 133. [https://doi.org/10.1016/S0167-9317\(02\)00746-3](https://doi.org/10.1016/S0167-9317(02)00746-3)
73. *Ekman J., Antonini G., Orlandi A., Ruehli A.* // IEEE Trans. 2006. V. EMC-48. № 1. P. 19. <https://doi.org/10.1109/TEMC.2006.870699>
74. *Сычев А.Н., Стручков С.М.* // Докл. ТУСУР. 2011. Т. 24. № 2–3. С. 77.
75. *Hall S.H., Heck H.L.* Advanced Signal Integrity for High-Speed Digital Designs. N.Y.: Wiley–IEEE Press, 2009.
76. *Wu R.-B., Chao F.-L.* // IEEE Trans. 1996. V. CP-MT-19 № 2. P. 397. <https://doi.org/10.1109/96.496044>
77. *Musa S.M., Sadiku M.N.O.* // IEEE SoutheastCon 2008. Huntsville. 3–6 Apr. N.Y.: IEEE, 2008. P. 300. <https://doi.org/10.1109/SECON.2008.4494308>
78. *Homentcovschi D., Oprea R.* // IEEE Trans. 1998. V. MTT-46. № 1. P. 18. <https://doi.org/10.1109/22.654918>
79. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов: Учебник для вузов. М.: Высш. шк., 2002.
80. *Heath M.T.* Scientific Computing: an Introductory Survey. Boston: McGraw- Hill, 2002.
81. *Zhou Y., Li Z., Shi W.* // 2007 44th ACM/IEEE Design Automation Conf. San Diego. 4–8 Jun. N.Y.: IEEE, 2007. P. 835.
82. *Максимов А.Е., Куксенко С.П.* // Журн. радиоэлектрон. 2021. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan21/10/text.pdf>. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.1.10>
83. *Swanson D.G., Hofer W.J.* Microwave Circuit Modeling Using Electromagnetic Field Simulation. Norwood: Artech House Publishers, 2003.
84. *Максимов А.Е., Куксенко С.П.* // Журн. радиоэлектрон. 2023. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan23/14/text.pdf>. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.14>
85. *Khalaj-Amirhosseini M.* // Progress in Electromagnetics Research. 2005. V. 50. P. 267. <https://doi.org/10.2528/PIER04061601>
86. *Musa S.M., Sadiku M.N.O.* // Proc. of the COMSOL Conf. Boston, 30 Mar. 2009. <https://www.comsol.ru/paper/download/44430/Musa.pdf>