*РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 68, № 3, с. 271–278*



*УДК 621.391.2*

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ ТРАНСФОРМИРУЮЩЕГО ТИПА СО СТИРАНИЕМ

**© 2023 г. В. В. Климов***

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация*

**E-mail: klimov47@list.ru*

Поступила в редакцию 03.04.2022 г.
После доработки 03.04.2022 г.
Принята к публикации 18.04.2022 г.

Рассмотрена задача идентификации двух источников бинарных сигналов на фоне помех трансформирующего типа со стиранием в условиях противодействия. Ситуация описывается антагонистической игрой, аналитическое решение которой дает оптимальные стратегии игроков и цену игры как функцию априорной вероятности появления одного из источников. Рассмотрены частные случаи.

**DOI:** 10.31857/S0033849423020092, **EDN:** LCIWOI

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование окружающей среды дистанционными методами требует разработки математических моделей и методов принятия оптимальных решений в условиях априорной неопределенности [1–4]. В таких ситуациях для получения гарантированного результата приходится рассматривать внешнюю среду как активного игрока, настроенного антагонистически. Данная работа и посвящена исследованию такой ситуации. Подобная постановка задачи актуальна, например, в мониторинге воздушного пространства.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется два источника $S_1$ и $S_2$ бинарных сигналов. Каждый из источников может посылать два различных сигнала $m_1$ и $m_2$, причем на каждом следующим один за другим интервале времени происходит включение источников в канал связи случайным образом.

Вероятность включения источника $S_1$ равна $P$, а источника $S_2$ – $(1-P)$. Сигналы поступают в систему наблюдения по каналу без памяти при действии нейтральных помех трансформирующего типа и помех стирания, где под помехой стирания понимается появление сигнала $m_3$, отличного от $m_1$ и $m_2$. Вероятность трансформации сигнала $m_1$ в $m_2$ или сигнала $m_2$ в $m_1$ равна $P_0$, а вероятность стирания – $S$. При этом предполагается, что вероятность искажения сигнала не превосходит 1/2, т.е. выполняется неравенство

$$P_0 + S \le 1/2. \tag{1}$$

На выходе канала связи имеется система наблюдения, в задачу которой входит обработка поступающих сигналов по определенному правилу и вынесение решения о наличии в данном дискретном интервале времени источника либо $S_1$, либо $S_2$. По условию задачи система наблюдения знает, какой из сигналов ($m_1$ или $m_2$) на данном интервале времени источник $S_1$ должен посылать. Тем не менее это не исключает ошибок при вынесении решений. Действительно, система наблюдения не знает, какой из источников был включен в канал связи; второй причиной ошибок является наличие помех трансформирующего типа и помех стирания.

Показателем качества работы системы наблюдения принимается средний выигрыш. Предполагается, что система наблюдения не имеет информации о том, какой из сигналов посылает источник $S_2$, более того, источник $S_2$ ведет себя наихудшим образом с точки зрения системы наблюдения. Таким образом, данную ситуацию можно описать антагонистической игрой, в которой первым игроком является система наблюдения в коалиции с источником $S_1$, вторым игроком является источник $S_2$.

Пусть $a$ – выигрыш системы наблюдения за правильное решение, $b$ – за неверное решение, причем $a \ge b \ge 0$.

Первый игрок стремится увеличить свой средний выигрыш; второй игрок стремится уменьшить средний выигрыш. Схема взаимодействия источников сигналов и системы наблюдения представлена на рис. 2.

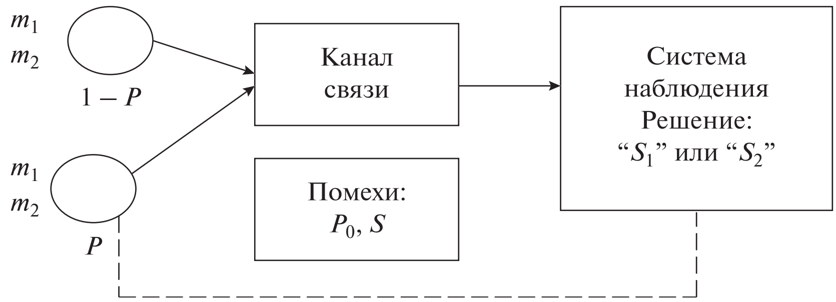


**Рис. 1.** Взаимодействие источников сигналов и системы наблюдения.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА

Опишем теперь множество чистых стратегий игроков. Источник $S_2$ может посылать один из двух сигналом $m_1$ или $m_2$. Таким образом, у второго игрока имеется только две чистых стратегий. Чистыми стратегиями первого игрока являются решающие функции. Выпишем все чистые стратегии:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= [m_1 : m_2m_3/m_1],\\
\mathbf{I}_2 &= [m_2 : m_1m_3/m_1],\\
\mathbf{I}_3 &= [m_2m_3 : m_1/m_1],\\
\mathbf{I}_4 &= [m_1m_3 : m_2/m_1],\\
\mathbf{I}_5 &= [m_1 : m_2m_3/m_2],\\
\mathbf{I}_6 &= [m_2 : m_1m_3/m_2],\\
\mathbf{I}_7 &= [m_2m_3 : m_1/m_2],\\
\mathbf{I}_8 &= [m_1m_3 : m_2/m_2],\\
\mathbf{I}_9 &= [m_3 : m_1m_2/m_1],\\
\mathbf{I}_{10} &= [m_1m_2 : m_3/m_1],\\
\mathbf{I}_{11} &= [S_1],\\
\mathbf{I}_{12} &= [S_2],\\
\mathbf{I}_{13} &= [m_3 : m_1m_2/m_2],\\
\mathbf{I}_{14} &= [m_1m_2 : m_3/m_2],
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

$$\mathbf{I} = \{I_i^j\}, \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 14, \qquad (3)$$

где элементы $I_i^j$ матрицы $\mathbf{I}$ имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
I_1^1 &= a[P(1-P_0-S) + (1-P)(1-P_0)] + {}\\
&+ b[P(P_0+S)(1-P)P_0],\\
I_2^1 &= a[PP_0 + (1-P)(P_0+S)] + {}\\
&+ b[P(1-P_0) + (1-P)(1-P_0-S)],\\
I_3^1 &= a[P(P_0+S) + (1-P)P_0] + {}\\
&+ b[P(1-P_0-S) + (1-P)(1-P_0)],\\
I_4^1 &= a[P(1-P_0) + (1-P)(1-P_0-S)] + {}\\
&+ b[PP_0 + (1-P)(P_0+S)],\\
I_5^1 &= a[PP_0 + (1-P)(1-P_0)] + {}\\
&+ b[P(1-P_0) + (1-P)P_0],\\
I_6^1 &= a[P(1-P_0-S) + (1-P)(P_0+S)] + {}\\
&+ b[P(P_0+S) + (1-P)(1-P_0-S)],\\
I_7^1 &= a[P(1-P_0) + (1-P)P_0] + {}\\
&+ b[PP_0 + (1-P)(1-P_0)],\\
I_8^1 &= a[P_0+S) + (1-P)(1-P_0-S)] + {}\\
&+ b[P(1-P_0-S) + (1-P)(P_0+S)],\\
I_9^1 &= a[PS + (1-P)(1-S)] + {}\\
&+ b[P(1-S) + (1-P)S],\\
I_{10}^1 &= a[P(1-S) + (1-P)S] + {}\\
&+ b[PS + (1-P)(1-S)],\\
I_{11}^1 &= aP + b(1-P),\\
I_{12}^1 &= a(1-P) + bP,\\
I_{13}^1 &= a[PS + (1-P)(1-S)] + {}\\
&+ b[P(1-S) + (1-P)S],\\
I_{14}^1 &= a[P(1-S) + (1-P)S] + {}\\
&+ b[PS + (1-P)(1-S)].
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Отметим, что

$$I_{13}^1 = I_9^1, \quad I_{14}^1 = I_{10}^1.$$

Элементы $I_i^2$ матрицы $\mathbf{I}$ имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
I_1^2 &= a[P(1-P_0-S) + (1-P)(P_0+S)] + {}\\
&+ b[P(P_0+S) + (1-P)(1-P_0-S)],\\
I_2^2 &= a[PP_0 + (1-P)(1-P_0)] + {}\\
&+ b[P(1-P_0) + (1-P)P_0],
\end{aligned}
$$

$$I_3^2 = a[P(P_0 + S) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\ + b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(P_0 + S)],$$

$$I_4^2 = a[P(1 - P_0) + (1 - P)P_0] + \\ + b[PP_0 + (1 - P)(1 - P_0)],$$

$$I_5^2 = a[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)] + \\ + b[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)],$$

$$I_6^2 = a[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)] + \\ + b[P(P_0 + S) + (1 - P)P_0],$$

$$I_7^2 = a[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\ + b[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)],$$

$$I_8^2 = a[P(P_0 + S) + (1 - P)P_0] + \\ + b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)],$$

$$I_9^2 = a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\ + b[P(1 - S) + (1 - P)S],$$

$$I_{10}^2 = a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\ + b[PS + (1 - P)(1 - S)], \quad (5)$$

$$I_{11}^2 = aP + b(1 - P),$$

$$I_{12}^2 = a(1 - P) + bP,$$

$$I_{13}^2 = a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\ + b[P(1 - S) + (1 - P)S],$$

$$I_{14}^2 = a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\ + b[PS + (1 - P)(1 - S)].$$

Отметим, что, как и в случае $I_i^1$, выполняется

$$I_{13}^2 = I_9^2, \quad I_{14}^2 = I_{10}^2.$$

Таким образом, стратегии $\mathbf{I}_{13}$ и $\mathbf{I}_{14}$ можно опустить.

Рассмотрим случай, когда включение источника $S_1$ в канал связи достаточно маловероятно, т.е. пусть $P \le 1/2$.

Исследуем матрицу с элементами $I_i^j$ на наличие в ней доминируемых стратегий, учитывая соотношение

$$P_0 + S \le 1/2. \quad (6)$$

Сравнивая строки матрицы $I_i^j$, получим

$$I_1^j \ge I_4^j \text{ при } j = 1,2,$$

$$I_2^j \ge I_3^j \text{ при } j = 1,2,$$

$$I_5^j \ge I_8^j \text{ при } j = 1,2;$$

$$I_6^j \ge I_7^j \text{ при } j = 1,2, \quad (7)$$

$$I_9^j \ge I_{10}^j \text{ при } j = 1,2,$$

$$I_{12}^j \ge I_{11}^j \text{ при } j = 1,2,$$

$$I_1^j \ge I_5^j \text{ при } j = 1,2,$$

$$I_6^j \ge I_2^j \text{ при } j = 1,2,$$

$$I_{12}^j \ge I_9^j \text{ при } j = 1,2.$$

Вычеркивая четвертую, третью, восьмую, седьмую, десятую, одиннадцатую, пятую, вторую, девятую стратегию (строку), получим в итоге три стратегии, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_6$, $\mathbf{I}_{12}$.

Таким образом, задача сводится к решению игры $\mathbf{I}$ размером (3 × 2), где матрица $\mathbf{I}$ им примет вид

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_6 \\ \mathbf{I}_{12} \end{array} \begin{Vmatrix} m_1 & m_2 \\ A & B \\ B & A \\ E & E \end{Vmatrix}, \quad (8)$$

где

$$A = a(1 - P_0 - PS) + b(P_0 + PS),$$

$$B = a(P + P_0 + S - 2PP_0 - 2PS) + \\ + b(1 - P_0 - P - S + 2PP_0 + 2PS),$$

$$E = a(1 - P) + bP.$$

Будем решать полученную игру графическим методом.

Пусть $y$ — вероятность выбора вторым игроком первой стратегии, $(1 - y)$ — вероятность выбора вторым игроком второй стратегии, а $Z_i$ — выигрыш первого игрока при выборе им $i$-й чистой стратегии.

Очевидно,

$i = 1$, когда выбрана стратегия $\mathbf{I}_1$;

$i = 2$, когда выбрана стратегия $\mathbf{I}_6$;

$i = 3$, когда выбрана стратегия $\mathbf{I}_{12}$.

Имеем

$$\begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} \begin{Vmatrix} y & 1-y \\ A & B \\ B & A \\ E & E \end{Vmatrix}, \quad (9)$$

где

$$Z_1 = Ay + B(1 - y),$$

$$Z_2 = By + A(1 - y),$$

$$Z_3 = E.$$

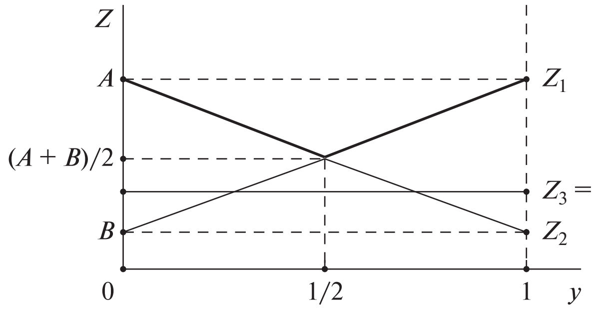


**Рис. 2.** Выигрыш первого игрока при $P \geq P_1$.

Таким образом, имеем

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= (A - B)\,y + B,\\
Z_2 &= (B - A)\,y + A,\\
Z_3 &= E.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Очевидно, что

$$
\begin{aligned}
A - B = (a - b)(1 - P)(1 - 2P_0 - S) \geq\\
\geq (a - b)\,(1 - P)(1 - 2P_0 - S) \geq 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Таким образом, получили соотношение $A \geq B$, которое понадобится нам в графическом методе. Рассмотрим два случая, которые соответствуют разным частям диапазона изменения параметра $P \in [0, 1/2]$.

*I случай*:

$$E \leq (A + B)/2, \text{ т.е.}$$
$$P \geq P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0).$$

Выигрыш первого игрока при $P \geq P_1$ представлен на рис. 2.

Из курса по теории игр [5] известно, что

$$v = \min_{y} \max_{i=1,3} Z_i(y). \tag{12}$$

На рис. 2 жирной линией представлен график функции

$$Z = \max_{i=1,3} Z_i(y), \tag{13}$$

Как следует из рис. 2, минимальное значение этой функции достигается при $y = 1/2$ и равно $(A + B)/2$.

Таким образом, цена игры равна

$$v = (A + B)/2. \tag{14}$$

Оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$
\begin{aligned}
y_1^* &= 1/2,\\
y_2^* &= 1/2.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Оптимальная стратегия первого игрока находится в результате решения уравнения

$$xA + (1 - x)B = xB + (1 - x)\,A. \tag{16}$$

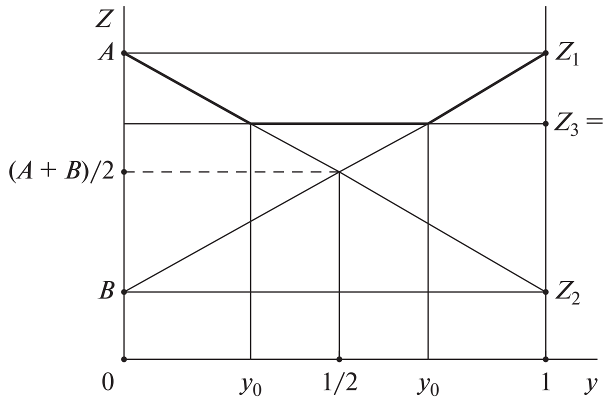


**Рис. 3.** Выигрыш первого игрока при $P \leq P_1$.

Итак, решая это уравнение относительно $x$, получим

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 1/2,\\
x_6^* &= 1/2.\\
x_{12}^* &= 0.
\end{aligned} \tag{17}
$$

По определению переменных имеем

$$A - E = (a - b)(P - P_0 - PS), \tag{18}$$

$$B - E = (a - b)(2P + P_0 + S - 2PP_0 - 2PS - 1). \tag{19}$$

По предположению случая I имеем

$$E \leq (A + B)/2. \tag{20}$$

Это неравенство эквивалентно другому неравенству

$$A - E \geq E - B, \tag{21}$$

из которого следует

$$P \geq P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0). \tag{22}$$

Цена игры как функция входящих параметров имеет вид

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P + S - 2PP_0 - 3PS)/2. \tag{23}$$

Перейдем к оставшейся части диапазона параметра $P$.

*II случай:*

$$E \geq (A + B)/2, \text{ т.е.}$$
$$P \leq P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0).$$

Выигрыш первого игрока при $P \leq P_1$ представлен на рис. 3.

Как это следует из теории игр [5], цена игры

$$v = \min_{y} \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

На рис. 3 жирной линией представлен график функции

$$Z(y) = \max_{i=1,3} Z_i(y), \tag{24}$$

Очевидно, минимум этой функции достигается на $[y_0, y^0]$.

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$y_1^* \in \left[y_0, y^0\right], \tag{25}$$

$$y_2^* = 1 - y_1^*. \tag{26}$$

Из требования $E \le A$ следует, что

$$P \ge P_0/(1-S) = P_{0S}. \tag{27}$$

Границы диапазона находятся решением уравнений

$$\begin{aligned} y_0 &= (E-A)/(B-A) = (A-E)/(A-B) = \\ &= (P - P_0 - PS)/(1-P)(1-2P_0-S). \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} y^0 &= (E-B)/(A-B) = (1-2P-P_0-S+2PP_0+2PS)/(1-P)(1-2P_0-S) = \\ &= (1-2P)(1-S-P_0)/(1-P)(1-2P_0-S). \end{aligned} \tag{29}$$

Сравнивая значения $y_0$ и $y^0$, легко заметить, что эти значения симметричны относительно точки $y = 1/2$, т.е.

$$y^0 = 1 - y_0. \tag{30}$$

Из предложения случая II следует, что

$$E \ge (A+B)/2, \tag{31}$$

из которого следует, что

$$A - E \le E - B \tag{32}$$

и это приводит к неравенству

$$P \le P_1 = (1-S)/(3-3S-2P_0). \tag{33}$$

Оптимальная стратегия первого игрока имеет вид

$$\begin{gathered} x_1^* = 0, \\ x_6^* = 0. \\ x_{12}^* = 1. \end{gathered} \tag{34}$$

Цена игры в этом случае равна

$$v = E = a(1-P) + bP. \tag{35}$$

Итак, оптимальная стратегия системы наблюдения при условии

$$x^* = I_{12} = [S_2]. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь случай, когда включение источника $S_1$ в канал связи достаточно вероятно, т.е. пусть выполняется соотношение

$$P \ge 1/2.$$

Исследуем матрицу **I** на наличие в ней доминируемых стратегий, учитывая соотношение

$$P_0 + S \le 1/2. \tag{37}$$

Сравнивая элементы строк матрицы **I**, получим

$$\begin{gathered} I_1^j \ge I_3^j \text{ при } j = 1,2; \\ I_6^j \ge I_8^j \text{ при } j = 1,2; \\ I_4^j \ge I_2^j \text{ при } j = 1,2; \\ I_7^j \ge I_5^j \text{ при } j = 1,2; \\ I_{11}^j \ge I_{12}^j \text{ при } j = 1,2; \\ I_{10}^j \ge I_9^j \text{ при } j = 1,2; \\ I_4^j \ge I_1^j \text{ при } j = 1,2; \\ I_7^j \ge I_6^j \text{ при } j = 1,2; \\ I_{11}^j \ge I_{10}^j \text{ при } j = 1,2. \end{gathered} \tag{38}$$

Вычеркивая третью, восьмую, вторую, пятую, двенадцатую, девятую, первую, шестую, десятую стратегию (строку), получим в итоге три стратегии: $\mathbf{I_4}$, $\mathbf{I_7}$, $\mathbf{I_{11}}$.

Таким образом, задача сводится к решению игры с платежной матрицей **I** размером (3 × 2), где элементы матрицы имеют следующий вид:

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_7 \\ \mathbf{I}_{11} \end{array} \left\| \begin{matrix} m_1 & m_2 \\ C & D \\ D & C \\ F & F \end{matrix} \right\|, \tag{39}$$

где

$$\begin{gathered} C = a(1 - P_0 - S + PS) + b(P_0 + S - PS), \\ D = a(P + P_0 - 2PP_0) + b(1 - P - P_0 + 2PP_0), \\ F = aP + b(1-P). \end{gathered}$$

Будем решать полученную игру графическим методом. Пусть $y$ – вероятность выбора вторым игроком первой стратегии, $(1 - y)$ – вероятность выбора вторым игроком второй стратегии, а $Z_i$ – выигрыш первого игрока при выборе им $i$-й чистой стратегии.

Очевидно, случаю

$i = 1$, соответствует стратегия $\mathbf{I}_4$,

$i = 2$, соответствует стратегия $\mathbf{I}_7$,

$i = 3$, соответствует стратегия $\mathbf{I}_{12}$.

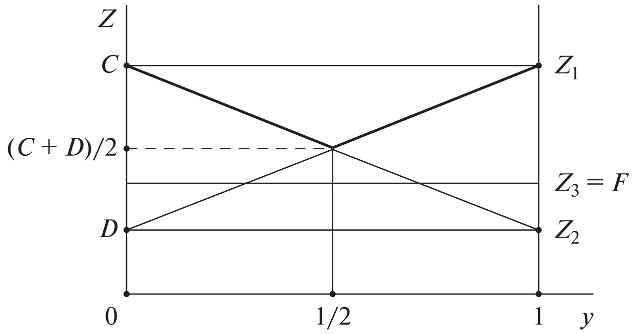


**Рис. 4.** Выигрыш первого игрока при $P \le P_2$.

Итак, имеем

$$\begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array}\left\|\begin{array}{cc} y & 1-y \\ C & D \\ D & C \\ F & F \end{array}\right\|, \quad (40)$$

где

$$Z_1 = Cy + D(1-y),$$
$$Z_2 = Dy + C(1-y),$$
$$Z_3 = F.$$

Приведя подобные члены, получим

$$\begin{gathered} Z_1 = (C-D)\,y + D, \\ Z_2 = (D-C)\,y + C, \\ Z_3 = F. \end{gathered} \quad (41)$$

Сравнивая между собой значения $C$ и $D$, получим

$$\begin{gathered} C - D = a(1 - P - 2P_0(1-P) - S + PS) + \\ + b(2P_0 + S - PS - 1 + P - 2PP_0) = \\ = (a-b)(1-P)(1-2P_0-S) \ge \\ \ge (a-b)(1-P)(1-2P_0-2S) \ge 0\,. \end{gathered} \quad (42)$$

I случай: $F \le (C + D)/2$, или $P \le (1 - S)/(1 - S) + 2P_0) = P_2$.

Выигрыш первого игрока при $P \le P_2$ представлен на рис. 4:

$$v = \min_y \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

На рис. 4 жирной линией представлен график функции

$$Z(y) = \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

Как следует из графика, минимальное значение функции $Z(y)$ достигается при $y = 1/2$ и равно $(C + D)/2$. Значит, цена игры

$$v = (C + D)\big/2. \quad (43)$$

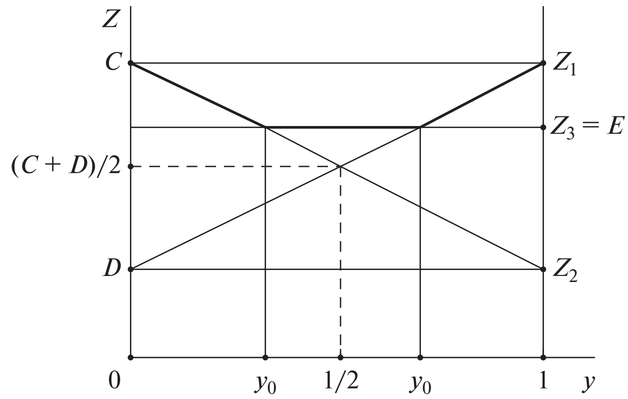


**Рис. 5.** Выигрыш первого игрока при $P \ge P_2$.

Оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$\begin{gathered} y_1^* = 1\big/2, \\ y_2^* = 1\big/2. \end{gathered} \quad (44)$$

Оптимальная стратегия первого игрока находится в виде решения относительно $x$ уравнения

$$xC + (1-x)D = xD + (1-x)C. \quad (45)$$

Итак, решение этого уравнения дает

$$\begin{gathered} x_4^* = 1\big/2, \\ x_7^* = 1\big/2, \\ x_{11}^* = 0. \end{gathered} \quad (46)$$

Очевидно, неравенство $F \le (C + D)/2$ равносильно неравенству

$$(C-F) + (D-F) \ge 0, \quad (47)$$

$$\begin{gathered} C - F = a(1 - P_0 - S + PS - P) + \\ + b(-1 + P + P_0 + S - PS) = \\ = (a-b)(1 - P - P_0 - S + P), \end{gathered} \quad (48)$$

$$\begin{gathered} D - F = a(P_0 - 2PP_0) + \\ + b(-P_0 + 2PP_0) = (a-b)P_0(1-2P). \end{gathered} \quad (49)$$

Отсюда следует

$$P \le (1-S)\big/(1 - S + 2P_0) = P_2. \quad (50)$$

Цена игры в этом случае

$$v = (a+b)\big/2 + (a-b)(P - S - 2PP_0 + PS)\big/2. \quad (51)$$

Перейдем к оставшейся части диапазона параметра $P$.

$$F \ge (C + D)\big/2, \text{ или } P \ge (1-S)\big/(1 - S + 2P_0) = P_2.$$

Выигрыш первого игрока при $P \ge P_2$ представлен на рис. 5.

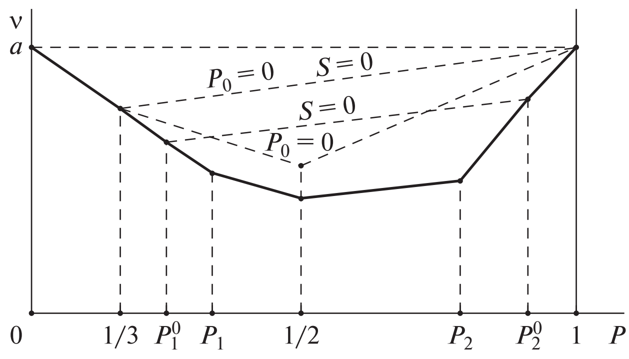


**Рис. 6.** Зависимость цены игры от априорной вероятности.

Из теории игр известно [5], что цена игры равна

$$v = \min_{y} \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

На рис. 5 жирной линией представлен график функции

$$Z(y) = \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

Минимум ее достигается на отрезке $[y_0, y^0]$.

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$y_1^* \in [y_0, y^0],$$

$$y_2^* = 1 - y_1^*.$$

Границы данного диапазона имеют вид

$$\begin{aligned} y_0 &= (F - C)/(D - C) = (C - F)/(C - D) = \\ &= (1 - P - P_0 - S + PS)/(1 - P)(1 - 2P_0 - S), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} y^0 &= (F - D)/(C - D) = \\ &= (2PP_0 - P_0)/(1 - P)(1 - 2P_0 - S). \end{aligned} \quad (53)$$

Легко видеть, что $y_0$ и $y^0$ симметричны относительно $y = 1/2$, т.е.

$$y_0 = 1 - y^0.$$

Оптимальная стратегия первого игрока имеет вид

$$\begin{gathered} x_4^* = 0, \\ x_7^* = 0, \\ x_{11}^* = 1. \end{gathered} \quad (54)$$

Цена игры на этой части диапазона равна

$$v = aP + b(1 - P). \quad (55)$$

Итак, получим четыре интервала параметра $P$:

$$[0, P_1],\ [P_1, 1/2],\ [1/2, P_2],\ [P_2, 1].$$

Зависимость цены игры от априорной вероятности представлена на рис. 6.

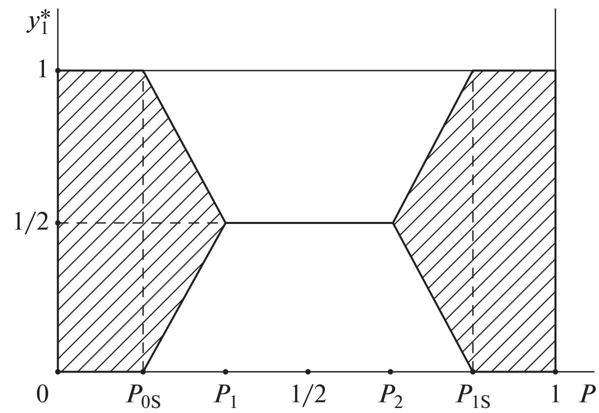


**Рис. 7.** Оптимальная стратегия второго игрока.

На графике приведены также и частные случаи задачи: полное отсутствие помех ($P_0 = 0,\ S = 0$), случай отсутствия стирания ($S = 0$), случай отсутствия помех трансформации ($P_0 = 0$).

Значения параметров, отмеченных на графике, имеют вид

$$P_1 = (1 - S)/(1 - 3S - 2P_0), \quad (56)$$

$$P_2 = (1 - S)/(1 - S + 2P_0), \quad (57)$$

$$P_1^0 = 1/(3 - 2P_0), \quad (58)$$

$$P_2^0 = 1/(1 + 2P_0). \quad (59)$$

Итак, при $P \le P_1$ цена игры равна

$$v = a(1 - P) + bP, \quad (60)$$

при $P_1 \le P \le 1/2$ цена игры –

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P + S - 2PP_0 - 3PS)/2, \quad (61)$$

при $1/2 \le P \le P_2$ цена игры –

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P - S - 2PP_0 + PS)/2, \quad (62)$$

при $P_2 \le P$ цена игры –

$$v = aP + b(1 - P). \quad (63)$$

Оптимальная стратегия второго игрока представлена на рис. 7.

Значения параметров имеют вид

$$P_{0S} = P_0/(1 - S), \quad (64)$$

$$P_{1S} = (1 - P_0 - S)/(1 - S). \quad (65)$$

Очевидно, что $P_{0S}$ и $P_{1S}$ симметричны относительно $P = 1/2$,

$$P_{0S} = 1 - P_{1S}. \quad (66)$$

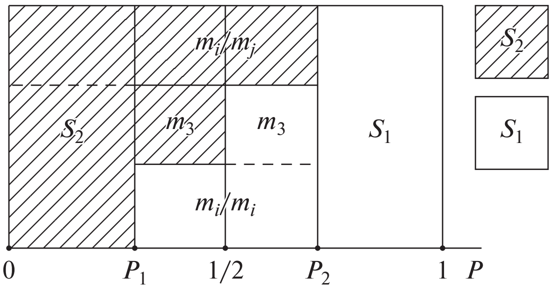


**Рис. 8.** Оптимальная стратегия системы наблюдения.

## 3. ИТОГОВОЕ ПРАВИЛО

Решающее правило системы имеет вид:
на отрезке $[0, P_1]$ принимается решение “$S_2$”

$$m_1 : m_2 m_3 / m_1\} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (67)$$

на отрезке $[P_1, 1/2]$ – решение

$$m_2 : m_1 m_3 / m_2\} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (68)$$

или решение

$$m_1 m_3 : m_2 / m_1\} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (69)$$

на отрезке $[1/2, P_2]$ – решение

$$m_2 m_3 : m_1 / m_2\} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (70)$$

на отрезке $[P_2, 1]$ принимается решение “$S_1$”.

Оптимальное решение можно представить при ($i \neq j$) на рис. 8.

Решающее правило системы наблюдения можно представить и в другой форме. Итоговое решающее правило системы наблюдения представлено на рис. 9.

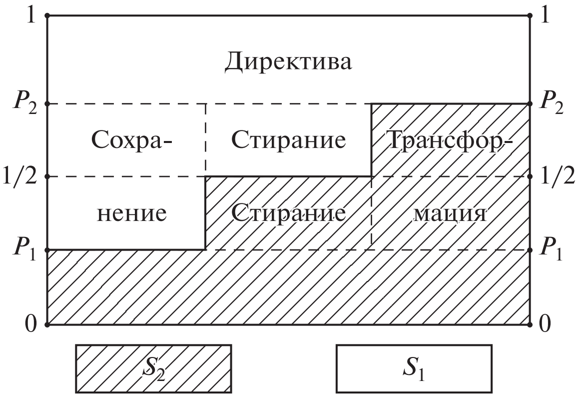


**Рис. 9.** Итоговое решающее правило системы наблюдения.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках госзадания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Климов В.В.* // Вопросы математического моделирования. М. ИРЭ АН СССР, 1979. С.25.
2. *Крапивин В.Ф.* Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. М.: Сов. радио, 1972.
3. *Климов В.В.* // Экологические системы и приборы. 2000. № 5. С. 2.
4. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
5. *Дрешер М.* Стратегические игры. Теория и приложения. М.: Сов. радио, 1964.