РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 68, № 5, с. 472–481

## ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

# ГЕОМЕТРИЗОВАННЫЕ МОДЕЛИ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

© 2023 г. В. А. Сыровой*

*ВЭИ – филиал ФГУП “РФЯЦ-ВНИИТФ им. акад. Е.И. Забабахина”,*
*ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация*

**E-mail: red@cplire.ru*

Поступила в редакцию 10.12.2021 г.
После доработки 10.12.2021 г.
Принята к публикации 25.12.2022 г.

Во втором приближении в системе координат $x^i$, $i = 1, 2, 3$, связанной с трубками тока $x^2 = \mathrm{const}$, сформулированы уравнения осесимметричных и плоскосимметричных электростатических потоков в трех вариантах геометризованной теории: в $l$-представлении, продольная координата $x^1$ не связана с физическими параметрами пучка, в $\varphi$- и $W$-представлениях, когда в качестве $x^1$ используется потенциал электростатического поля $x^1 = \varphi$ или потенциал обобщенного импульса $x^1 = W$.

**DOI:** 10.31857/S0033849423050157, **EDN:** UIKKDZ

## ВВЕДЕНИЕ

Геометризованная теория [1, 2] основана на новой форме уравнений пучка, записанных в заранее неизвестной системе координат $x^i$, $i = 1, 2, 3$, которая связана с траекториями (линии $x^1$) или трубками тока (поверхности $x^2 = \mathrm{const}$). Условия эвклидовости пространства (шесть тождеств Ляме – нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка относительно элементов метрического тензора $g_{ik}$) дополняют уравнения для физических параметров потока.

Система $x^i$ в общем случае неортогональна. Для двумерных пучков при неспециализированной продольной координате $x^1$ выполнение условий термоэмиссии обеспечивается локальной неортогональностью системы вблизи сингулярной стартовой поверхности. Уравнения, описывающие двумерные потоки, удалось представить как соотношение на трубке тока вместе с системой эволюционных уравнений. Первое имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка по координате $x^1$, в которое поперечная координата $x^2$ входит как параметр. Эволюционные уравнения выражают первые производные по $x^2$ от геометрических и физических характеристик потока через данные, известные на базовой трубке тока. В отличие от параксиального приближения эти соотношения являются точными.

Упомянутая декомпозиция исходной системы позволяет построить первое приближение теории, перейдя при помощи эволюционных уравнений на соседнюю трубку тока. Уже в этом приближении линейный по $x^2$ член в квадратичной по $x^2$ формуле для потенциала $\varphi$ учитывает пространственный заряд пучка в отличие от аналогичной конструкции при параксиальном подходе. Кроме того, геометризованный формализм допускает рассмотрение релятивистских пучков с произвольно ориентированным магнитным полем на катоде при эмиссии в $\rho$- и $T$-режимах – задача, недоступная для классической параксиальной теории или теории Овчарова [3] и Овчарова и Пензякова [4]. Алгоритм построения высших приближений сводится к дифференцированию по $x^2$ нужное количество раз соотношения на трубке тока и уравнений эволюционной системы и исключении возникающих производных по поперечной координате с помощью эволюционной системы предыдущего приближения.

Продольная координата $x^1$ на базовой трубке тока может быть определена как произвольная функция длины дуги $l$ образующей (направляющей), поэтому этот вариант теории удобно называть $l$-представлением. В работах [5–7] в качестве продольной координаты во всем поле течения предложено использовать потенциал электрического поля $x^1 = \varphi$ ($\varphi$-представление). От $l$- к $\varphi$-представлению нельзя перейти по формулам, связывающим две криволинейные системы. Изменение статуса потенциала от искомой функции к независимой переменной меняет структуру исходных уравнений, в частности, уравнение Пуассона становится уравнением первого порядка. В работе [8] при тестировании геометризованных моделей показано, что использование $\varphi$-представления может повышать точность приближенного решения.

Третий вариант геометризованной теории возможен для релятивистских потенциальных потоков с $x^1 = W$, где $W$ – потенциал обобщенного импульса ($W$-представление) [9].

Цель работы – формулировка задачи расчета двумерных электростатических электронных пучков с прямой осью во втором приближении при использовании всех трех представлений геометризованной теории.

## 1. ТЕОРИЯ В $l$-ПРЕДСТАВЛЕНИИ

*Искривленные трубки тока*. Для описания двумерных электростатических пучков в $l$-представлении можно использовать ортогональную систему $x^i$. Соотношение на искривленной трубке тока в этом случае определено формулой

$$\begin{gathered}2\varphi\frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} + \frac{1}{h_1}\varphi_{,1}\frac{1}{h_1}h_{2,1} + h_2\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1}\varphi_{,1}\right)_{,1} - \right.\\ \left. - k_2\mathrm{tg}\theta\frac{1}{h_1}\varphi_{,1} + 2\left(2k_1^2 - k_1k_2\right)\varphi\right] = \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3u}, \\ u^2 = 2\varphi, \quad E_\nu = 2k_1\varphi.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $k_1$, $k_2$ – главные кривизны поверхности $x^2 = \mathrm{const}$, $\theta$ – угол наклона трубки тока к оси $z$, $u$ – скорость, $E_\nu$ – нормальное электрическое поле, $J$ – плотность тока эмиссии. Для частных производных и элементов метрического тензора $g_{ik}$ приняты обозначения

$$\begin{gathered}h_{2,1} \equiv \partial h_2/\partial x^1, \quad \varphi_{,2} \equiv \partial\varphi/\partial x^2, \\ g_{11} = h_1^2, \quad g_{22} = h_2^2, \quad g_{33} = h_3^2.\end{gathered} \tag{2}$$

Нижний индекс нуль относит значение соответствующей величины к катоду $x^1 = 0$. Уравнение (1) и все последующие формулы записаны в нормировках, исключающих из уравнений пучка все физические постоянные используемой системы единиц.

При переходе к прямой оси для осесимметричных пучков $k_2 \to \infty$

$$k_2 = -\cos\theta/h_3, \quad h_3 = R, \tag{3}$$

что требует раскрытия возникающих неопределенностей. В плоском случае $k_2 = 0$, $h_3 = 1$.

Эволюционная система первого порядка образована уравнениями

$$\begin{gathered}z_{,2} = -h_2\sin\theta, \quad R_{,2} = h_2\cos\theta, \\ \theta_{,2} = \frac{h_{2,1}}{h_1}, \quad k_{1,2} = \frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} + h_2k_1^2, \\ h_{1,2} = -h_1h_2k_1, \quad \varphi_{,2} = h_2E_\nu, \quad u_{,2} = h_2k_1u, \\ E_{\nu,2} = 2\varphi\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} + 3h_2k_1^2\right].\end{gathered} \tag{4}$$

*Первое приближение, уравнения на оси*. Для перехода к оси пучка с $x^1 = z$ в осесимметричном случае необходимо раскрыть неопределенности в членах $k_1k_2$, $k_2\mathrm{tg}\theta$, $h_{30}/h_3$. С учетом соотношений эволюционной системы (4) и определения $k_2$ из (3) вблизи оси получаем

$$\begin{gathered}R = R_{,2}y, \quad \theta = \theta_{,2}y, \quad k_2 = -1/(R_{,2}y), \\ k_1 = k_{1,2}y, \quad y \equiv x^2; \quad k_1k_2 = -\frac{k_{1,2}}{h_2} = -\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1}, \\ k_2\mathrm{tg}\theta = -\frac{\theta_{,2}}{h_2} = -\frac{h_{2,1}}{h_1h_2}, \quad \frac{h_{30}}{h_3} = \frac{h_{20}}{h_2}.\end{gathered} \tag{5}$$

В случае осесимметричных и плоских систем на оси пучка $x^1 = z$, $h_1 = 1$ и уравнение (1) принимает соответственно вид

$$\begin{gathered}h_{2,11} + \frac{1}{2}\bar\varphi_{,1}h_{2,1} + \frac{1}{4}\bar\varphi_{,11}h_2 = \frac{h_{20}^2J}{2h_2u^3}, \\ h_{2,11} + \frac{1}{2}\bar\varphi_{,1}h_{2,1} + \frac{1}{2}\bar\varphi_{,11}h_2 = \frac{h_{20}J}{u^3}, \\ \bar\varphi_{,1} \equiv \varphi_{,1}/\varphi, \quad \bar\varphi_{,11} \equiv \varphi_{,11}/\varphi.\end{gathered} \tag{6}$$

Эволюционная система образована уравнениями

$$\begin{gathered}z_{,2} = 0, \quad h_{1,2} = 0, \quad h_{2,2} = 0, \\ \varphi_{,2} = 0, \quad u_{,2} = 0, \quad J_{,2} = 0; \\ R_{,2} = h_2, \quad \theta_{,2} = h_{2,1}, \quad k_{1,2} = h_{2,11}, \\ E_{\nu,2} = 2\varphi h_{2,11}.\end{gathered} \tag{7}$$

Параметры с нулевыми производными в (7) являются четными, а с отличными – нечетными функциями $x^2$.

*Второе приближение*. Выполнив двукратное дифференцирование по $x^2$ соотношения на трубке тока (1) и переходя к оси с использованием уравнений (7), имеем

$$2\varphi\left(h_{2,2211}-2h_{2,11}h_{1,22}-h_{2,1}h_{1,221}\right)+2\varphi_{,22}h_{2,11}+$$
$$+\left(\varphi_{,221}-2\varphi_{,1}h_{1,22}\right)h_{2,1}+\varphi_{,1}h_{2,221}+\left(\varphi_{11}-k_2\,\mathrm{tg}\theta\varphi_{,1}-\right.$$
$$\left.-\,2k_1k_2\varphi\right)h_{2,22}=\Big[-8k_{1,2}^2\varphi+2\left(k_1k_2\right)_{,22}\varphi+$$
$$+\,2k_1k_2\varphi_{,22}+\left(k_2\,\mathrm{tg}\theta\right)_{,22}\varphi_{,1}+k_2\,\mathrm{tg}\theta\left(\varphi_{,221}-\varphi_{,1}h_{1,22}\right)-\quad(8)$$
$$-\,\varphi_{,2211}+2\varphi_{,11}h_{1,22}+\varphi_{,1}h_{1,221}\Big]h_2+$$
$$+\,\frac{h_{20}J}{u}\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22}+\frac{h_{20}J}{u}\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)\left(\frac{J_{,22}}{J}-\frac{u_{,22}}{u}\right).$$

Эволюционная система второго порядка, получаемая по тому же алгоритму, что и соотношение (8), включает уравнения

$$z_{,22}=-h_2h_{2,1},\quad h_{1,22}=-h_2h_{2,11},$$
$$\varphi_{,22}=h_2E_{\nu,2},\ u_{,22}=h_2h_{2,11}u. \tag{9}$$

Высшие производные нечетных функций определены формулами

$$R_{,222}=h_{2,22}-h_2h_{2,1}^2,\quad \theta_{,222}=h_{2,221}-h_{2,1}h_{1,22},$$
$$k_{1,222}=h_{2,2211}+h_2h_{2,1}h_{2,111}+4h_2h_{2,11}^2+h_{2,1}^2h_{2,11}, \tag{10}$$
$$E_{\nu,222}=2\varphi\left(h_{2,2211}+h_2h_{2,1}h_{2,111}+10h_2h_{2,11}^2+h_{2,1}^2h_{2,11}\right).$$

Четвертые производные четных функций могут быть выражены через $h_{2,22}$

$$z_{,2222}=-h_2h_{2,221}-3h_{2,1}h_{2,22}-h_2^2h_{2,1}h_{2,11}+h_2h_{2,1}^3,$$
$$h_{1,2222}=-h_2k_{1,222}-3\left(h_{2,22}+h_2h_{1,22}\right)k_{1,2},$$
$$\varphi_{,2222}=h_2E_{\nu,222}+3h_{2,22}E_{\nu,2}, \tag{11}$$
$$uu_{,2222}=\varphi_{,2222}-3u_{,22}^2.$$

*Параметры потока*. Известные на оси производные (9)–(11) позволяют построить фрагменты рядов Тэйлора по поперечной координате $x^2\equiv y$ для искомых параметров задачи

$$h_1=1+\frac{1}{2}h_{1,22}y^2+\frac{1}{24}h_{1,2222}y^4,\quad h_2=h_{20}+\frac{1}{2}h_{2,22}y^2,$$
$$\varphi=U+\frac{1}{2}\varphi_{,22}y^2+\frac{1}{24}\varphi_{,2222}y^4,$$
$$E_\nu=E_{\nu,2}y+\frac{1}{6}E_{\nu,222}y^3,\quad \theta=\theta_{,2}y+\frac{1}{6}\theta_{,222}y^3, \tag{12}$$
$$k_1=k_{1,2}y+\frac{1}{6}k_{1,222}y^3,\quad Z=z+\frac{1}{2}z_{,22}y^2+\frac{1}{24}z_{,2222}y^4,$$
$$R=R_{,2}y+\frac{1}{6}R_{,222}y^3.$$

Последние два соотношения при фиксированном значении $y$ определяют конфигурацию трубки тока, а при $z=\mathrm{const}$ являются параметрическими уравнениями для ортогональной трубкам тока поверхности.

*Вспомогательные соотношения*. Для приведения уравнения (8) к окончательному виду необходимо вычислить функции $\varphi_{,221}$, $\varphi_{,2211}$, $h_{1,221}$, $h_{2,111}$ и раскрыть неопределенности в случае осесимметричных течений. Для последних имеем

$$\varphi_{,221}=h_2E_{\nu,21}+h_{2,1}E_{\nu,2},\quad E_{\nu,21}=-\frac{1}{2}h_2\varphi_{,111}-$$
$$-\,\frac{3}{2}h_{2,1}\varphi_{,11}-h_{2,11}\varphi_{,1}-\frac{h_{20}^2J}{2h_2u}\left(\frac{h_{2,1}}{h_2}+\frac{1}{2}\overline{\varphi}_{,1}\right),$$
$$\varphi_{,221}=-\frac{1}{2}h_2^2\varphi_{,111}-2h_2h_{2,1}\varphi_{,11}-\left(h_2h_{2,11}+h_{2,1}^2\right)\varphi_{,1}-$$
$$-\,\frac{h_{20}^2J}{4u}\overline{\varphi}_{,1},\quad \varphi_{,2211}=-\frac{1}{2}h_2^2\varphi_{,1111}-3h_2h_{2,1}\varphi_{,111}-$$
$$-\,3\left(h_2h_{2,11}+h_{2,1}^2\right)\varphi_{,11}-\left(h_2h_{2,111}+3h_{2,1}h_{2,11}\right)\varphi_{,1}-\quad(13)$$
$$-\,\frac{h_{20}^2J}{4u}\left(\overline{\varphi}_{,11}-\frac{3}{2}\overline{\varphi}_{,1}^2\right),\quad h_{1,221}=-h_2h_{2,111}-h_{2,1}h_{2,11},$$
$$h_{2,111}=-\frac{1}{4}h_2\left(\overline{\varphi}_{,111}-\overline{\varphi}_{,1}\overline{\varphi}_{,11}\right)-$$
$$-\,\frac{1}{2}\left(h_{2,11}\overline{\varphi}_{,1}+\frac{3}{2}h_{2,1}\overline{\varphi}_{,11}-h_{2,1}\overline{\varphi}_{,1}^2\right)-$$
$$-\,\frac{h_{20}^2J}{2h_2u^3}\left(\frac{h_{2,1}}{h_2}+\frac{3}{2}\overline{\varphi}_{,1}\right).$$

В плоском случае выражения (13) принимают вид

$$\varphi_{,221}=-h_2^2\varphi_{,111}-3h_2h_{2,1}\varphi_{,11}-\left(h_2h_{2,11}+h_{2,1}^2\right)\varphi_{,1}+$$
$$+\,\frac{h_{20}J}{u}\left(h_{2,1}-\frac{1}{2}h_2\overline{\varphi}_{,1}\right),\quad \varphi_{,2211}=-h_2{}^2\varphi_{,1111}-$$
$$-\,5h_2h_{2,1}\varphi_{,111}-4\left(h_2h_{2,11}+h_{2,1}{}^2\right)\varphi_{,11}-$$
$$-\left(h_2h_{2,111}+3h_{2,1}h_{2,11}\right)\varphi_{,1}+\quad(14)$$
$$+\,\frac{h_{20}J}{u}\left(-\frac{1}{2}h_2\overline{\varphi}_{,11}+\frac{3}{4}h_2\overline{\varphi}_{,1}{}^2-h_{2,1}\overline{\varphi}_{,1}+h_{2,11}\right),$$
$$h_{2,111}=-\frac{1}{2}h_2\left(\overline{\varphi}_{,111}-\overline{\varphi}_{,1}\overline{\varphi}_{,11}\right)-$$
$$-\,\frac{1}{2}\left(h_{2,11}\overline{\varphi}_{,1}+2h_{2,1}\overline{\varphi}_{,11}-h_{2,1}\overline{\varphi}_{,1}^2\right)-\frac{3}{2}\frac{h_{20}J}{u^3}\overline{\varphi}_{,1}.$$

*Раскрытие неопределенностей*. Для раскрытия неопределенностей на оси $z$ необходимо использовать приосевые разложения параметров потока (12) и соотношения

$$\sin\theta=\theta_{,2}y+\frac{1}{6}\left(\theta_{,222}-\theta_{,2}^3\right)y^3,$$
$$\cos\theta=1-\frac{1}{2}\theta_{,2}^2y^2,\quad R_0=\left(R_{,2}y+\frac{1}{6}R_{,222}y^3\right)_0;$$
$$\left(k_1k_2\right)_{,22}=\frac{1}{R_{,2}}\left[-\frac{1}{3}k_{1,222}+\left(\frac{1}{3}\frac{R_{,222}}{R_{,2}}+\theta_{,2}^2\right)k_{1,2}\right], \tag{15}$$
$$\left(k_2\,\mathrm{tg}\theta\right)_{,22}=-\frac{1}{3}\frac{1}{h_2}\left(\theta_{,222}-\theta_{,2}^3-\theta_{,2}\frac{R_{,222}}{R_{,2}}\right),$$
$$\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22}=\frac{1}{3}\frac{h_{20}}{R_{,2}}\left[-\frac{R_{,222}}{R_{,2}}+\left(\frac{R_{,222}}{h_2}\right)_0\right].$$

Используя формулы (10), (15), получаем

$$
\begin{gathered}
(k_1k_2)_{,22} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_2}h_{2,2211} - \frac{1}{h_2^2}h_{2,11}h_{2,22} + \right.\\
\left. + h_{2,1}h_{2,111} + 4h_{2,11}^2 - \frac{1}{h_2}h_{2,1}^2h_{2,11}\right), \quad (k_2\mathrm{tg}\theta)_{,22} = \\
= -\frac{1}{3}\frac{1}{h_2}\left(h_{2,221} - \frac{1}{h_2}h_{2,1}h_{2,22} + h_2h_{2,1}h_{2,11}\right), \\
\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22} = \frac{1}{3}\frac{h_{20}}{h_2}\left[-\frac{1}{h_2}h_{2,22} + h_{2,1}^2 - \left(h_{2,1}^2\right)_0\right].
\end{gathered} \tag{16}
$$

*Соотношение на оси во втором приближении.* Пользуясь приведенными выше формулами, представим уравнение (8) в окончательном виде. В осесимметричном случае имеем

$$
\begin{gathered}
h_{2,2211} = -\frac{1}{2}\bar{\varphi}_{,1}h_{2,221} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\bar{\varphi}_{,11} + \frac{J}{h_2^2u^3}\right)h_{2,22} + \\
+ \frac{3}{16}h_2^3\bar{\varphi}_{,1111} + \frac{7}{4}h_2^2h_{2,1}\bar{\varphi}_{,111} + \\
+ \left(\frac{3}{8}h_2^2h_{2,11} + \frac{27}{8}h_2h_{2,1}^2\right)\bar{\varphi}_{,11} + \\
+ \frac{3}{4}h_{2,1}\left(h_2h_{2,11} + h_{2,1}^2\right)\bar{\varphi}_{,1} - \frac{1}{2}h_2h_{2,1}^2\bar{\varphi}_{,1}^2 - \\
- \frac{1}{4}h_2^2h_{2,1}\bar{\varphi}_{,1}\bar{\varphi}_{,11} - \frac{17}{2}h_2h_{2,11}^2 - \frac{1}{2}h_{2,1}^2h_{2,11} + \\
+ \frac{h_{20}^2J}{h_2u^3}\left(-\frac{3}{4}h_2h_{2,11} + \frac{1}{2}h_{2,1}^2 - \frac{1}{4}\kappa_{10}^2 + \frac{3}{16}h_2^2\bar{\varphi}_{,11} - \right.\\
\left. - \frac{9}{32}h_2^2\bar{\varphi}_{,1}^2 + \frac{9}{8}h_2h_{2,1}\bar{\varphi}_{,1} + \frac{3}{4}\bar{J}_{,22}\right).
\end{gathered} \tag{17}
$$

Здесь $\kappa_{10}$ – кривизна катода на оси, $\bar{J}_{,22} \equiv J_{,22}/J$.

Плоские пучки описываются уравнением

$$
\begin{gathered}
h_{2,2211} = -\frac{1}{2}\bar{\varphi}_{,1}h_{2,221} - \frac{1}{2}\bar{\varphi}_{,11}h_{2,22} + \frac{1}{2}h_2^3\bar{\varphi}_{,1111} + \\
+ \frac{7}{2}h_2{}^2h_{2,1}\bar{\varphi}_{,111} + \left(-\frac{1}{2}h_2{}^2h_{2,11} + 4h_2h_{2,1}{}^2\right)\bar{\varphi}_{,11} - \\
- \frac{5}{2}h_2h_{2,1}h_{2,11}\bar{\varphi}_{,1} - \frac{1}{2}h_2{}^3\bar{\varphi}_{,11}{}^2 - \\
- 2h_2h_{2,1}{}^2\bar{\varphi}_{,1}{}^2 - \frac{5}{2}h_2{}^2h_{2,1}\bar{\varphi}_{,1}\bar{\varphi}_{,11} - 9h_2h_{2,11}{}^2 - \\
- 2h_{2,1}{}^2h_{2,11} + \frac{h_{20}J}{u^3}\times \\
\times\left(-h_2h_{2,11} + \frac{3}{2}h_2{}^2\bar{\varphi}_{,11} - \frac{3}{4}h_2{}^2\bar{\varphi}_{,1}{}^2 + 6h_2h_{2,1}\bar{\varphi}_{,1} + \bar{J}_{,22}\right).
\end{gathered} \tag{18}
$$

*Прикатодные асимптотики.* Потенциал $\varphi$ и коэффициент Ляме $h_2$ на оси вблизи катода представимы в виде разложений

$$
\begin{gathered}
\varphi = \varphi_4 z^{4/3}\left(1 + \bar{\varphi}_7 z + \bar{\varphi}_{10}z^2 + \bar{\varphi}_{13}z^3 + \bar{\varphi}_{16}z^4 + \ldots\right), \\
h_2 = b_0\left(1 + \bar{b}_3 z + \bar{b}_6 z^2 + \bar{b}_9 z^3 + \bar{b}_{12}z^4 + \ldots\right).
\end{gathered} \tag{19}
$$

Подстановка функций (19) в уравнение (6) для осесимметричных потоков приводит к следующим связям коэффициентов:

$$
\begin{gathered}
2\varphi_4 = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3}, \quad \bar{\varphi}_7 = -\frac{16}{15}\bar{b}_3, \quad \bar{\varphi}_{10} = -\frac{16}{9}\bar{b}_6 + \frac{163}{150}\bar{b}_3^2, \\
\bar{b}_9 = \frac{9}{74}\left(\frac{4898}{405}\bar{b}_3\bar{b}_6 - \frac{122029}{30375}\bar{b}_3^3 - \frac{11}{3}\bar{\varphi}_{13}\right), \\
\bar{b}_{12} = \frac{9}{268}\left(\frac{3004}{135}\bar{b}_3\bar{b}_9 + \frac{2114}{81}\bar{b}_6^2 - \frac{201877}{12150}\bar{b}_3^2\bar{b}_6 - \right.\\
\left. - \frac{3166}{18225}\bar{b}_3^4 + \frac{1}{12}\bar{\varphi}_{10}^2 - \frac{523}{45}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{13} - \frac{35}{3}\bar{\varphi}_{16}\right).
\end{gathered} \tag{20}
$$

Функция $\bar{b}_{3,22}$, необходимая при формулировке начальных данных для уравнения (17), может быть выражена через коэффициенты $\bar{b}_3$, $\bar{b}_6$, $\bar{b}_9$ [1, 2]

$$
\frac{1}{b_0^2}\bar{b}_{3,22} = -\frac{45}{2}\bar{b}_9 - \frac{13}{2}\bar{b}_3\bar{b}_6. \tag{21}
$$

Те, в свою очередь, определены коэффициентами $\bar{\varphi}_7$, $\bar{\varphi}_{10}$, $\bar{\varphi}_{13}$ разложения потенциала на оси. Таким образом, задание $\varphi(z)$ позволяет вычислить правую часть в формуле (21).

Если в качестве $x^2$ на катоде $x^1 = 0$ использовать отсчитанную вдоль него длину дуги, то начальные условия для интегрирования уравнения (17) определены формулами

$$
\begin{gathered}
h_{20} = b_0 = 1, \ (h_{2,22})_0 = b_{0,22} = 0, \\
(h_{2,221})_0 = b_{3,22}.
\end{gathered} \tag{22}
$$

В случае плоских потоков аналогичные (19) коэффициенты имеют вид

$$
\begin{gathered}
2\varphi_4 = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3}, \quad \bar{\varphi}_7 = -\frac{8}{15}\bar{b}_3, \\
\bar{\varphi}_{10} = -\frac{8}{9}\bar{b}_6 + \frac{83}{225}\bar{b}_3^2, \ \bar{b}_9 = -\frac{1}{148}\times \\
\times\left(132\bar{\varphi}_{13} + \frac{508}{5}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{10} + 106\bar{b}_6\bar{\varphi}_7 + \frac{5}{4}\bar{\varphi}_7^3\right), \\
\bar{b}_{12} = -\frac{9}{134}\left(\frac{35}{3}\bar{\varphi}_{16} + \frac{853}{90}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{13} + \frac{83}{9}\bar{b}_6\bar{\varphi}_{10} + \right.\\
\left. + \frac{199}{18}\bar{b}_9\bar{\varphi}_7 + \frac{5}{24}\bar{\varphi}_7^2\bar{\varphi}_{10} - \frac{1}{12}\bar{\varphi}_{10}^2 - \frac{35}{576}\bar{\varphi}_7^4\right).
\end{gathered} \tag{23}
$$

*Форма катода и плотность тока эмиссии.* Вторые производные главных кривизн катода $\kappa_{10}$, $\kappa_{20}$, исходя из определения этих величин в ортогональной системе [1, 2], описываются выражениями

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{b_0^2}\kappa_{10,22} = -\left(\frac{1}{b_0^2}\bar{b}_{3,22} + 2\bar{b}_3\bar{b}_6\right), \\
\frac{1}{b_0^2}\kappa_{20,22} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b_0^2}\bar{b}_{3,22} + 2\bar{b}_3\bar{b}_6\right).
\end{gathered} \tag{24}
$$

Для второй и четвертой производных плотности тока имеем

$$\frac{1}{b_0^2}\bar{J}_{,22} = 10\bar{b}_6, \quad \frac{1}{b_0^4}\bar{J}_{,2222} = -\frac{5}{b_0^4}a_{0,2222} + 360\bar{b}_6^2. \tag{25}$$

Производная $a_{0,2222}$ следует из последнего уравнения (11)

$$\frac{1}{b_0^4}a_{0,2222} = -\frac{2}{b_0^2}\bar{b}_{6,22} - 6\bar{b}_3\bar{b}_9 - 4\bar{b}_6^2 - 2\bar{b}_3^2\bar{b}_6. \tag{26}$$

Способ вычисления $\bar{b}_{6,22}$ обсуждается в [1, 2] и приводит к следующему результату в осесимметричном и плоскосимметричном случаях соответственно:

$$\frac{1}{b_0^2}\bar{b}_{6,22} = -\frac{3}{4}\left(4\bar{b}_3\bar{b}_9 + \frac{67}{6}\bar{b}_6^2 + \frac{2}{3}\bar{b}_3^2\bar{b}_6 + \right.$$
$$\left. + \frac{489}{400}\bar{b}_3\frac{1}{b_0^2}T_{0,22} + \frac{9}{8}\frac{1}{b_0^2}\bar{\varphi}_{10,22}\right), \quad \frac{1}{b_0^2}\bar{b}_{6,22} = -3\bar{b}_3\bar{b}_9 - \tag{27}$$
$$- \frac{17}{2}\bar{b}_6^2 - \bar{b}_3^2\bar{b}_6 - \frac{83}{100}b_3\frac{1}{b_0^2}\kappa_{10,22} - \frac{9}{8}\frac{1}{b_0^2}\bar{\varphi}_{10,22}.$$

Выражение для $\bar{\varphi}_{10,22}$ может быть найдено из уравнения для $\varphi_{,22}$ из (9) и остается одинаковым для плоских и осесимметричных течений при разном смысле входящих в формулу коэффициентов

$$\frac{1}{b_0^2}\bar{\varphi}_{10,22} = 24\bar{b}_{12} + 12\bar{b}_3\bar{b}_9 + 4\bar{b}_6^2 + \tag{28}$$
$$+ \left(12\bar{b}_9 + 4\bar{b}_3\bar{b}_6\right)\bar{\varphi}_7 + 4\bar{b}_6\bar{\varphi}_{10}.$$

## 2. ТЕОРИЯ В φ-ПРЕДСТАВЛЕНИИ

*Искривленные трубки тока*. При использовании в качестве продольной координаты потенциала электрического поля $x^1 = \varphi$ система $x^1$, $x^2$ неортогональна во всем поле течения [5–7] за исключением поверхности катода $x^1 = 0$ и вырожденной трубки тока – оси пучка $x^2 = 0$. Для электростатических потоков соотношение на произвольной трубке тока, сформулированное в [6] в случае релятивистских пучков в магнитном поле, принимает вид

$$\frac{u^2}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} + \left(\frac{1}{h_1} - 2\sin\theta_{12}\cos\theta_{12}u^2\frac{1}{h_1}f_{,1}\right)\frac{h_{2,1}}{h_1} +$$
$$+ \left\{-\frac{1}{h_1\sin\theta_{12}}\frac{\cos\vartheta}{h_3} + \frac{1}{h_1}\left(k_1 + \cos^2\theta_{12}\frac{1}{h_1}f_{,1}\right)f + \right.$$
$$+ \left[k_1^2 + f\frac{1}{h_1}k_{1,1} + \sin^2\theta_{12}\left(3\cos^2\theta_{12} - 1\right)\left(\frac{1}{h_1}f_{,1}\right)^2 - \right. \tag{29}$$
$$\left.\left. - \sin\theta_{12}\cos\theta_{12}\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1}f_{,1}\right)_{,1}\right]u^2 + \frac{1}{h_1\sin^2\theta_{12}}\left(\frac{1}{h_1}\right)_{,1}\right\}h_2 =$$
$$= \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3u\sin\theta_{12}}, \quad \vartheta = \theta + \theta_{12}, \quad f = \mathrm{ctg}\,\theta_{12},$$
$$\sin\theta_{12} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}, \quad \cos\theta_{12} = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Здесь $\theta_{12}$ – угол между осями $x^1$, $x^2$.

Следствием определения продольной координаты $x^1 = \varphi$ являются соотношения, следующие из интеграла энергии и выражения для косоугольной проекции электрического поля на нормаль к поверхности $x^2 = \mathrm{const}$:

$$2\varphi = u^2, \quad \frac{1}{h_2}\varphi_{,2} = \sin\theta_{12}k_1u^2 + \cos\theta_{12}\frac{1}{h_1}\varphi_{,1}. \tag{30}$$

Эти соотношения описываются формулами

$$uu_{,1} = 1, \quad h_1\sin\theta_{12}k_1u^2 + \cos\theta_{12} = 0. \tag{31}$$

Последнее из них определяет закон изменения угла $\theta_{12}$ на произвольной трубке тока и позволяет вычислить поперечную производную $f_{,2}$

$$f_{,2} = -u^2\left(h_{1,2}k_1 + h_1k_{1,2}\right), \tag{32}$$
$$\theta_{12,2} = -\sin^2\theta_{12}f_{,2}.$$

Прочие уравнения, составляющие эволюционную систему первого порядка, определены выражениями

$$z_{,2} = h_2\cos\vartheta, \quad R_{,2} = h_2\sin\vartheta,$$
$$\theta_{,2} = \sin\theta_{12}\frac{h_{2,1}}{h_1} + h_2\cos\theta_{12}\left(k_1 - \sin^2\theta_{12}\frac{1}{h_1}f_{,1}\right),$$
$$h_{1,2} = h_1h_2\sin\theta_{12}\left(\sin^2\theta_{12}\frac{1}{h_1}f_{,1} - k_1\right) + h_{2,1}\cos\theta_{12},$$
$$k_{1,2} = h_2\cos\theta_{12}\frac{1}{h_1}k_{1,1} + h_2\sin\theta_{12}k_1^2 + \tag{33}$$
$$+ \sin\theta_{12}\frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} + \sin^3\theta_{12}\left[-h_2f\left(\frac{1}{h_1}f_{,1}\right)_{,1} + \right.$$
$$\left. + h_2\left(3\cos^2\theta_{12} - 1\right)\left(\frac{1}{h_1}f_{,1}\right)^2 - 2f\frac{h_{2,1}}{h_1}\frac{1}{h_1}f_{,1}\right].$$

*Первое приближение, уравнения на оси*. Переход к оси в уравнении (29) приводит к следующим соотношениям для осесимметричных и плоскосимметричных пучков:

$$\frac{u^2}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} + \frac{1}{h_1}\frac{h_{2,1}}{h_1} - \frac{1}{2}\frac{h_{1,1}}{h_1^3}h_2 = \frac{1}{2}\frac{h_{20}^2J}{h_2u}, \tag{34}$$
$$\frac{u^2}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} + \frac{1}{h_1}\frac{h_{2,1}}{h_1} - \frac{h_{1,1}}{h_1^3}h_2 = \frac{h_{20}J}{u}.$$

Уравнения эволюционной системы на оси $z$ имеют вид

$$R_{,2} = h_2, \quad \theta_{,2} = \frac{h_{2,1}}{h_1}, \quad k_{1,2} = \frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1}, \tag{35}$$
$$f_{,2} = -u^2\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1}, \quad \theta_{12,2} = u^2\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1}.$$

Агрегат $\cos\vartheta/h_3$ в (29) в осесимметричном случае раскрывается следующим образом:

$$\frac{\cos\vartheta}{h_3} = -\frac{1}{h_2}\left(\theta_{,2} + \theta_{12,2}\right). \tag{36}$$

*Второе приближение*. Уравнение (29) после двукратного дифференцирования по $x^2$ и перехода к оси пучка принимает вид

$$\begin{gathered}
\frac{u^2}{h_1^2}h_{2,2211}+\frac{1}{h_1^2}\left(1-u^2\frac{h_{1,1}}{h_1}\right)h_{2,221}-\\
-\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1}\frac{h_{1,1}}{h_1}-\frac{\cos\vartheta}{h_3}\right)h_{2,22}-\frac{1}{h_1^3}\left(h_2+u^2h_{2,1}\right)h_{1,221}+\\
+\frac{1}{h_1^3}\left[u^2\left(-2h_{2,11}+3h_{2,1}\frac{h_{1,1}}{h_1}\right)+\right.\\
\left.+\left(-2h_{2,1}+3h_2\frac{h_{1,1}}{h_1}\right)\right]h_{1,22}+\frac{h_2}{h_1}k_{1,2}f_{,2}+\\
+\left\{\left[2\frac{1}{h_1}k_{1,21}f_{,2}+2k_{1,2}^2-2\frac{1}{h_1^2}f_{,2}f_{,211}+\right.\right.\\
\left.+2\frac{1}{h_1^2}f_{,21}\left(\left(\frac{h_{1,1}}{h_1}-2\frac{h_{2,1}}{h_2}\right)f_{,2}-f_{,21}\right)\right]u^2-\\
\left.-2\frac{1}{h_1^2}\frac{h_{1,1}}{h_1}f_{,2}^2\right\}h_2-h_2\left(\frac{1}{h_1\sin\theta_{12}}\frac{\cos\vartheta}{h_3}\right)_{,22}=\\
=\frac{h_{20}J}{u}\left[\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22}+\frac{h_{30}}{h_3}\left(\bar{J}_{,22}+f_{,2}^2\right)\right].
\end{gathered}\tag{37}$$

При получении уравнения (37) использованы соотношения

$$\begin{gathered}
\left(\sin\theta_{12}\right)_{,2}=0,\ \left(\cos\theta_{12}\right)_{,2}=f_{,2},\\
\left(\sin\theta_{12}\right)_{,22}=-f_{,2}^2,\ \left(\cos\theta_{12}\right)_{,22}=0.
\end{gathered}\tag{38}$$

*Эволюционная система*. Система эволюционных уравнений во втором приближении определена формулами

$$\begin{gathered}
h_{1,22}=-u^2\left[h_2\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1}-3h_2\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1},\\
z_{,22}=-h_2\left[u^2\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1}+\frac{h_{2,1}}{h_1}\right].
\end{gathered}\tag{39}$$

Для высших производных нечетных функций получаем

$$\begin{gathered}
R_{,222}=h_{2,22}-h_2\vartheta_{,2}^2,\quad \theta_{12,222}=-f_{,222}+2f_{,2}^3,\\
\theta_{,222}=\frac{1}{h_1}h_{2,221}-2\frac{h_{2,1}}{h_1}f_{,2}f_{,21}-\frac{h_{2,1}}{h_1}f_{,2}^2-\\
-\frac{h_{1,22}}{h_1^2}h_{2,1}+2h_2f_{,2}k_{1,2},\\
k_{1,222}=-2h_2f_{,2}\left(\frac{1}{h_1}f_{,21}\right)_{,1}-4\frac{h_{2,1}}{h_1^2}f_{,2}f_{,21}-\\
-2\frac{h_2}{h_1^2}f_{,21}^2+2\frac{h_2}{h_1}f_{,2}k_{1,21}+2h_2k_{1,2}^2-f_{,2}^2k_{1,2},\\
f_{,222}=-u^2\left(\frac{1}{h_1}h_{2,2211}-\frac{h_{1,1}}{h_1^2}h_{2,21}-\frac{h_{1,22}}{h_1^2}h_{2,11}+\right.\\
\left.+2\frac{h_{1,1}}{h_1^3}h_{1,22}h_{2,1}-\frac{h_{2,1}}{h_1^2}h_{1,221}\right).
\end{gathered}\tag{40}$$

Входящие в уравнение (37) комплексы описываются формулами

$$\begin{gathered}
\left(\cos\vartheta\right)_{,222}=-\left(\theta_{,222}-\theta_{,2}^3+\theta_{12,222}-\theta_{12,2}^3\right)+\\
+3\theta_{,2}\theta_{12,2}\left(\theta_{,2}+\theta_{12,2}\right),\\
f_{,21}=-u^2\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,11}-2\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1},\\
f_{,211}=-u^2\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,111}-4\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,11},\\
k_{1,21}=\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1}.
\end{gathered}\tag{41}$$

Для четвертых производных $z$ и $h_1$ получаем

$$\begin{gathered}
z_{,2222}=h_2\left[-\left(\theta_{,222}-\theta_{,2}^3+\theta_{12,222}-\theta_{12,2}^3\right)\right]+\\
+3h_2\left(\theta_{,2}+\theta_{12,2}\right),\\
h_{1,2222}=3f_{,2}h_{2,221}+\left(f_{,21}-h_1k_{1,2}\right)h_{2,22}-\\
-h_1h_2k_{1,222}+h_2\left(5h_1f_{,2}^2-h_{1,22}\right)k_{1,2}+h_2f_{,2221}+\\
+h_{2,1}\left(f_{,222}-3f_{,2}^3\right)+3h_2f_{,2}^2f_{,21}-2h_{1,22}\frac{1}{h_1}f_{,21}.
\end{gathered}\tag{42}$$

*Соотношение на оси во втором приближении*. Ответственные за осесимметричность члены в (37), содержащие неопределенности, раскрываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{\cos\vartheta}{h_3}=-\frac{1}{h_2}\vartheta_{,2},\\
\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22}=\frac{1}{3}\frac{h_{20}}{h_2}\left[-\frac{1}{h_2}h_{2,22}+\vartheta_{,2}^2-\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_0^2\right],\\
\left(\frac{1}{h_1\sin\theta_{12}}\frac{\cos\vartheta}{h_3}\right)_{,22}=-\frac{\vartheta_{,2}}{h_1h_2}\left(-\frac{h_{1,22}}{h_1}+f_{,2}^2\right)+\\
+\frac{1}{h_1h_2}\left[-\frac{1}{3}\left(\vartheta_{,222}-\theta_{,2}^3-\theta_{12,2}^3\right)+\right.\\
\left.+\theta_{,2}\theta_{12,2}\vartheta_{,2}+\frac{1}{3}\frac{\vartheta_{,2}}{h_2}\left(h_{2,22}-h_2\vartheta_{,2}^2\right)\right].
\end{gathered}\tag{43}$$

Функция $h_{2,22}$ для осесимметричных потоков удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}
\frac{4}{3}\frac{u^2}{h_1^2}h_{2,2211}+\frac{4}{3}\left(1-u^2\frac{h_{1,1}}{h_1}\right)h_{2,221}-\\
-\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1}\frac{h_{1,1}}{h_1}+\frac{4}{3}\frac{\vartheta_{,2}}{h_2}\right)h_{2,22}-\frac{1}{h_1^3}\left(h_2+\frac{4}{3}u^2h_{2,1}\right)h_{1,221}+\\
+\frac{1}{h_1^3}\left[u^2\left(-\frac{8}{3}h_{2,11}+\frac{14}{3}h_2\frac{h_{1,1}}{h_1}\right)-\frac{8}{3}h_{2,1}+3h_2\frac{h_{1,1}}{h_1}\right]h_{1,22}+\\
+\frac{5}{3}\frac{h_2}{h_1}k_{1,2}f_{,2}+\left\{u^2\left[2\frac{1}{h_1}k_{1,21}f_{,2}+2k_{1,2}^2-\frac{2}{h_1^2}f_{,2}f_{,211}+\right.\right.\\
+\frac{2}{h_1^2}f_{,21}\left(\frac{h_{1,1}}{h_1}f_{,2}-f_{,21}\right)+\frac{1}{h_1^2h_2}\times\\
\left.\times\left(h_{2,11}-\frac{h_{1,1}}{h_1}h_{2,1}\right)f_{,2}^2-\frac{4}{h_1^2}\frac{h_{2,1}}{h_2}f_{,2}f_{,21}\right]+
\end{gathered}\tag{44}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{1}{h_1h_2}f_{,2}^3+\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{2}{3}\frac{h_{2,1}}{h_2}-2\frac{h_{1,1}}{h_1}\right)f_{,2}^2-\frac{2}{3}\frac{1}{h_1^2}f_{,2}f_{,21}\Bigg\}h_2=$$
$$=\frac{Gh_{20}^2}{h_2u}\left\{\frac{1}{3}\left[-\frac{h_{2,22}}{h_2}+\vartheta_{,2}^2-\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_0^2\right]+\bar{J}_{,22}+f_{,2}^2\right\}.$$

Для плоскосимметричных течений имеем

$$\frac{u^2}{h_1^2}h_{2,2211}+\frac{1}{h_1^2}\left(1-u^2\frac{h_{1,1}}{h_1}\right)h_{2,221}-\frac{1}{h_1^2}\frac{h_{1,1}}{h_1}h_{2,22}-$$
$$-\frac{1}{h_1^3}\left(h_2+u^2h_{2,1}\right)h_{1,221}+\frac{1}{h_1^3}\left[u^2\left(-2h_{2,11}+3\frac{h_{1,1}}{h_1}h_{2,1}\right)-\right.$$
$$\left.-2h_{2,1}+3\frac{h_{1,1}}{h_1}h_2\right]h_{1,22}+\frac{h_2}{h_1}k_{1,2}f_{,2}+$$
$$+\left\{u^2\left[2\frac{1}{h_1}k_{1,21}f_{,2}+2k_{1,2}^2-\frac{2}{h_1^2}f_{,2}f_{,211}+\right.\right.\qquad(45)$$
$$\left.+\frac{2}{h_1^2}f_{,21}\left[\left(\frac{h_{1,1}}{h_1}-2\frac{h_{2,1}}{h_2}\right)f_{,2}-f_{,21}\right]\right]-$$
$$\left.-\frac{2}{h_1^2}\frac{h_{1,1}}{h_1}f_{,2}^2\right\}h_2=\frac{h_{20}J}{u}\left(\bar{J}_{,22}+f_{,2}^2\right).$$

*Параметры потока*. В силу специфики $\varphi$-варианта теории формула для $\varphi$ из (12) не может быть использована. Задавая точку $z$ на оси, мы тем самым определяем значение потенциала $\varphi(z)$ и, воспользовавшись параметрическими уравнениями $R=R(z,y)$, $Z=Z(z,y)$, найдем точку пересечения трубки тока $x^2\equiv y=\text{const}$ с эквипотенциалью $x^1=\varphi$, приносящей в эту точку выбранное значение потенциала.

Функция $h_1(z)=h_1(\varphi)$ на оси известна и определяется зависимостью $\varphi(z)$ через обратную функцию $z=z(\varphi)$:

$$h_1(\varphi)=\frac{1}{\varphi'(z(\varphi))}.\qquad(46)$$

*Прикатодные асимптотики*. Функции $h_1$, $h_2$ вблизи стартовой поверхности $x^1=0$ имеют следующие асимптотики:

$$h_1=a_0x^{-1/4}\left(1+\bar{a}_3x^{3/4}+\bar{a}_6x^{6/4}+\ldots\right),$$
$$x\equiv\varphi=x^1,\qquad(47)$$
$$h_2=b_0\left(1+\bar{b}_3x^{3/4}+\bar{b}_6x^{6/4}+\ldots\right).$$

Подстановка разложений (47) в уравнения (34) позволяет установить связь между коэффициентами $a_k$, $b_k$. В осесимметричном и плоском случаях имеем соответственно

$$a_0^2=\frac{1}{2\sqrt{2}J},\quad \bar{a}_3=\frac{8}{5}\bar{b}_3,\quad \bar{a}_6=4\bar{b}_6-\frac{297}{200}\bar{b}_3^2,$$
$$a_0^2=\frac{1}{2\sqrt{2}J},\quad \bar{a}_3=\frac{4}{5}\bar{b}_3,\quad \bar{a}_6=2\bar{b}_6+\frac{17}{100}\bar{b}_3^2.\qquad(48)$$

Имея в виду формулу (46), выразим коэффициенты $a_k$ через коэффициенты разложения потенциала, обратив ряд

$$\varphi=\varphi_4z^{4/3}\left(1+\bar{\varphi}_7z+\bar{\varphi}_{10}z^2+\ldots\right),$$
$$z=\bar{x}^{3/4}\left(1+\bar{Z}_3\bar{x}^{3/4}+\bar{Z}_6\bar{x}^{6/4}+\ldots\right),\quad \bar{x}\equiv\left(\varphi/\varphi_4\right)^{1/4},\qquad(49)$$
$$\bar{Z}_3=-\frac{3}{4}\bar{\varphi}_7,\quad \bar{Z}_6=-\frac{3}{4}\bar{\varphi}_{10}+\frac{39}{32}\bar{\varphi}_7^2.$$

Коэффициент при $d\varphi$ в выражении для $dz$ определяет функцию $h_1$

$$dz=\frac{3}{4}\bar{x}^{-1/4}\left[1-\frac{3}{2}\bar{\varphi}_7\bar{x}^{3/4}+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{9}{4}\bar{\varphi}_{10}+\frac{117}{32}\bar{\varphi}_7^2\right)\bar{x}^{6/4}+\ldots\right]\frac{d\varphi}{\varphi_4}.\qquad(50)$$

Перейдем от $\bar{x}$ в (50) к $\varphi\equiv x$

$$h_1=(8J^2x)^{-1/4}\left[1-\sqrt[4]{\frac{2}{J^2}}\bar{\varphi}_7x^{3/4}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{J}\left(-\bar{\varphi}_{10}+\frac{13}{8}\bar{\varphi}_7^2\right)x^{6/4}+\ldots\right].\qquad(51)$$

Сопоставление разложений (47), (48) с рядом (51) позволяет установить связь между коэффициентами $b_k$ и $\varphi_k$. Последние известны из теории антипараксиальных разложений [1, 2]:

$$\varphi_7=\frac{8}{15}T_0,\quad \bar{\varphi}_{10}=\frac{83}{225}\left(\kappa_{10}^2+\kappa_{20}^2\right)+$$
$$+\frac{157}{450}\kappa_{10}\kappa_{20}-\frac{4}{45}\left(\bar{J}_{,22}-k_2\bar{J}_{,2}\right),\qquad(52)$$
$$T_0=\kappa_{10}+\kappa_{20}.$$

В осесимметричном и плоском случаях имеем соответственно $\kappa_{10}=\kappa_{20}$, $\left(-k_2\bar{J}_{,2}\right)=\bar{J}_{,22}$ и $\kappa_{20}=\left(-k_2\bar{J}_{,2}\right)=0$.

Для интегрирования уравнений (34), (37) необходимо указать значения функций $h_2$, $h_{2,22}$ и их производных (21). Кривизна катода и ее вторая производная на оси определяют величины $\bar{b}_3$, $\bar{b}_{3,22}$. Локальная ортогональность системы при $x^1=0$ позволяет воспользоваться формулой для кривизны в случае ортогональных координат

$$\kappa_1=-\frac{h_{2,1}}{h_1h_2},\quad \kappa_{10}=-\frac{3}{4}\frac{\bar{b}_3}{a_0},$$
$$\kappa_{10,22}=-\frac{3}{4}\frac{1}{a_0}\left(\bar{b}_{3,22}-\bar{b}_3\frac{a_{0,22}}{a_0}\right),\qquad(53)$$
$$\bar{b}_{3,22}=-\frac{4}{3}a_0\kappa_{10,22}-\frac{1}{2}\bar{b}_3\bar{J}_{,22}.$$

Выражение для $a_0$ в (48) справедливо не только на оси, но и на всей поверхности катода [5], и по этой причине допускает дифференцирование по $x^2$.

## 3. ТЕОРИЯ В $W$-ПРЕДСТАВЛЕНИИ

*Искривленные трубки тока.* Теория потенциальных релятивистских потоков во внешнем магнитном поле с потенциалом $W$ обобщенного импульса $\vec{P} = \nabla W$ в качестве продольной координаты построена в работе [9]. При рассмотрении электростатических течений возможно использование ортогональных координат.

Соотношение на трубке тока для этого случая описывается формулой

$$2\varphi\frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} + \frac{h_{2,1}}{h_1}\frac{\varphi_{,1}}{h_1} + \left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{\varphi_{,1}}{h_1}\right)_{,1} - k_2\mathrm{tg}\theta\frac{\varphi_{,1}}{h_1} + 2\left(2k_1^2 - k_1k_2\right)\varphi\right]h_2 = \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3u}. \quad (54)$$

Метрика системы координат, как и в $\varphi$-варианте теории, является сингулярной:

$$h_1 = \frac{1}{u},\ u^2 = 2\varphi,\ E_\nu = 2k_1\varphi. \quad (55)$$

Система эволюционных уравнений первого приближения имеет вид (4). Выражение для $h_1$ из (55) позволяет выразить $h_{1,2}$ через скорость

$$h_{1,2} = -u_{,2}/u^2 \quad (56)$$

и исключить $h_1$ из соотношения на трубке тока (54):

$$2\varphi h_{2,11} + 2\varphi_{,1}h_{2,1} + \left(\varphi_{,11} + \frac{1}{2}\frac{\varphi_{,1}^2}{\varphi} - k_2\mathrm{tg}\theta\frac{\varphi_{,1}}{u} + 2k_1^2 - k_1k_2\right)h_2 = \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3u^3}. \quad (57)$$

*Первое приближение, уравнения на оси.* Уравнения эволюционной системы в этом случае принимают вид

$$R_{,2} = h_2,\ \ \theta_{,2} = uh_{2,1},\ \ k_{1,2} = 2\varphi h_{2,11} - h_{2,1}\varphi_{,1},\quad E_{\nu,2} = 2\varphi k_{1,2}. \quad (58)$$

Соотношения на оси для осесимметричных и плоскосимметричных потоков описываются выражениями

$$h_{2,11} + \bar{\varphi}_{,1}h_{2,1} + \frac{1}{4}\left(\bar{\varphi}_{,11} + \frac{1}{2}\bar{\varphi}_{,1}^2\right)h_2 = \frac{h_{20}^2J}{2h_2u^5},$$
$$h_{2,11} + \bar{\varphi}_{,1}h_{2,1} + \frac{1}{2}\left(\bar{\varphi}_{,11} + \frac{1}{2}\bar{\varphi}_{,1}^2\right)h_2 = \frac{h_{20}J}{u^5}. \quad (59)$$

Связь продольной координаты $x^1 = W$ с $z$ на оси пучка определяется формулой

$$x^1 = W = \int u(z)\,dz. \quad (60)$$

*Второе приближение.* Общее для двух рассматриваемых геометрических конфигураций пучка соотношение на оси во втором приближении имеет вид

$$\begin{aligned}&2\varphi h_{2,2211} + 2\varphi_{,1}h_{2,221} + \\ &+\left(\varphi_{,11} + \frac{1}{2}\frac{\varphi_{,1}^2}{\varphi} - k_2\mathrm{tg}\theta\frac{\varphi_{,1}}{u} - k_1k_2\right)h_{2,22} = -2\varphi_{,22}h_{2,11} - \\ &- 2\varphi_{,221}h_{2,1} + \left[-\varphi_{,2211} - \frac{1}{\varphi}\varphi_{,1}\varphi_{,221} + \frac{1}{2}\frac{\varphi_{,1}^2}{\varphi}\varphi_{,22} + \right. \\ &\left. + k_2\mathrm{tg}\theta\left(\frac{\varphi_{,1}}{u}\right)_{,22} + \left(k_2\mathrm{tg}\theta\right)_{,22}\frac{\varphi_{,1}}{u} + \left(k_1k_2\right)_{,22} - 4k_{1,2}^2\right]h_2 + \\ &+ \frac{h_{20}J}{u^3}\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22} + \frac{h_{30}}{h_3}\frac{h_{20}J}{u^3}\left(\bar{J}_{,22} - \frac{3}{2}\frac{J}{u^3}\frac{\varphi_{,22}}{\varphi}\right).\end{aligned} \quad (61)$$

Уравнения эволюционной системы второго приближения и высших производных параметров пучка описываются выражениями

$$\begin{aligned}&z_{,22} = -uh_2h_{2,1},\ \ \varphi_{,22} = 2h_2\varphi\left(2\varphi h_{2,11} + \varphi_{,1}h_{2,1}\right),\\ &R_{,222} = h_{2,22} - 2\varphi h_2h_{2,1}^2,\\ &\theta_{,222} = uh_{2,221} + u\left(2\varphi h_{2,11} + \varphi_{,1}h_{2,1}\right)h_2h_{2,1},\\ &k_{1,222} = 2\varphi h_{2,2211} + \varphi_{,1}h_{2,221} + 16\varphi^2h_2h_{2,11}^2 - \\ &- 22\varphi\varphi_{,1}h_2h_{2,1}h_{2,11} + 4\varphi_{,1}^2h_2h_{2,1}^2 + \\ &+ 2\left(2\varphi^2h_2h_{2,111} + 2\varphi^2h_{2,1}h_{2,11} + \varphi\varphi_{,1}h_{2,1}^2\right)h_{2,1},\\ &E_{\nu,222} = 2\varphi\left(k_{1,222} + 2h_2k_{1,2}^2\right) + 2\varphi_{,22}k_{1,2},\\ &\varphi_{,2222} = h_2E_{\nu,222} + 3h_{2,22}E_{\nu,2},\\ &z_{,2222} = -h_2\theta_{,222} + h_2\theta_{,2}^3 - 3h_{2,22}\theta_{,2}.\end{aligned} \quad (62)$$

Для преобразований уравнения (61) воспользуемся формулами (15), (62) и следующими связями:

$$\begin{aligned}&k_2\mathrm{tg}\theta = -u\frac{h_{2,1}}{h_2},\ \ \left(\cos\theta\right)_{,22} = -2\varphi h_{2,1}^2,\\ &\left(\frac{\varphi_{,1}}{u}\right)_{,22} = \frac{1}{u}\varphi_{,221} - \frac{1}{u^3}\varphi_{,1}\varphi_{,22},\\ &\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22} = -\frac{1}{3}\frac{h_{20}}{h_2^2}\left(h_{2,22} - 2\varphi h_2h_{2,1}^2\right),\\ &\varphi_{,221} = 2\left(2\varphi^2h_2h_{2,111} + 5\varphi\varphi_{,1}h_2h_{2,11} + 2\varphi^2h_{2,1}h_{2,11} + \right.\\ &\left. + \varphi\varphi_{,1}h_{2,1}^2 + \varphi_{,1}^2h_2h_{2,1}\right),\\ &\varphi_{,2211} = 2\left[2\varphi^2h_2h_{2,1111} + \left(9\varphi\varphi_{,1}h_2 + 4\varphi^2h_{2,1}\right)h_{2,111} + \right.\\ &+ \left(5\varphi\varphi_{,11}h_2 + 11\varphi\varphi_{,1}h_{2,1} + 6\varphi_{,1}^2h_2\right)h_{2,11} + 2\varphi^2h_{2,11}^2 + \\ &\left. + \left(2\varphi_{,1}^2 + \varphi\varphi_{,11}\right)h_{2,1}^2 + 2\varphi_{,1}\varphi_{,11}h_2h_{2,1}\right].\end{aligned} \quad (63)$$

В результате получим[1]

[1] Обратим внимание на однородную структуру коэффициентов, включающих функцию $h_{2,22}$ и ее производные ($\varphi$ “упоминается” один раз. производная по $x^1$ – два раза), и членов в квадратной скобке при $h_2$ ($h_2$ и $\varphi$ упоминаются по два раза, производная по $x^1$ – четыре раза).

$$
\begin{gathered}
2\varphi h_{2,2211}+2\varphi_{,1}h_{2,221}+\\
+\left(\varphi_{,11}+\frac{1}{2}\frac{\varphi_{,1}^{2}}{\varphi}-k_2\operatorname{tg}\theta\frac{\varphi_{,1}}{u}-k_1k_2\right)h_{2,22}=\\
=\Big[\left(k_1k_2\right)_{,22}+\left(k_2\operatorname{tg}\theta\right)_{,22}\frac{\varphi_{,1}}{u}+k_2\operatorname{tg}\theta\left(\frac{\varphi_{,1}}{u}\right)_{,22}-\\
-4\varphi^2h_2h_{2,1111}-\left(16\varphi^2h_{2,1}+22\varphi\varphi_{,1}h_2\right)h_{2,111}-\\
-28\varphi^2h_{2,11}^{2}-\left(66\varphi\varphi_{,1}h_{2,1}+8\varphi^2\frac{1}{h_2}h_{2,1}^{2}+22\varphi_{,1}^{2}h_2\right)\times\\
\times h_{2,11}-4\varphi\varphi_{,1}\frac{1}{h_2}h_{2,1}^{3}-\left(14\varphi_{,1}^{2}+2\varphi\varphi_{,11}\right)h_{2,1}^{2}-\\
-\left(4\varphi_{,1}\varphi_{,11}+\frac{\varphi_{,1}^{3}}{\varphi}\right)h_2h_{2,1}\Big]h_2+\frac{h_{20}J}{u^3}\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22}+\\
+\frac{h_{30}}{h_3}\frac{h_{20}J}{u^3}\left[\bar{J}_{,22}-3\frac{Jh_2}{u^3}\left(2\varphi h_{2,11}+\varphi_{,1}h_{2,1}\right)\right].
\end{gathered}
\tag{64}
$$

Раскрытие неопределенностей на оси с помощью приведенных выше формул дает для осесимметричного потока уравнение

$$
\begin{gathered}
\frac{8}{3}h_{2,2211}+\frac{4}{3}\bar{\varphi}_{,1}h_{2,221}+\\
+\frac{1}{2}\left[\frac{7}{6}\bar{\varphi}_{,11}-\frac{5}{12}\bar{\varphi}_{,1}^{2}+\frac{4}{3}\frac{1}{h_2}\left(h_{2,11}+\bar{\varphi}_{,1}h_{2,1}\right)\right]h_{2,22}=\\
=2\varphi\Big[-h_2h_{2,1111}-\left(4h_{2,1}+\frac{11}{2}\bar{\varphi}_{,1}h_2\right)h_{2,111}-3h_{2,11}^{2}-\\
-\left(2\frac{1}{h_2}h_{2,1}^{2}+\frac{11}{2}\bar{\varphi}_{,1}^{2}h_2-\frac{79}{6}\bar{\varphi}_{,1}h_{2,1}\right)h_{2,11}-\bar{\varphi}_{,1}\frac{1}{h_2}h_{2,1}^{3}-\\
-\left(\frac{17}{6}\bar{\varphi}_{,1}^{2}+\frac{1}{2}\bar{\varphi}_{,1}\right)h_{2,1}^{2}-\left(\bar{\varphi}_{,1}\bar{\varphi}_{,11}+\frac{1}{4}\bar{\varphi}_{,1}^{3}\right)h_2h_{2,1}\Big]h_2+\\
+\frac{h_{20}^{2}J}{h_2u^5}\left[\bar{J}_{,22}-3\frac{Jh_2}{u}\left(h_{2,11}+\frac{1}{2}\bar{\varphi}_{,1}h_{2,1}\right)\right]+\frac{1}{3}\frac{h_{20}^{2}J}{h_2u^3}h_{2,1}^{2}.
\end{gathered}
\tag{65}
$$

Уравнение плоского пучка получается из (64), если опустить члены с $k_2$ и положить $h_{30}=h_3=1$, в результате чего член с плотностью тока в правой части примет вид

$$
\frac{h_{20}J}{u^3}\left[\bar{J}_{,22}-3\frac{Jh_2}{u}\left(h_{2,11}+\frac{1}{2}\bar{\varphi}_{1}h_{2,1}\right)\right].
\tag{66}
$$

Третьи и четвертые производные $h_2$ по продольной координате получаются при дифференцировании уравнений (59).

*Прикатодные асимптотики.* Коэффициенты Ляме вблизи стартовой поверхности имеют вид разложений

$$
\begin{gathered}
h_1=a_0x^{-2/5}\left(1+\bar{a}_3x^{3/5}+\bar{a}_6x^{6/5}+\ldots\right),\\
h_2=b_0\left(1+\bar{b}_3x^{3/5}+\bar{b}_6x^{6/5}+\ldots\right),\\
x\equiv x^1=W.
\end{gathered}
\tag{67}
$$

Подобно случаю $\varphi$-представления, обратим функцию (60) и выразим $z$ через $W$

$$
\begin{gathered}
u=V_2z^{2/3}\left(1+\bar{V}_5z+\bar{V}_8z^2+\ldots\right),\\
W=\frac{3}{5}V_2z^{5/3}\left(1+\frac{5}{8}\bar{V}_5z+\frac{5}{11}\bar{V}_8z^2+\ldots\right),\\
z=Z_0x^{3/5}\left(1+\bar{Z}_3x^{3/5}+\bar{Z}_6z^{6/5}+\ldots\right).
\end{gathered}
\tag{68}
$$

Коэффициенты разложения скорости $u$ известны [1, 2], причем коэффициенты $\bar{Z}_k$ выражаются через них следующим образом:

$$
\begin{gathered}
Z_0=\left(\frac{5}{3V_2}\right)^{3/5},\quad \bar{Z}_3=-\frac{3}{8}Z_0\bar{V}_5,\\
\bar{Z}_6=Z_0^2\left(\frac{3}{11}\bar{V}_8+\frac{21}{64}\bar{V}_5^2\right),\\
V_2=\left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3},\\
\bar{V}_5=\frac{4}{15}T_0,\ \bar{V}_8=\frac{67}{450}\left(\kappa_{10}^2+\kappa_{20}^2\right)+\\
+\frac{31}{300}\kappa_{10}\kappa_{20}-\frac{2}{45}\left(\bar{J}_{,22}-k_2\bar{J}_{,2}\right).
\end{gathered}
\tag{69}
$$

Множитель перед $dW$ в выражении для $dz$ определяет коэффициент Ляме $h_1$

$$
\begin{gathered}
a_0=\frac{3}{5}Z_0,\quad \bar{a}_3=-\frac{3}{4}Z_0\bar{V}_5,\\
\bar{a}_6=Z_0^2\left(\frac{9}{11}\bar{V}_8+\frac{63}{64}\bar{V}_5^2\right).
\end{gathered}
\tag{70}
$$

Для определения коэффициентов $\bar{b}_k$ потенциал $\varphi$ необходимо переразложить по $W$

$$
\begin{gathered}
\varphi=\varphi_4z^{4/3}\left(1+\bar{\varphi}_7z+\bar{\varphi}_{10}z^2+\ldots\right)=\\
=\Phi_0x^{4/5}\left(1+\bar{\Phi}_3x^{3/5}+\bar{\Phi}_6x^{6/5}+\ldots\right),\\
\Phi_0=\frac{1}{2}\left(\frac{25J}{2}\right)^{2/5},\ \bar{\Phi}_3=\frac{3}{4}Z_0\bar{\varphi}_7,\\
\bar{\Phi}_6=Z_0^2\left(\bar{\varphi}_{10}-\frac{4}{11}\bar{V}_8-\frac{41}{32}\bar{V}_5^2\right).
\end{gathered}
\tag{71}
$$

Аналогичные выражения для скорости имеют вид

$$
\begin{gathered}
u=U_0x^{2/5}\left(1+\bar{U}_3x^{3/5}+\bar{U}_6x^{6/5}+\ldots\right),\\
U_0^2=2\Phi_0,\ \bar{U}_3=\frac{3}{8}Z_0\bar{\varphi}_7,\\
\bar{U}_6=\frac{1}{2}Z_0^2\left(\bar{\varphi}_{10}-\frac{4}{11}\bar{V}_8-\frac{59}{32}\bar{V}_5^2\right).
\end{gathered}
\tag{72}
$$

Разложения (71), (72) позволяют перейти к рассмотрению уравнений (59). В результате для осесимметричного пучка получаем

$$U_0^5 = \frac{25}{2}J, \quad \bar{b}_3 = -\frac{5}{3}\bar{\Phi}_3,$$
$$\bar{b}_6 = -\frac{11}{17}\bar{\Phi}_6 + \frac{523}{1600}\bar{b}_3^2. \tag{73}$$

В плоском случае имеем то же значение $U_0$ и следующие коэффициенты разложения функции $h_2$:

$$\bar{b}_3 = -\frac{10}{3}\bar{\Phi}_3, \quad \bar{b}_6 = -\frac{22}{17}\bar{\Phi}_6 + \frac{747}{2720}\bar{b}_3^2. \tag{74}$$

Кривизна $\kappa_{10}$ и ее вторая производная на оси связаны с величинами $\bar{b}_3$, $\bar{b}_{3,22}$ соотношениями

$$\bar{b}_3 = -\frac{5}{3}a_0\kappa_{10},$$
$$\bar{b}_{3,22} = -\frac{5}{3}a_0\kappa_{10,22} - \frac{1}{5}\bar{b}_3\bar{J}_{,22}. \tag{75}$$

Информация (75) достаточна для интегрирования уравнений первого и второго приближений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вариант осесимметричных электронно-оптических систем с экранированным от магнитного поля катодом часто встречается в мощных приборах СВЧ нерелятивистского диапазона и электронных пушках различного технологического назначения. В последние десятилетия широкое применение получило использование ленточных пучков эллиптического или близкого к прямоугольному сечения, теоретические модели для которых складываются из расчета двумерного ленточного потока и учета торцевых эффектов [10].

Приближенные модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, правильно учитывают поведение решения вблизи сингулярных эмитирующих поверхностей с неоднородным токоотбором, а теоретические построения в лапласовской области вблизи кромки катода (профилированный тепловой зазор) помогают избавиться от волюнтаризма, принятого в программах траекторного анализа и состоящего в постулировании в этой области электрического поля, не являющегося решением уравнений пучка при принятом режиме термоэмиссии [11]. Для разномасштабных задач, к которым относится расчет пучков с высокой компрессией или с сильно вытянутым прямоугольным сечением, подобный способ действий приводит к ошибке, которая не может быть оценена в рамках действующей численной модели и которую необходимо компенсировать за счет экспериментальной доводки прибора.

Работа [12], основанная на теоретической модели упомянутого типа, демонстрирует пример расчета пучка с эллиптическим сечением при линейной компрессии порядка 30, берущего начало с цилиндрической эмитирующей поверхности в $\rho$-режиме.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Сыровой В.А.* Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. *Syrovoy V.A.* Theory of Intense Beams of Charged Particles. N.Y.: Elsevier, 2011.
3. *Овчаров В.Т.* // РЭ. 1962. Т. 7. № 8. С. 1367.
4. *Овчаров В.Т, Пензяков В.В.* // РЭ. 1970. Т. 15. № 8. С. 1651.
5. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 6. С. 614.
6. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 502.
7. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 82.
8. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
9. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2022. Т. 67. № 6. С. 615.
10. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1115.
11. *Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А.* // Электронная техника. Техника СВЧ. 2018. № 1. С. 32.
12. *Акимов П.И., Гаврилин А.А., Никитин А.П. и др.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 11. С. 1303.