РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 68, № 2, с. 146–151

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 519.725;512.62

МНОЖЕСТВА НЕДВОИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С НИЗКИМ УРОВНЕМ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

© 2023 г. В. Г. Стародубцев*

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,
ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198 Российская Федерация
**E-mail: vgstarod@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.04.2022 г.
После доработки 14.06.2022 г.
Принята к публикации 27.06.2022 г.

Представлены множества недвоичных псевдослучайных последовательностей (НПП) для периодов $N = p^S - 1 < 20000$ ($p = 3, 5, 7, 11$), сформированных в конечных полях $GF(p^S)$, мощность которых равна $V = N + 1$, а максимум модуля пиков периодических автокорреляционной (ПАКФ) и взаимно корреляционной функций (ПВКФ) удовлетворяет граничным оценкам, полученным В.М. Сидельниковым. В дополнение к минимальным полиномам элементов α и α^2, где α – примитивный элемент поля $GF(p^S)$, определены минимальные полиномы элементов α и α^{i_d} (i_d – индекс децимации), на основании которых могут быть сформированы новые множества НПП с эквивалентными корреляционными свойствами. Определены наборы индексов $i_d > 2$ для различных сочетаний параметров p и S. Рассмотрены случаи четного и нечетного значений параметра S, для которых получены максимальные по модулю значения ПАКФ и ПВКФ и определены число и значения различных уровней корреляционных функций.

DOI: 10.31857/S0033849423020134, **EDN:** LCTVMQ

Одним из направлений развития систем передачи цифровой информации (СПЦИ), предусматривающих корреляционную обработку, является переход к недвоичным фазоманипулированным сигналам с расширенным спектром (СРС), формируемым на основе недвоичных псевдослучайных последовательностей (НПП) [1–4].

Исследованию вопросов определения автокорреляционных и взаимно корреляционных свойств НПП посвящено большое количество работ [4–18]. Одной из основополагающих является работа [5], в которой получены нижние оценки максимума модуля автокорреляции и взаимной корреляции недвоичных последовательностей, формируемых для различных минимальных полиномов элементов полей $GF(p^S)$.

В [6, 7] определены индексы децимации i_d, позволяющие определять минимальные полиномы при формировании множеств НПП, для которых выполняется условие, что наибольший общий делитель (НОД) $(i_d, p^S - 1) = 1$, т.е. последовательности в множествах получались путем сложения двух различных МП. При этом максимум модуля корреляции соответствует граничным оценкам, полученным в [5].

Дальнейшим направлением исследований стала разработка алгоритмов формирования множеств последовательностей с низким уровнем взаимной корреляции на основе децимации МП по индексам, не являющимся взаимно простыми с периодом N. В [8, 9] для нечетных значений S и индексов децимации, удовлетворяющих условию НОД $(i_d, p^S - 1) = 2$, определена верхняя граница для значений взаимной корреляции $|R_{max}| = 1 + (p + 1)p^{S/2}/2$ и мощность полученных множеств последовательностей. В [10–12, 14–17] для четных значений S и индексов децимации, для которых НОД $(i_d, p^S - 1) > 2$, также определены мощности множеств и максимальные значения взаимной корреляции. При этом последовательности в данных множествах формируются путем сложения МП с периодом $N = p^S - 1$ и децимированных последовательностей с периодами, являющимися делителями N.

В [18] проведен сравнительный анализ основных результатов по формированию множеств последовательностей с хорошей взаимной корреляцией и получены новые множества для $S = 2 \bmod 4$. В [19—22] рассмотрены возможности формирования многофазных сигналов на основе новых структур синтеза последовательностей.

Целью статьи является определение индексов децимации i_d для вычисления в полях $GF(p^S)$ минимальных полиномов элементов α и α^{i_d} ($i_d > 2$), на основании которых могут быть сформированы новые множества НПП с корреляционными свойствами, удовлетворяющими граничным оценкам, полученным в [5].

Основные результаты по формированию множеств НПП с низким уровнем автокорреляции и взаимной корреляции получены на основе композиции МП и последовательностей, получаемых путем ее децимации по различным индексам. Недвоичные МП с периодом $N = p^S - 1$ формируются над конечными полями $GF(p^S)$. Символы d_i ($i = 0, \ldots, N - 1$) МП в каноническом виде определяются выражением [2, 7, 10]

$$d_i = \mathrm{tr}_{S1}(\alpha^i), \tag{1}$$

где $\mathrm{tr}_{S1}(\alpha)$ — функция следа примитивного элемента α из поля $GF(p^S)$ в поле $GF(p)$.

Известно [2—4], что корреляционные свойства СРС в основном определяются корреляционными свойствами последовательностей A_j

$$A_j = \{a_{ji}\} = \{a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jN-1}\}, \tag{2}$$

где N — период последовательности; a_{ji} — элементы, принадлежащие комплекснозначному алфавиту из p элементов и представляющие собой корни p-й степени из единицы, т.е.

$$a_{ji} = \exp(j2\pi l/p), \quad l = \overline{0, p-1}.$$

Если элемент a_{ji} принадлежит комплекснозначному алфавиту, то используется метрика в Евклидовом пространстве. При этом для периодической взаимно корреляционной функции (ПВКФ) последовательностей A_j и A_k с периодом N справедливо выражение [5—10]

$$R_{jk}(\tau) = \sum_{l=0}^{N-1} a_{jl} a^{*}_{k,l+\tau}, \tag{3}$$

где $a^{*}_{j,l+\tau}$ — комплексно сопряженный элемент; τ — циклический сдвиг, принимающий дискретные значения; сдвиг $(l + \tau)$ вычисляется по mod N.

Определение индексов децимации $i_d > 2$ для формирования множеств НПП выполним для значений $p = 3, 5, 7, 11$ для периодов $N = p^S - 1 < 20000$.

Каждая НПП образуется путем суммирования по mod p МП и последовательности, полученной путем децимации МП по индексам децимации, удовлетворяющим условию

$$\text{НОД}(i_d, p^S - 1) = 2. \tag{4}$$

Для случая $i_d = 2$, т.е. при минимальном полиноме $f(x)$ элементов α и α^2, где α — примитивный элемент поля $GF(p^S)$, граничные оценки для максимума модуля боковых пиков ПАКФ и ПВКФ множеств НПП мощностью $V = N + 1$ приведены в [5, теорема 4]

$$|R_{\max}| = p^{S/2} + 1. \tag{5}$$

Определим минимальные полиномы $f(x)$ для индексов децимации $i_d > 2$ при различных значениях параметров p и S.

Рассмотрим формирование НПП при $p = 3$ для нечетных значений $S = 2k + 1$. При $S = 3$ в поле $GF(3^3)$ с примитивным полиномом $h_1(x) = x^3 + 2x + 1$ существует четыре неприводимых полинома, корни которых имеют период $N_1 = N/2 = 13$, т.е. удовлетворяют условию (4). Это полиномы

$$h_2(x) = x^3 + x^2 + x + 2; \quad h_4(x) = x^3 + x^2 + 2;$$
$$h_8(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2; \quad h_{14}(x) = x^3 + 2x + 2.$$

Здесь и далее нижние цифровые индексы в обозначениях полиномов равны минимальному показателю степени их p-сопряженных корней и соответствуют индексам децимации $i_d = 2, 4, 8, 14$ при формировании децимированной последовательности из исходной МП вида (1).

Анализ автокорреляционных и взаимно корреляционных свойств последовательностей, формируемых путем сложения троичных МП с периодом $N = 26$ и последовательностей с периодом $N_1 = 13$, показал, что кроме $i_d = 2$ множества НПП, обладающие трехуровневой ПАКФ (при $\tau \neq kN$) и ПВКФ $R_{p,S}(\tau)$, формируются для двух индексов децимации — $i_d = 4, 8$,

$$R_{3,3}(\tau) = \{-5.5; -1; 3.5\}.$$

Максимальное значение модуля корреляционной функции и коэффициента корреляции соответственно равны

$$\begin{gathered} |R_{2\max}| = 0.5 \times 3^{(3+1)/2} + 1 = 5.5; \\ |r_{2\max}| = 5.5/26 = 0.21. \end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом, можно сказать, что НПП формируются с помощью полиномов, равных произведению минимального полинома $h_1(x)$ и одного из трех минимальных полиномов $h_2(x)$, $h_4(x)$, $h_8(x)$, например, $h_{\text{НПП1}}(x) = h_1(x)h_2(x)$, $h_{\text{НПП2}}(x) = h_1(x)h_4(x)$.

Так как полиномы $h_i(x)$ ($i = 2, 4, 8$) являются полиномами степени $S = 3$, то для каждого полинома может быть сформировано 26 последовательностей. При этом в зависимости от выбора начального состояния последовательности с $h_i(x)$ можно получить 13 различных циклических сдвигов последовательности, составленной из четных символов d_j ($j = 0, 2, 4...$) из МП с полиномом $h_1(x)$, представленной в каноническом виде (1), и 13 сдвигов, составленных из нечетных символов МП.

Данное обстоятельство позволяет определить мощность множества НПП, которая определяется суммой 13-ти циклических сдвигов последовательностей из четных символов МП, 13-ти сдвигов из нечетных символов и непосредственно самой МП. Таким образом, мощность множества НПП определяется выражением

$$V = p^S = N + 1. \tag{7}$$

Для каждого из четырех примитивных полиномов в поле $GF(3^3)$ можно сформировать по три множества НПП с характеристиками (6), (7). Для этого необходимо индекс полинома $h_i(x)$ (i = 2, 4, 8) умножить на индекс примитивного полинома. Например, для примитивного полинома $h_{\text{МП}}(x) = h_{17}(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ множество НПП с индексом децимации $i_d = 8$ формируется на основании полинома $h_{\text{НПП}}(x) = h_{17}(x)\, h_{8\times 17 \bmod 26}(x) = h_{17}(x)\, h_6(x) = h_{17}(x)\, h_2(x)$. При этом индекс децимации становится равным $i_d = 2$. Легко можно показать, что другими двумя индексами для полинома $h_{17}(x)$ являются $i_d = 8$ и 14.

При $S = 5$ в поле $GF(3^5)$ с полиномом $h_1(x) = x^5 + 2x + 1$ существует по 22 как примитивных, так и неприводимых полинома, корни которых имеют период $N_1 = N/2 = 242/2 = 121$, удовлетворяющий условию (4), и, соответственно, имеется 22 индекса децимации.

Анализ ПВКФ последовательностей, формируемых путем сложения МП с периодом $N = 242$ и децимированных последовательностей с периодом $N_1 = 121$, показал, что кроме $i_d = 2$ существует еще восемь индексов децимации i_d = 4, 10, 14, 26, 28, 62, 134, 152, на основании которых можно сформировать множества НПП, обладающие трехуровневой ПВКФ:

$$R_{3,5}(\tau) = \{-14.5;\ -1;\ 12.5\}. \tag{8}$$

Максимальное значение модуля корреляционной функции и коэффициента корреляции определяются выражениями

$$|R_{2\max}| = 0.5 \times 3^{(5+1)/2} + 1 = 14.5; \quad |r_{2\max}| = 14.5/242 = 0.06. \tag{9}$$

Таким образом, для периода $N = 242$ для каждого примитивного полинома можно сформировать девять множеств НПП с трехуровневой ПВКФ вида (8) с полиномами, равными произведению примитивного и одного из девяти неприводимых полиномов пятой степени.

Мощность множеств определяется выражением (7) и равна $V = 243$.

Аналогичные результаты получены для поля $GF(3^7)$ с полиномом $h_1(x) = x^7 + x^2 + 2x + 1$ и поля $GF(3^9)$ с полиномом $h_1(x) = x^9 + x^4 + x^2 + 1$.

В поле $GF(3^7)$ существует 156 примитивных полиномов с периодом N = 2186 и 156 неприводимых полиномов с периодом $N_1 = 1093$. Анализ вычислений взаимной корреляции показал, что для формирования множеств НПП с трехуровневой ПВКФ подходят всего двенадцать индексов децимации.

В поле $GF(3^9)$ существует по 1008 примитивных полиномов с периодом $N = 19682$ и неприводимых полиномов с периодом N_1 = 9841. Анализ проведен для первых 40 индексов, среди которых было определено шесть подходящих индексов.

Общее выражение для боковых пиков ПАКФ и ПВКФ множеств троичных НПП при нечетном значении параметра $S = 2k+1$ имеет вид

$$R_{3,S=2k+1}(\tau) = \{(-0.5 \times 3^{(S+1)/2} - 1);\ -1;\ (0.5 \times 3^{(S+1)/2} - 1)\}. \tag{10}$$

$$|R_{2\max}| = 0.5 \times 3^{(S+1)/2} + 1. \tag{11}$$

Формирование множеств пятеричных НПП проведено в конечных полях $GF(5^S)$ при $S = 3, 5$. В поле $GF(5^3)$ с полиномом $h_1(x) = x^3 + 3x + 2$ имеется 20 примитивных полиномов с периодом $N = 124$ и 10 неприводимых полиномов с периодом $N_1 = 62$. Для двух индексов децимации $i_d = 2, 6$ были получены множества НПП с семиуровневой ПВКФ:

$$R_{5,3}(\tau) = \{-12.18;\ -10.05;\ -4.46\ \ -1;\ 2.46;\ 8.05;\ 10.18\}. \tag{12}$$

В поле $GF(5^5)$ с полиномом $f(x) = h_1(x) = x^5 + 4x + 2$ существует 280 примитивных полиномов с периодом N = 3124 и 140 неприводимых полиномов с периодом $N_1 = 62$. Для индексов децимации $i_d = 2$, 6, 26 были получены множества НПП с семиуровневой ПВКФ:

$$R_{5,5}(\tau) = \{-56.9;\ -46.23;\ -18.28;\ -1;\ 16.28;\ 44.23;\ 54.9\}. \tag{13}$$

В общем виде выражения (12) и (13), а также максимальное значение модуля ПВКФ пятеричных НПП можно представить следующим образом:

$$R_{5,S=2k+1}(\tau) = \{(-0.45\times 5^{(S+1)/2} - 1); (-0.36\times 5^{(S+1)/2} - 1); (-0.14\times 5^{(S+1)/2} - 1); -1; (0.14\times 5^{(S+1)/2} - 1); (0.36\times 5^{(S+1)/2} - 1); (0.45\times 5^{(S+1)/2} - 1)\}. \quad (14)$$

$$|R_{2\max}| = 0.45\times 5^{(S+1)/2} + 1. \quad (15)$$

Несмотря на увеличение числа значений ПВКФ для пятеричных НПП, максимальное значение модуля сравнимо с троичным случаем. При этом мощность множеств пятеричных НПП также определяется выражением (7).

Анализ семеричных НПП проводился в полях $GF(7^S)$ при $S = 3, 5$. В поле $GF(7^3)$ с полиномом $f(x) = h_1(x) = x^3 + 3x + 2$ имеется по 36 примитивных полиномов с периодом $N = 342$ и неприводимых полиномов с периодом $N_1 = 171$. Для индексов децимации $i_d = 2, 8, 86, 236$ были получены множества НПП с семиуровневой ПВКФ

$$R_{7,3}(\tau) = \{-19.06; -15.48; -9.04; -1; 7.04; 13.48; 17.06\}. \quad (16)$$

В поле $GF(7^5)$ с полиномом $f(x) = h_1(x) = x^5 + 2x + 2$ имеется по 1120 примитивных полиномов с периодом $N = 16\,806$ и неприводимых полиномов с периодом $N_1 = 8403$. Были проверены первые 60 полиномов. Для индексов децимации $i_d = 2, 8$ были получены множества НПП с семиуровневой ПВКФ:

$$R_{7,5}(\tau) = \{-127.39; -102.36; -57.25; -1; 55.25; 100.36; 125.39\}. \quad (17)$$

Выражения (16) и (17) также приводятся к общему виду:

$$R_{7,S=2k+1}(\tau) = \{(-0.37\times 7^{(S+1)/2} - 1); (-0.30\times 7^{(S+1)/2} - 1); (-0.16\times 7^{(S+1)/2} - 1); -1; (0.16\times 7^{(S+1)/2} - 1); (0.30\times 7^{(S+1)/2} - 1); (0.37\times 7^{(S+1)/2} - 1)\}. \quad (18)$$

$$|R_{2\max}| = 0.37\times 7^{(S+1)/2} + 1. \quad (19)$$

Вследствие большой размерности при $p = 11$ и нечетных значениях S множества НПП были определены только в поле $GF(11^3)$ с полиномом $f(x) = h_1(x) = x^3 + x^2 + 5$, в котором имеется по 216 примитивных с периодом $N = 1330$ и неприводимых полиномов с периодом $N_1 = 665$. Были проверены 50 неприводимых полиномов. Для индексов децимации $i_d = 2, 12$ были получены множества НПП с ПВКФ, имеющей одиннадцать уровней

$$R_{11,3}(\tau) = \{-37.11; -34.19; -28.57; -20.72; -11.28; -1; 9.28; 18.72; 26.57; 32.19; 35.11\}. \quad (20)$$

Выражение (20) может быть записано в общем виде аналогично (18) и (19)

$$R_{11,S=2k+1}(\tau) = \{(-0.3\times 11^{(S+1)/2} - 1); (-0.27\times 11^{(S+1)/2} - 1); (-0.23\times 11^{(S+1)/2} - 1); (-0.16\times 11^{(S+1)/2} - 1); (-0.08\times 11^{(S+1)/2} - 1); -1; (0.08\times 11^{(S+1)/2} - 1); (0.16\times 11^{(S+1)/2} - 1); (0.23\times 11^{(S+1)/2} - 1); (0.27\times 11^{(S+1)/2} - 1); (0.3\times 11^{(S+1)/2} - 1)\}. \quad (21)$$

$$|R_{2\max}| = 0.3\times 11^{(S+1)/2} + 1. \quad (22)$$

В общем виде выражение для $|R_{2\max}|$ при нечетных значениях S может быть представлено следующим образом:

$$|R_{2\max}| = k_p p^{(S+1)/2} + 1, \quad (23)$$

где $k_3 = 0.5$; $k_5 = 0.45$; $k_7 = 0.37$; $k_{11} = 0.3$ при $p = 3, 5, 7, 11$.

Индексы децимации i_d, при которых формируются множества НПП, удовлетворяющие граничным оценкам, полученным в [5], а также максимальные значения модулей корреляционной функции $|R_{2\max}|$ и коэффициента корреляции $|r_{2\max}|$ приведены в табл. 1.

Определение множеств НПП для четных значений S выполняется аналогично. При построении полей и определении индексов децимации использованы примитивные полиномы, представленные в табл. 2.

При $p = 3$ ПАКФ (при $\tau \neq kN$) и ПВКФ множеств НПП является пятиуровневой, т.е. содержит $p + 2$ уровня, и для значений $S = 2, 4, 6, 8$ имеет вид

$$R_{3,S=2k}(\tau) = \{(-3^{S/2} - 1); (-0.5\times 3^{S/2} - 1); -1; (0.5\times 3^{S/2} - 1); (3^{S/2} - 1)\}. \quad (24)$$

При $p = 5, 7, 11$ корреляционные функции НПП, так же как и при $p = 3$, содержат число уровней, равное $(p + 2)$, т.е. семь, девять и тринадцать уровней

Таблица 1. Характеристики множеств НПП при $S = 2k + 1$

p	S	N	i_d	$\|R_{max}\|$	$\|r_{max}\|$	Число уровней $R_{p,\, S=2k+1}(\tau)$	V
3	3	26	2, 4, 8	5.5	0.21	3	27
	5	242	2, 4, 10, 14, 26, 28, 62, 134, 152	14.5	0.06		243
	7	2186	2, 4, 10, 14, 28, 40, 80, 112, 122, 224, 274, 548	41.5	0.02		2187
	9	19682	2, 4, 10, 28, 82, 122	122.5	0.01		19683
5	3	124	2, 6	12.2	0.098	7	125
	5	3124	2, 6, 26	56.9	0.018		3125
7	3	342	2, 8, 86, 236	19.06	0.056	7	343
	5	16806	2, 8	127.4	0.0076		16807
11	3	1330	2, 12	37.1	0.028	11	1331

Таблица 2. Примитивные полиномы для полей $GF(p^S)$ при $S = 2k$

p	S	$f(x) = h_1(x)$	p	S	$f(x) = h_1(x)$
3	2	$x^2 + x + 1$	5	2	$x^2 + x + 2$
3	4	$x^4 + x + 2$	5	4	$x^4 + x^2 + 2x + 2$
3	6	$x^6 + x + 2$	5	6	$x^6 + x^2 + 2x + 2$
3	8	$x^8 + 2x^3 + 2$			
7	2	$x^2 + x + 3$	11	2	$x^2 + x + 7$
7	4	$x^4 + x^2 + 3x +5$	11	4	$x^4 + x + 2$

$$\begin{gathered}R_{5,S=2k}(\tau) = \{(-5^{S/2}-1);\ (-0.81\times 5^{S/2}-1);\ \ (-0.31\times 5^{S/2}-1);\ -1;\\ (0.31\times 5^{S/2}-1);\ (0.81\times 5^{S/2}-1);\ (5^{S/2}-1)\}.\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}R_{7,S=2k}(\tau) = \{(-7^{S/2}-1);\ \ (-0.9\times 7^{S/2}-1);\ \ (-0.62\times 7^{S/2}-1);\ (-0.22\times 7^{S/2}-1);\\ -1;(0.22\times 7^{S/2}-1);\ (0.62\times 5^{S/2}-1);\ (0.9\times 7^{S/2}-1);\ (7^{S/2}-1)\}.\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}R_{11,S=2k}(\tau) = \{(-11^{S/2}-1);\ (-0.96\times 11^{S/2}-1);\ (-0.84\times 11^{S/2}-1);\ (-0.65\times 11^{S/2}-1);\\ (-0.42\times 11^{S/2}-1);\ (-0.14\times 11^{S/2}-1);\ -1;(0.14\times 11^{S/2}-1);\ (0.42\times 11^{S/2}-1);\\ (0.65\times 11^{S/2}-1);\ (0.84\times 11^{S/2}-1);\ (0.96\times 11^{S/2}-1);\ (11^{S/2}-1)\}.\end{gathered} \tag{27}$$

Например, в поле $GF(7^4)$ корреляционная функция последовательностей в множестве НПП при индексах децимации $i_d = 2$, 1202 имеет уровни, определенные в (26) для $S = 4$

$$R_{7,4}(\tau) = \{-50; -45.15; -31.55; -11.9; -1; 9.9; 29.55; 43.15; 48\}.$$

При этом максимальные значения взаимной корреляции при четных S для всех значений p определяются выражением

$$|R_{1\max}| = p^{S/2} + 1, \tag{28}$$

что соответствует граничным оценкам, полученным в [5].

Таким образом, в работе получены новые индексы децимации $i_d > 2$ для определения в полях $GF(p^S)$ минимальных полиномов элементов α и α^{i_d}, на основании которых могут быть сформированы множества НПП, максимум модуля значений ПАКФ и ПВКФ которых удовлетворяет

Таблица 3. Характеристики множеств НПП при $S = 2k$

p	S	N	i_d	$\|R_{\max}\|$	$\|r_{\max}\|$	Число уровней $R_{p,S=2k}(\tau)$	V
3	2	8	2	4	0.5	5	9
	4	80	2, 14	10	0.125		81
	6	728	2, 10, 122, 374, 394	28	0.038		729
	8	6560	2, 14, 122, 1094	82	0.013		6561
5	2	24	2, 14	6	0.25	7	25
	4	624	2, 314	26	0.042		625
	6	15624	2, 26, 7814, 7838	126	0.008		15625
7	2	48	2, 13	8	0.167	9	49
	4	2400	2, 1202	50	0.021		2401
11	2	120	2, 62	12	0.1	13	121
	4	14640	2, 7322	122	0.008		14641

граничным оценкам, полученным В.М. Сидельниковым.

Для рассмотренных значений периодов $N = p^S - 1 < 20000$ ($p = 3, 5, 7, 11$) получены общие выражения для распределения значений пиков ПАКФ и ПВКФ недвоичных последовательностей. При четных S число различных уровней ПВКФ равно $p + 2$, а при нечетных S равно p, кроме значения $p = 5$, для которого число уровней равно семи. Определены максимальные значения корреляционной функции, которые при четных значениях S равны $|R_{1\max}| = p^{S/2} + 1$, а при нечетных – $|R_{2\max}| = k_p p^{(S+1)/2} + 1 = k_p p^{1/2}|R_{1\max}|$, где коэффициент k_p для рассмотренных значений p и S уменьшается от 0.5 при $p = 3$ до 0.3 при $p = 11$, причем произведение $k_p p^{1/2} \le 1$.

Полученные результаты могут быть использованы при формировании многофазных сигналов с расширенным спектром в СПЦИ, в которых требуются сигналы с низким уровнем взаимной корреляции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ипатов В.П.* Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007.
2. *Golomb S.W., Gong G.* Signal Design for Good Correlation for Wireless Communication, Cryptography and Radar. Cambridge: Univ. Press, 2005.
3. *CDMA*: прошлое, настоящее, будущее / Под ред. Л.Е. Варакина и Ю.С. Шинакова. М.: МАС, 2003.
4. *Ипатов В.П.* Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992.
5. *Сидельников В.М.* // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 3. С. 531.
6. *Trachtenberg H.M.* On the Cross-correlation Functions of Maximal Recurring Sequences. Ph.D. dissertation. Los Angeles: Univ. Southern California, 1970. 60 p. https://digitallibrary.usc.edu/CS.aspx?VP3=DamView&VBID=2A3BXZS3X99RR&SMLS=1&RW=1366&RH=657
7. *Dobbertin H., Helleseth T., Kumar P.V., Martinsen H.* // IEEE Trans. 2001. V. IT-47. № 4. P. 1473.
8. *Muller E.N.* // IEEE Trans. 1999. V. IT-45. № 1. P. 289.
9. *Hu Z., Li X., Mills D. et al.* // Applicable Algebra Eng. Commun. Comput. 2001. V. 12. P. 255.
10. *Seo E.Y., Kim Y.S., No J.S., Shin D.J.* // IEEE Trans. 2008. V. IT-54. № 7. P. 3140.
11. *Seo E.Y., Kim Y.S., No J.S., Shin D.J.* // IEICE Trans. Fund. Electron., Commun. Comput. Sci. 2007. V. E90-A. № 11. P. 2568.
12. *Jang J.W., Kim Y.S., No J.S., Helleseth T.* // IEEE Trans. 2004. V. IT-50. № 8. P. 1839.
13. *Kumar P.V., Moreno O.* // IEEE Trans. 1991. V. IT-37. № 3. P. 603.
14. *Lee Wijik, Kim J.Y., No J.S.* // IEICE Trans. on Commun. 2014. V. E97-B. № 1. P. 2311.
15. *Cho C.M., Kim J.Y., No J.S.* // IEICE Trans. on Commun. 2015. V. E98. № 7. P. 1268.
16. *Xia Y., Chen S.* // IEEE Trans. 2012. V. IT-58. № 9. P. 6037.
17. *Liang H., Tang Y.* // Finite Fields and Their Appl. 2015. V. 31. P. 137.
18. *Choi S.T., Lim T., No J.S., Chung H.* // IEEE Trans. 2012. V. IT-58. № 3. P. 1873.
19. *Song M.K., Song H.Y.* // IEEE Trans. 2021. V. IT-67. № 11. P. 7490.
20. *Boztaş S., Özbudak F., Tekin E.* // Cryptogr. Commun. 2018. V. 10. № 3. P. 509.
21. *Park K.H., Song H.Y., Kim D.S., Golomb S.W.* // IEEE Trans. 2016. V. IT-62. № 2. P. 1076.
22. *Song M.K., Song H.Y.* // IEEE Trans. 2018. V. IT-64. № 4. P. 2901.