РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 68, № 6, с. 527–541

К 85-ЛЕТИЮ ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ БЕССЕЛЕВЫХ ПУЧКОВ И ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

© 2023 г. С. Ю. Доброхотов[a], *, В. Е. Назайкинский[a], А. В. Цветкова[a]

[a] Институт пробем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, просп. Вернадского, 101, корп. 1, Москва, 119526 Российская Федерация

*E-mail: s.dobrokhotov@gmail.com

Поступила в редакцию 19.02.2023 г.
После доработки 19.02.2023 г.
Принята к публикации 25.03.2023 г.

Рассмотрены асимптотические решения типа бесселевых пучков трехмерного уравнения Гельмгольца, т.е. решения, имеющие максимумы в окрестности оси z и описываемые на нормальных к ней плоскостях функциями Бесселя. Поскольку функции Бесселя медленно убывают на бесконечности, то энергия таких решений оказывается неограниченной. Описаны подходы к локализации таких решений, основанные на их представлении в виде канонического оператора Маслова на подходящих лагранжевых многообразиях с простыми каустиками, имеющими вид вырожденных и невырожденных складок. Получены эффективные формулы для указанных решений в виде функций Бесселя и Эйри сложного аргумента.

DOI: 10.31857/S0033849423060037, **EDN:** XLSMQI

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассмотрим задачи, определяющие волновые пучки, связанные с функциями Бесселя. Если для описания волновых пучков использовать уравнение Гельмгольца

$$\tilde{\Delta}u + k^2u = 0, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad (1)$$

то решения, описывающие радиально симметричные пучки, локализованные в окрестности оси z и называемые пучками Бесселя, представляются в виде

$$u = \exp\left(\frac{i\beta z}{h}\right) J_0\left(\frac{\rho}{h}\right), \quad k^2 = \frac{\beta^2 + 1}{h^2}, \qquad (2)$$

где J_0 – функция Бесселя, ρ – полярный радиус на плоскости $\mathbb{R}^2_{x_1,x_2}$ (т.е. $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$), $h > 0$, β – параметры, характеризующие пучок. Поскольку мы считаем, что пучок локализован в окрестности оси $z = 0$, то это означает, что параметр h предполагается малым. В этом случае частота k оказывается большой, и ее удобно представить в виде $k = k'/h$ и использовать k' вместо k (далее штрих не приводим).

Отметим, что квадрат модуля функции (2) (или ее вещественной части) неинтегрируем в $\mathbb{R}^3$ и не принадлежит естественному энергетическому пространству, например $L^2(\mathbb{R}^3)$. Это обстоятельство затрудняет практическое использование волновых пучков такого типа.

Разумеется, эта проблема не является новой в волновых задачах. Рассмотрим, например, решение одномерного волнового уравнения с постоянной скоростью

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$$

в виде плоской волны

$$u = A\exp\left(\frac{i}{h}\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

(или вещественную часть этой функции), где $A = \mathrm{const}$ – амплитуда, ω/h характеризует частоту. Понятно, что квадрат этой функции при каждом t неинтегрируем, но если мы умножим ее на функцию $\chi(x - ct)$, где $\chi(x)$ – гладкая финитная срезающая функция, равная 1 на некотором отрезке $[a, b]$ и равная нулю вне некоторого большего отрезка $[a - \delta, b + \delta]$ ($\delta > 0$), то получим решение (волновой пакет)

$$u = A\chi(x - ct)\exp\left(\frac{i}{h}(\omega t - kx)\right)$$

($k = \omega/c$ – волновое число), которое уже обладает конечной энергией.

В том случае, когда скорость $c(x)$ является переменной, решение волнового уравнения в виде плоской волны найти, как правило, уже нельзя, но у него можно найти быстро осциллирующие асимптотические решения вида

$$u = A(x)\exp\left(\frac{i}{h}(\omega t - S(x))\right),$$
$$S(x) = \int_0^x \frac{\omega}{c(y)}dy, \quad A(x) = \sqrt{c(x)},$$

где $h > 0$ — малый положительный параметр, характеризующий частоту осцилляций. Локализовать это решение можно, умножив на срезающую функцию χ, что дает

$$u = \sqrt{c(x)}\chi(X(x,t))\exp\left(\frac{i}{h}(\omega t - S(x))\right),$$
$$X(x,t) = S^{-1}(S(x) - \omega t),$$

где $S^{-1}(y)$ — функция обратная к $S(x)$.

Вернемся к вопросу о локализации решения типа (2). Можно попытаться умножить его на некоторую гладкую финитную (срезающую) функцию $\chi(x_1, x_2, z)$, однако этот способ не дает нужного результата — получаемая функция перестает быть решением исследуемого уравнения. Причина состоит в том, что с точки зрения квазиклассического приближения и геометрической оптики решение (2) связано с задачами с каустиками и фокальными точками, и тогда срезающая функция, образно говоря, "переплывает" через особенности такого типа, поэтому введение срезающей функции требует более сложных рассуждений.

Изучение особенностей типа каустик и особенностей более общего типа — лагранжевых сингулярностей — относится к области науки, известной как теория катастроф. Ей посвящено большое количество публикаций как чисто математических, так и с приложениями к конкретным физическим задачам, связанным с распространением волн. Среди них укажем работы [1—4], которые содержат обширные библиографии. Рассматриваемые здесь задачи с одной стороны, достаточно просты — каустики имеют вид складки, а с другой — нестандартны, поскольку каустики оказываются вырожденными при проектировании на физическое пространство.

Напомним, что при наличии в задаче каустик и фокальных точек для построения асимптотических решений метод Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна (ВКБ) не работает, и поэтому следует применять другие подходы. Мы применим один из самых универсальных и мощных инструментов построения квазиклассических асимптотик — канонический оператор Маслова [5, 6]. При этом будем использовать недавно предложенные его модификации, дающие более эффективные формулы в окрестности каустик и, кроме того, позволяющие расширить класс задач, в которых канонический оператор может быть применен [7]. Также будем использовать простые приемы, которые позволяют выразить канонический оператор в окрестности каустик в виде специальных функций сложного аргумента [8].

2. КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР НА ЛАГРАНЖЕВОМ МНОГООБРАЗИИ, ОТВЕЧАЮЩЕМ ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ, И ИХ "ЛОКАЛИЗАЦИЯ"

Канонический оператор Маслова связан с геометрическими объектами в фазовых пространствах — лагранжевыми многообразиями, которые возникают при исследовании задачи классической гамильтоновой механики, соответствующей исходной задаче в частных производных. Приведем такие многообразия, отвечающие функции Бесселя, кратко повторив для полноты изложения некоторые соображения из [9].

Функции Бесселя $J_s\left(\frac{\rho}{h}\right)$ являются решением обыкновенного дифференциального уравнения Бесселя, но нам удобнее ввести функции $J_s\left(\frac{\rho}{h}\right)\exp(is\varphi)$ (φ — полярный угол) и рассмотреть их как с овместное решение спектральных задач для коммутирующих операторов с частными производными — оператора Лапласа и оператора углового момента

$$\hat{p}^2 w \equiv -h^2\Delta w = w,$$
$$\hat{M}w \equiv (x_2\hat{p}_1 - x_1\hat{p}_2)w = \gamma w,$$
$$\hat{p}_j = -ih\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \gamma = sh.$$

Операторам $\hat{H} = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2$ и $\hat{M}$ соответствуют символы $H = p_1^2 + p_2^2$ и $M = x_2 p_1 - x_1 p_2$, определяющие два гамильтониана в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^4_{\mathbf{p},\mathbf{x}}$ с координатами $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Как видим, скобка Пуассона $\{H, M\} = 0$ и, согласно теореме Лиувилля, множество $\Lambda^B(\gamma) = \left\{(\mathbf{p},\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4_{\mathbf{p},\mathbf{x}} : H = 1, M = \gamma\right\}$ определяет двумерное лагранжево многообразие, инвариантное относительно сдвигов g_H^t, g_M^τ вдоль траекторий гамильтоновых систем с гамильтонианами H и M. Это многообразие некомпактно и топологически представляет собой двумерный "лиувиллев" цилиндр в $\mathbb{R}^4_{\mathbf{p},\mathbf{x}}$, который можно записать в виде

$$\Lambda^B = \{\mathbf{p} = \mathbf{P}^B(\alpha,\psi) = \mathbf{n}(\psi),$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{X}^B(\alpha,\psi) = \alpha\mathbf{n}(\psi) - \gamma\mathbf{n}'(\psi) | \alpha \in \mathbb{R}, \in [0, 2\pi)\},$$
$$\mathbf{n}(\psi) = \begin{pmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi\end{pmatrix}.$$

Параметры α, ψ определяют координаты на многообразии Λ^B. Зададим на Λ^B некоторую гладкую (2π-периодическую по ψ) функцию $A(\alpha, \psi)$. Кроме того, зафиксируем на Λ^B (центральную) точку $(\alpha = +0,\ \psi = 0)$. Якобиан $J^B = \det \dfrac{\partial \mathbf{X}^B(\alpha, \psi)}{\partial(\alpha, \psi)}$ проектирования многообразия Λ^B на физическую плоскость $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ равен α. В случае, когда $\gamma \neq 0$, равенство $\alpha = 0$ определяют окружность

$$\Gamma = \{\mathbf{p} = \mathbf{n}(\psi), \mathbf{x} = -\gamma \mathbf{n}'(\psi)\} \in \Lambda^B \in \mathbb{R}^4_{\mathbf{p},\mathbf{x}},$$

и ее проекция $\Gamma_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} = -\gamma \mathbf{n}'(\psi)\} \in \mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ на плоскость $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ также является окружностью. Кривая $\Gamma_{\mathbf{x}}$ – это простая каустика типа складки [1, 2]. Однако в случае $\gamma = 0$ особое множество вырождается в точку $\mathbf{x} = 0$ – “вырожденную складку”.

Проекция многообразия Λ^B на физическую плоскость $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ двулистно накрывает двумерную плоскость с удаленной внутренностью круга $|\mathbf{x}| < \gamma$. В данной работе нас интересует вырожденный случай $\gamma = 0$, тогда проекция Λ^B в физическое пространство – это две склеенные в точке $\mathbf{x} = 0$ плоскости.

Нам потребуется фаза на Λ^B

$$S = \int_{(+0,0)}^{(\alpha,\psi)} \langle \mathbf{P}^B, d\mathbf{X}^B \rangle = \alpha$$

и индекс Маслова $m(\alpha, \psi)$ пути, соединяющего центральную точку $(\alpha = +0,\ \psi = 0)$ с точкой (α, ψ):

$$m = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \arg \det \left(\frac{\partial(\mathbf{X} - i\varepsilon \mathbf{P})}{\partial(\alpha, \psi)} \right) \Bigg|_{(+0,0)}^{(\alpha,\psi)} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \arg(\alpha - i\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases}.$$

В силу этого факта индекс Маслова замкнутых путей на Λ^B равен 0: замкнутый путь можно выбрать с $\alpha \neq 0$, тогда приращение аргумента якобиана равно 0, что и означает, что индекс равен нулю. У каждой точки $\mathbf{x} \neq 0$, такой что $\mathbf{x} = \rho \mathbf{n}(\varphi)$ ($\rho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ – полярные координаты) на плоскости $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ существует два прообраза на лагранжевом многообразии Λ^B с координатами

$$\alpha^+ = \rho, \quad \psi^+ = \varphi \quad \text{и} \quad \alpha^- = -\rho, \quad \psi^- = \varphi + \pi.$$

Знак “+" соответствует верхнему листу многообразия Λ^B, а знак “–” – нижнему.

Построим функцию w в виде канонического оператора Маслова $K^h_{\Lambda^B}[A]$. Классическая конструкция канонического оператора предполагает покрытие лагранжева многообразия картами (областями) Ω_j, в которых не обращается в ноль один из якобианов проектирования на канонические плоскости со смешанными координатно-импульсными переменными, последующее построение локальных “предканонических операторов” и их суммирование. В случае особых карт, т.е. когда якобиан $J^B = \det \dfrac{\partial \mathbf{X}^B}{\partial(\alpha, \psi)}$ обращается в ноль на подмножестве карты Ω_j, предканонический оператор определяется в виде интеграла по импульсным переменным. В рассматриваемом примере карт, по меньшей мере, четыре и все они особые [10]. В работе [7] предложены новые интегральные представления для предканонических операторов, основанные на интегрировании сразу по части подходящих координат на лагражевом многообразии. Такие представления, во-первых, часто упрощают вычисление интегралов, во-вторых, сокращают число карт и, в-третьих, позволяют расширить класс задач, асимптотические решения которых можно найти с помощью канонического оператора.

Применение модифицированных формул для канонического оператора в рассматриваем примере дает такое представление [9]:

$$w = K^h_{\Lambda^B} A = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi h}} \times \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{i}{h} \langle \mathbf{n}(\psi), \mathbf{x} \rangle\right) A(\langle \mathbf{n}(\psi), \mathbf{x} \rangle, \psi)\, d\psi. \tag{3}$$

Если выбрать $A = 1$, то, очевидно, получим

$$w = K^h_{\Lambda^B} 1 = \frac{\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{h}} J_0\left(\frac{|\mathbf{x}|}{h}\right). \tag{4}$$

Вместе с тем из общих свойств канонического оператора следует, что при $h \ll 1$ носитель функции w совпадает с проекцией носителя $\operatorname{supp} A(\alpha, \psi)$ на физическую плоскость $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$. Поэтому, выбирая A финитной по переменной α, получим уже локализованную функцию. Задача состоит в том, чтобы выразить (3) через специальные функции. Имеется несколько способов вывода соответствующих формул [8, 11], мы используем простой “наивный” способ, основанный на сравнении асимптотик функций Бесселя и ВКБ асимптотики канонического оператора вне окрестности фокальной точки.

Именно, с учетом равенств для S, J^B, m, используя стандартную ВКБ-формулу (в неособой карте) для функции (3), при $|\mathbf{x}| \geq \delta > 0$ получим

$$
\begin{aligned}
w = {} & \exp\left(-\frac{im(\alpha^+)\pi}{2}\right)\frac{A(\alpha^+,\psi^+)}{\sqrt{|J^B(\alpha^+,\psi^+)|}}\times \\
& \times \exp\left(\frac{iS(\alpha^+,\psi^+)}{h}\right) + \exp\left(-\frac{im(\alpha^-)\pi}{2}\right)\times \\
& \times \frac{A(\alpha^-,\psi^-)}{\sqrt{|J^B(\alpha^-,\psi^-)|}}\exp\left(\frac{iS(\alpha^-,\psi^-)}{h}\right) = \\
& = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\left(\frac{A(\rho,\varphi)}{\sqrt{\rho}}\exp\left(\frac{i}{h}\rho - \frac{i\pi}{4}\right) + \right.\\
& \left. + \frac{A(-\rho,\varphi+\pi)}{\sqrt{\rho}}\exp\left(-\frac{i}{h}\rho + \frac{i\pi}{4}\right)\right).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Между тем в малой окрестности начала координат (фокальной точки) функцию (3) можно представить в виде комбинации функции Бесселя и, возможно, ее производной, т.е. функции J_1 [11]. Такое представление порождает анзац для асимптотики решения в виде

$$
w = a_1(\mathbf{x},h)J_0(\Phi(\mathbf{x},h)) + ia_2(\mathbf{x},h)J_1(\Phi(\mathbf{x},h)), \tag{6}
$$

где $\Phi(\mathbf{x},h), a_j(\mathbf{x},h)$ – некоторые гладкие при $|\mathbf{x}| > 0$ функции, причем $\Phi(\mathbf{x},h) > 0$ при $|\mathbf{x}| > 0$.

Для получения такого анзаца и его дальнейшей реализации используем подход, апеллирующий к лагранжеву многообразию и возможности представления канонического оператора в окрестности каустик в виде некоторых специальных функций, а не такие подходы, как метод эталонных уравнений или метод сращивания асимптотических разложений. Иначе говоря, мы упрощаем ответ, полученный в виде канонического оператора, используя общий подход, находящийся в рамках теории функций. Конкретные дифференциальные уравнения проявляются при построении подходящих лагранжевых многообразий.

Укажем еще на некоторые важные факты. Хотя представление (5) не работает в фокальных точках, где $J^B = 0$, сами функции $J^B(\alpha^\pm,\psi^\pm)$, $S(\alpha^\pm,\psi^\pm)$, $A(\alpha^\pm,\psi^\pm)$ определены, как функции от (x_1,x_2), при этом анзац (6) работает в достаточно широкой окрестности нулей функции $\Phi(\mathbf{x},h)$ (подробнее см. далее замечание 4). Таким образом, сравнивая асимптотику (6) с ВКБ-асимптотикой (5) в неособой области (где $\rho \neq 0$), можно получить выражения для Φ, $a_{1,2}$ через S, J^B и A. Именно, считая, что при отходе от точки $\mathbf{x} = 0$ фаза возрастает, можно заменить функции Бесселя на их асимптотики, что дает

$$
\begin{aligned}
w \approx {} & a_1(\mathbf{x},h)\sqrt{\frac{2}{\pi\Phi(\mathbf{x},h)}}\cos\left(\Phi(\mathbf{x},h) - \frac{\pi}{4}\right) + \\
& + ia_2(\mathbf{x},h)\sqrt{\frac{2}{\pi\Phi(\mathbf{x},h)}}\sin(\Phi(\mathbf{x},h) - \pi/4) = \\
& = \sqrt{\frac{2}{\pi\Phi(\mathbf{x},h)}}\left(\frac{a_1(\mathbf{x},h) + a_2(\mathbf{x},h)}{2}\times\right. \\
& \times \exp\left(i\Phi(\mathbf{x},h) - \frac{i\pi}{4}\right) + \frac{a_1(\mathbf{x},h) - a_2(\mathbf{x},h)}{2}\times \\
& \left.\times \exp\left(-i\Phi(\mathbf{x},h) + \frac{i\pi}{4}\right)\right).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Чтобы определить функции Φ, a_j, сравним (7) и (5), откуда находим

$$
\begin{aligned}
& \Phi = \frac{\rho}{h}, \quad a_1 = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2h}}\times \\
& \times (A(\rho,\varphi) + A(-\rho,\varphi+\pi)), \\
& a_2 = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2h}}(A(\rho,\varphi) - A(-\rho,\varphi+\pi)).
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению.

Утверждение 1. Справедливо представление

$$
\begin{aligned}
w = {} & K^h_{\Lambda^B}A = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2h}}\times \\
& \times \left((A(\rho,\varphi) + A(-\rho,\varphi+\pi))J_0\left(\frac{\rho}{h}\right) + \right. \\
& \left. + i(A(\rho,\varphi) - A(-\rho,\varphi+\pi))J_1\left(\frac{\rho}{h}\right)\right).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Замечание 1. Если $A \equiv 1$, то (8) совпадает с представлением (4).

Замечание 2. Если выбрать функцию A финитной, то и функция (8) также будет финитной.

Замечание 3. Отметим, что полученная функция гладко зависит от переменных (x_1,x_2). Этот факт легко установить в радиально симметричном случае, когда A зависит только от α. Действительно, в этом случае a_1 и a_2/ρ, а также $J_0(\rho/h)$ и $\rho J_1(\rho/h)$ – четные по ρ функции. В случае, когда A зависит также и от φ, раскладывая в ряд Фурье, получаем гладкие по (x_1,x_2) функции:

$$
\begin{aligned}
A(\rho,\varphi) + A(-\rho,\varphi+\pi) = {} & \frac{c_0(\rho) + c_0(-\rho)}{2} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty}[\rho\,(c_n(\rho) + (-1)^n c_n(-\rho))\cos(n\varphi) + \\
& + (d_n(\rho) + (-1)^n d_n(-\rho))\sin(n\varphi)],
\end{aligned}
$$

$$\rho\left(A(\rho,\varphi)-A(-\rho,\varphi+\pi)\right)=\rho\frac{c_0(\rho)-c_0(-\rho)}{2}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho\,\left(c_n(\rho)-(-1)^n c_n(-\rho)\right)\cos(n\varphi)+\right.$$
$$\left.+\left(d_n(\rho)-(-1)^n d_n(-\rho)\right)\sin(n\varphi)\right].$$

Замечание 4. Отметим также, что формулу (8) можно было получить, опираясь на модифицированные интегральные представления для канонического оператора и формулу коммутации канонического оператора с псевдодифференциальным [10]. Здесь же мы, по существу, воспользовались тем фактом, что уравнения $\mathbf{p}=\mathbf{n}(\psi)$, $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{n}(\psi)$ локально задают нормальную форму в окрестности вырожденных особенностей лагранжевых многообразий типа складки. В окрестности таких особенностей канонический оператор представляется в виде функций Бесселя, что позволяет в результате простого сравнения асимптотик функций Бесселя и ВКБ получать глобальные формулы. Такой подход кажется нам более простым и легко алгоритмизуемым. Поэтому будем использовать его и далее, учитывая соображение о нормальных формах.

3. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ БЕССЕЛЕВЫ ПУЧКИ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Обсудим теперь вопрос о бесселевых пучках в трехмерном случае. В некоторых случаях, чтобы получить формулы для пучков, можно использовать комплексный метод ВКБ и его модификации [12]. Однако здесь обсудим более простой путь, не вполне аккуратный с математической точки зрения, но конструктивный и эффективный с точки зрения конкретных вычислений, который состоит в следующем. Пучки являются (асимптотическими) решениями уравнения Гельмгольца (1), удовлетворяющими при $z=0$ условию

$$u|_{z=0}=w=K^h_{\Lambda^B}\left[A(\alpha)\right]. \tag{9}$$

Будем считать, что $A(\alpha)$ – финитная функция, причем для простоты будем считать, что она не зависит от ψ. Решение задачи (1), (9) не единственно: можно найти два решения, описывающие пучки, условно говоря, распространяющиеся в разные стороны вдоль оси z, и нужно добавить еще одно условие, выделяющее один из пучков. Но формально можно представить уравнения Гельмгольца в виде (напомним, что здесь и далее в качестве k мы берем $k'=hk$ и опускаем штрихи)

$$\left(ih\frac{\partial}{\partial z}+\sqrt{k^2+h^2\Delta}\right)\left(ih\frac{\partial}{\partial z}-\sqrt{k^2+h^2\Delta}\right)u=0. \tag{10}$$

Тогда решения, описывающие волны, бегущие в одну сторону, будут удовлетворять одному из псевдодифференциальных уравнений

$$-ih\frac{\partial u}{\partial z}=\pm\sqrt{k^2+h^2\Delta}u. \tag{11}$$

Переменная z играет роль времени, причем производная по z входит в эти уравнения в первой степени и они в некотором смысле аналогичны уравнениям Шредингера. Интересующее нас решение является решением задачи Коши для (11) с начальным условием (9). Эти уравнения являются некорректными, но их использование как вспомогательных для вычисления квазиклассических асимптотик уравнения Гельмгольца с заданными граничными условиями представляется очень удобным: для получения квазиклассических асимптотик решения задачи Коши имеется простой конструктивный алгоритм [6]. Проще говоря, некорректность не проявляется на классе конструируемых асимптотических решений и, после того как асимптотическое решение u задачи Коши (9), (11) будет построено, его прямая подстановка в уравнение Гельмгольца дает малую невязку по параметру h. То есть получаемая функция является, по крайней мере, формальным асимптотическим решением уравнения Гельмгольца.

Ограничимся в дальнейшем уравнением со знаком “+", уравнение со знаком “–” рассматривается аналогично. Для построения асимптотических решений задачи (11), (9) воспользуемся стандартной схемой [5, 6], состоящей из следующих шагов. Символ оператора $-\sqrt{k^2+h^2\Delta}$ – классический гамильтониан $L=-\sqrt{k^2-|\mathbf{p}|^2}$ – и начальное условие (9) порождают задачу Коши для гамильтоновой системы:

$$\dot{\mathbf{p}}=\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial z}=0,\quad \dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}=\frac{\mathbf{p}}{\sqrt{k^2-|\mathbf{p}|^2}}, \tag{12}$$

с начальными условиями из Λ^B

$$\mathbf{p}|_{z=0}=\mathbf{n}(\psi),\quad \mathbf{x}|_{z=0}=\alpha\mathbf{n}(\psi).$$

Ее решения определяют фазовый поток g^z_L и дают семейство лагранжевых многообразий $\Lambda^B_z=g^z_L\Lambda^B$, полученных сдвигом начального многообразия Λ^B на время z

$$\Lambda^B_z=\left\{\mathbf{p}=\mathbf{P}_z(\alpha,\psi)\equiv\mathbf{n}(\psi),\mathbf{x}=\mathbf{X}_z(\alpha,\psi)\equiv\right.$$
$$\left.\equiv\left(\alpha+\frac{z}{\sqrt{k^2-1}}\right)\mathbf{n}(\psi)\right\}. \tag{13}$$

Как видим, многообразия Λ^B_z совпадают, как геометрические объекты, т.е. Λ^B инвариантно отно-

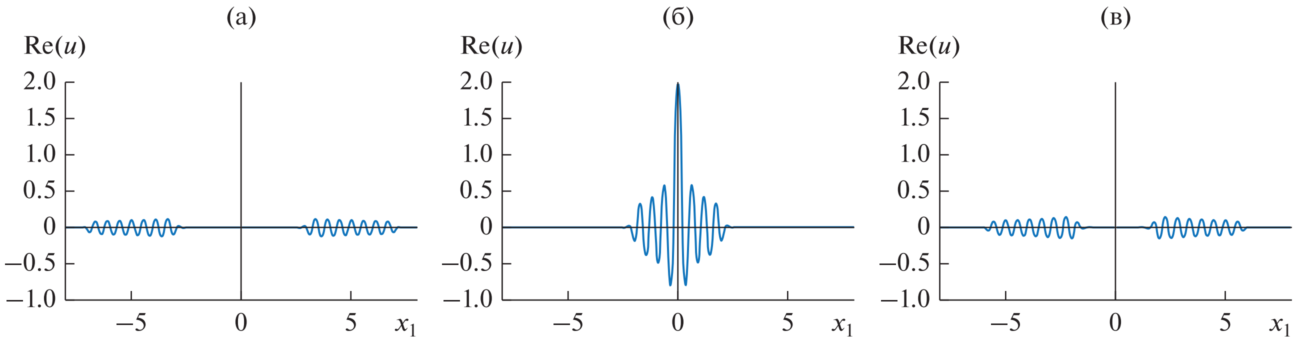

Рис. 1. Действительная часть локализованного пучка Бесселя (14) в зависимости от x_1 при $x_2 = 0$ для $z = -2$ (а), 0 (б) и 1.5 (в).

сительно сдвигов g_L^z. Амплитуда A сохраняется вдоль траекторий системы (12), поэтому на лагранжевых многообразиях Λ_z^B амплитуда равна $A(\alpha)$. Поскольку фаза, как решение уравнения эйконала, определяется неоднозначно, а с точностью до некоторой функции, зависящей от z, необходимо определить набег фазы в асимптотике рассматриваемого решения. Он определяется интегралом

$$\phi = \int_0^z (\langle \mathbf{p}, L_{\mathbf{p}} \rangle - L)\, dz = z \frac{k^2}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Координаты (α, ψ) можно использовать на всех многообразиях Λ_z^B. Тогда согласно общей теории [5, 6] решение задачи Коши (11), (9) представляется в виде

$$u = \exp\left(\frac{i}{h} \frac{zk^2}{\sqrt{1 - k^2}}\right) K_{\Lambda_z^B}^h [A(\alpha)],$$

причем в качестве центральной точки на Λ_z^B выбирается точка с координатами $(0+, 0)$, как и на начальном многообразии. Перейдем в последней формуле к координатам

$$(\alpha', \psi) = \left(\alpha + \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}, \psi\right).$$

Поскольку в старой системе координат центральная точка имела координаты $\alpha = +0$, $\psi = +0$, то в новой системе координат центральная точка будет иметь координаты $\alpha' = +\frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}$, $\psi = +0$. Далее воспользуемся тем, что смена отмеченной точки дает дополнительный фазовый множитель, т.е. канонический оператор Маслова на лагранжевом многообразии Λ_z^B с отмеченной точкой $\left(+\frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}, +0\right)$ равен каноническому оператору Маслова на лагранжевом многообразии Λ_z^B с отмеченной точкой $(+0, +0)$, умноженному на $\exp\left(-\frac{iz}{h\sqrt{k^2 - 1}}\right)$. Учитывая эти соображения, полученный ранее фазовый множитель $\exp\left(\frac{i\phi}{h}\right)$, а также тот факт, что Λ_z^B в новых координатах совпадает с Λ^B, приходим к окончательной формуле

$$\begin{gathered} u = \exp\left(\frac{iz\sqrt{k^2 - 1}}{h}\right) K_{\Lambda^B}^h \left[A\left(\alpha' - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right)\right] = \\ = \exp\left(\frac{iz\sqrt{k^2 - 1}}{h}\right) \frac{\sqrt{\pi} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2h}} \times \\ \times \left(\left(A\left(\rho - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right) + A\left(-\rho - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right)\right) J_0\left(\frac{\rho}{h}\right) + \right. \\ \left. + i\left(A\left(\rho - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right) - A\left(-\rho - \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}}\right)\right) J_1\left(\frac{\rho}{h}\right)\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Она определяет асимптотические решения, описывающие локализованные бесселевы пучки уравнения Гельмгольца. Полученное решение проиллюстрировано на рис. 1.

Замечание 5. В теории волновых пучков часто используется параксиальное приближение. Напомним простой вывод соответствующего уравнения в рассматриваемом случае. Можно искать решение в виде

$$u = \exp\left(\frac{ikz}{h}\right) v(z, x_1, x_2)$$

и считать, что амплитудная функция v меняется медленно по сравнению с быстроосциллирующей плоской волной. Тогда, подставляя решение такого вида в (1), можно пренебречь второй производной $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, откуда приходим к уравнению Шредингера

$$-ih \frac{\partial}{\partial z} v = \frac{h^2}{2k} \Delta v. \tag{15}$$

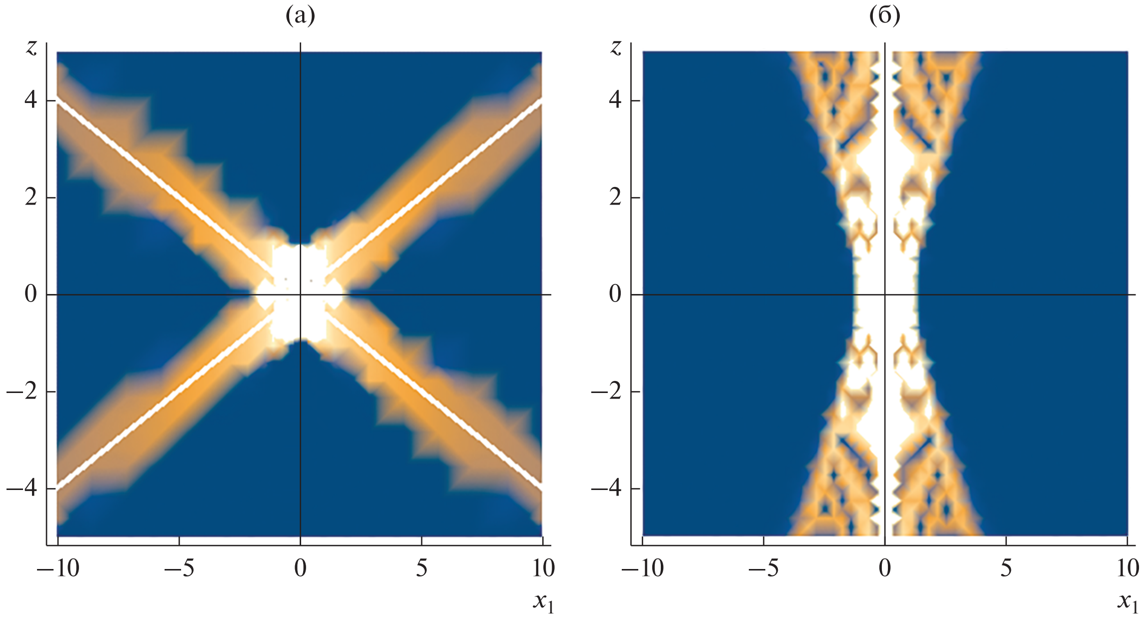

Рис. 2. Интенсивность локализованного пучка Бесселя (14) при $x_2 = 0$ (а) и пучка Лагерра–Гаусса (39) при $x_2 = 0$ (б): чем больше модуль значения, тем более светлый цвет.

(Это же уравнение можно получить, по крайней мере формально, из (11) в результате представления в (11) оператора

$$\sqrt{k^2 - h^2\Delta} = k - \frac{1}{2k}h^2\Delta + O\left(1/k^3\right)$$

и последующего выделения из решения множителя $\exp\left(ikz/h\right)$.)

Асимптотика решения $v\left(z,\mathbf{x}\right)$ задачи (15) с начальным условием (9) определяется каноническим оператором $K^h_{\tilde{\Lambda}^B_z}A$, где $\tilde{\Lambda}^B_z$ получен сдвигом Λ^B вдоль гамильтонова векторного поля с гамильтонианом $\tilde{L} = \frac{1}{2k}|\mathbf{p}|^2$ и принимает вид

$$\tilde{\Lambda}^B_z = \left\{\mathbf{x} = \left(\alpha + \frac{z}{k}\right)\mathbf{n}\left(\psi\right),\ \mathbf{p} = \mathbf{n}\left(\psi\right)\right\}.$$

Таким образом, в параксиальном приближении

$$u \approx \exp\left(\frac{ikz}{h}\right)K_{\tilde{\Lambda}^B_z}\left[A\right] \approx$$
$$\approx \exp\left(\frac{izk}{h}\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)\right)\frac{\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2h}}\times$$
$$\times\left(\left(A\left(\rho - \frac{z}{k}\right) + A\left(-\rho - \frac{z}{k}\right)\right)J_0\left(\frac{\rho}{h}\right) + \right.$$
$$\left. + i\left(A\left(\rho - \frac{z}{k}\right) - A\left(-\rho - \frac{z}{k}\right)\right)J_1\left(\frac{\rho}{h}\right)\right),$$

что близко к решению (14) при больших k.

4. “СИЛЬНАЯ” ЛОКАЛИЗАЦИЯ БЕССЕЛЕВЫХ ПУЧКОВ И АСИМПТОТИКА ПУЧКОВ ЛАГЕРРА–ГАУССА В РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Как отмечено выше, проведенная локализация бесселевых пучков имеет такое свойство, что чем сильнее их локализация, тем на меньшем отрезке оси z их амплитуда не обращается в ноль. Вместе с тем хорошо известно, что гауссовы пучки распространяются на далекие расстояния, не сильно расплываясь. При этом, если в нормальной плоскости к оси распространения z имеются осцилляции, то возникают известные пучки Лагерра–Гаусса (подробнее, а также про другие классы пучков см. [13, 14]). Мы хотим показать, что такие пучки также представляют собой локализацию бесселевых пучков, но уже другого типа. При этом, в отличие от локализованных пучков Бесселя, которые при движении вдоль оси z сначала собираются, фокусируются, а затем расплываются (рис. 2а, ось z направлена вверх), пучки Лагерра–Гаусса практически не расплываются, а распространяются в канале (рис. 2б).

Отметим, что медленное затухание бесселевых пучков в направлении, нормальном к оси z, имеет геометрическую природу: лагранжево многообразие Λ^B не компактно, поэтому (асимптотический) носитель канонического оператора K_{Λ^B} – это двумерная плоскость. Напомним, что лагранжево многообразие Λ^B представляет собой совместную поверхность уровня гамильтонианов

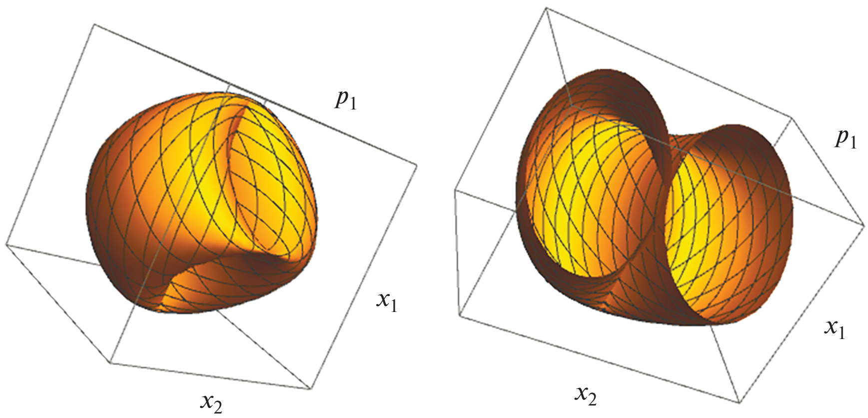

Рис. 3. Лагранжево многообразие Λ^L (a) и его сечение (б).

$H = p_1^2 + p_2^2$ и $M = p_1x_2 - p_2x_1$ и некомпактность связана с гамильтонианом H. Заменим первый гамильтониан на гамильтониан гармонического осциллятора $\mathscr{H} = p_1^2 + p_2^2 + \sigma_0^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)$, тогда задаваемая константами $\mathscr{E} > 0, \gamma \geq 0$ поверхность уровня

$$\mathscr{H} = \mathscr{E}, \quad M = \gamma \tag{16}$$

– это ограниченное множество, представляющее при $\gamma \neq 0$ двумерный тор Лиувилля (двумерное лагранжево многообразие) Λ^L (рис. 3). Вместо энергии $\mathscr{E}$ удобно использовать другой параметр $R_0 = \dfrac{\sqrt{\mathscr{E}}}{\sigma_0}$, тогда проекция Λ^L на двумерную плоскость $\mathbb{R}_x^2$ двулистно накрывает кольцо с границами-окружностями $\rho \equiv |\mathbf{x}| = \gamma$ и $|\mathbf{x}| = R_0$. В радиально симметричном случае $\gamma = 0$, т.е. внутренняя граница стягивается в точку, Λ^L превращается в вырожденный тор, проекция Λ^L на физическую плоскость $\mathbb{R}_\mathbf{x}^2$ становится кругом и, в отличие от проекции Λ^B, является *ограниченным* множеством. При этом, забегая вперед, скажем, что его граница – окружность $|\mathbf{x}| = R_0$ – это простая каустика, а точка $\mathbf{x} = 0$, как и в случае многообразия Λ^B, это сильная фокальная точка, представляющая собой вырожденную простую каустику. Именно этот случай с $\gamma = 0$ будем рассматривать далее.

Схема дальнейших рассуждений аналогична, используемой в разд. 3. Сначала строим канонический оператор Маслова, отвечающий многообразию Λ^L, причем ограничиваемся радиально симметричным случаем и представляем его в виде функций Бесселя и Эйри. При квантовании символов гамильтонианов $\mathscr{H}$ и M получаем двумерный оператор Шредингера $\hat{\mathscr{H}}$ для радиально симметричного гармонического осциллятора и двумерный оператор $\hat{M}$ момента. Поэтому построенные функции представляют собой асимптотики при больших номерах радиально симметричных собственных функций оператора $\hat{\mathscr{H}}$, которые, как известно, представляются в виде функций Гаусса–Лагерра.

Затем строим асимптотические решения задачи Коши с начальными условиями в виде канонического оператора, заданного на многообразии Λ^L. Для упрощения вычислений вместо уравнения (11) мы используем его параксиальное приближение. Именно, будем искать решение трехмерного уравнения Гельмгольца в виде

$$u = \exp\left(-\frac{ikz}{h}\right)v(z, \mathbf{x}),$$

пренебрегая второй производной $\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$. Получим задачу Коши для уравнения Шредингера

$$-ih\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{2k}h^2\Delta v, \quad v|_{z=0} = K_{\Lambda^L}[1]. \tag{17}$$

Тогда асимптотика решения при произвольном z определяется каноническим оператором $K_{\Lambda_z^L}[1]$, где $\Lambda_z^L = g_{\mathscr{L}}^z(\Lambda^L)$ получено сдвигом вдоль гамильтонова векторного поля с гамильтонианом $\mathscr{L} = -\dfrac{1}{2k}|\mathbf{p}|^2$ (представление для полученного канонического оператора в виде специальных функций будет приведено ниже). Поскольку носитель полученного асимптотического решения в плоскостях, нормальных к оси z, – ограниченное множество, то никаких срезающих функций в этой конструкции использовать не нужно.

Замечание 6. Отметим, что здесь, как и в предыдущем разделе, вместо параксиального приближения можно использовать представление (11) для уравнения Гельмгольца и сдвигать начальное многообразие Λ^L вдоль траекторий соответствующих гамильтоновых систем. При этом полученное многообразие будет иметь особенности того же типа, что и Λ_z^L, однако вычисления оказываются более сложными, что, видимо, приводит к более громоздким формулам. Мы планируем подробно изучить этот вопрос в дальнейших работах.

4.1. Лагранжево многообразие для двумерного радиально симметричного гармонического осциллятора

Опишем подробно многообразие Λ^L, объекты на нем и построим отвечающий им канонический оператор.

Утверждение 2 состоит из семи тезисов.

1. Множество Λ^L в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^4_{\mathbf{p},\mathbf{x}}$, задаваемое равенствами (16), — гладкое двумерное лагранжево многообразие, которое может быть описано равенствами

$$\begin{gathered}\Lambda^L = \{\mathbf{p} = \mathbf{P}^L(\alpha,\beta) = -R_0\sigma_0\,\mathbf{n}(\alpha+\beta)\sin\beta,\\ \mathbf{x} = \mathbf{X}^L(\alpha,\beta) = \\ = R_0\mathbf{n}(\alpha+\beta)\cos\beta, \alpha\in(-\pi,\pi],\ \beta\in[0,\pi)\},\end{gathered} \tag{18}$$

где, как и раньше, $\mathbf{n}(\psi) = (\cos\psi,\sin\psi)^T$ — единичный вектор.

2. В качестве инвариантной (относительно потоков $g^t_{\mathcal{H}}$ и g^τ_M) меры можно выбрать $d\alpha\wedge d\beta$. Действительно, при действии фазового потока $g^t_{\mathcal{H}}$ получаем

$$\begin{gathered}g^t_{\mathcal{H}}(\Lambda^L) = \{\mathbf{p} = -R_0\sigma_0\,\mathbf{n}(\alpha+\beta)\sin(\beta+\sigma_0 t),\\ \mathbf{x} = R_0\mathbf{n}(\alpha+\beta)\cos(\beta+\sigma_0 t)\},\end{gathered}$$

т.е. координата β сдвигается на $\sigma_0 t$, а координата α сдвигается на $-\sigma_0 t$.

При действии фазового потока g^τ_M имеем

$$\begin{gathered}g^\tau_M(\Lambda^L) = \{\mathbf{p} = -R_0\sigma_0\,\mathbf{n}(\alpha+\beta+\tau)\sin\beta,\\ \mathbf{x} = R_0\mathbf{n}(\alpha+\beta+\tau)\cos\beta\},\end{gathered}$$

т.е. координата α сдвигается на τ.

3. Матрицы Якоби $\dfrac{\partial\left(X_1^L,X_2^L\right)}{\partial(\alpha,\beta)}$, $\dfrac{\partial\left(P_1^L,P_2^L\right)}{\partial(\alpha,\beta)}$ проектирования многообразия Λ^L на соответственно плоскости $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ и $\mathbb{R}^2_{\mathbf{p}}$ имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{X}^L}{\partial(\alpha,\beta)} = (R_0\sigma_0\,\mathbf{n}_\perp(\alpha+\beta)\cos\beta,\\ -R_0\sigma_0(\mathbf{n}(\alpha+\beta)\sin\beta - \mathbf{n}_\perp(\alpha+\beta)\cos\beta)),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{P}^L}{\partial(\alpha,\beta)} = (-R_0\sigma_0\,\mathbf{n}_\perp(\alpha+\beta)\sin\beta,\\ -R_0\sigma_0(\mathbf{n}(\alpha+\beta)\cos\beta + \mathbf{n}_\perp(\alpha+\beta)\sin\beta)),\end{gathered} \tag{19}$$

$$\mathbf{n}_\perp(\gamma) = \begin{pmatrix}-\sin\gamma\\ \cos\gamma\end{pmatrix}, \tag{20}$$

и якобиан проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2_x$ определяется выражением

$$J^L = \det\frac{\partial\mathbf{X}^L}{\partial(\alpha,\beta)} = \frac{R_0^2}{2}\sin(2\beta).$$

Таким образом, фокальные точки на Λ^L определяются уравнениями $\beta = 0$, тогда $\mathbf{x} = R_0\mathbf{n}(\alpha)$, или $\beta = \pi/2$, тогда $\mathbf{x} = 0$.

Множество $\mathbf{x} = R_0\mathbf{n}(\alpha)$ образует окружность Γ радиусом R_0. Ее прообраз на Λ^L — также окружность в фазовом пространстве, лежащая в плоскости $\mathbf{p} = 0$. При этом каустика Γ — простая, ранг матрицы Якоби на ней равен 1.

Точка $\mathbf{x} = 0$ — фокальная точка — лагранжева сингулярность не общего положения, ее прообраз на Λ^L — окружность $|\mathbf{p}| = R_0\sigma_0$ в плоскости $\mathbf{x} = 0$ в четырехмерном фазовом пространстве.

4. Проекция Λ^L на конфигурационную плоскость — это круг $|\mathbf{x}| \le R_0$, а граница этого круга — простая каустика Γ. При этом Λ^L накрывает $0 < |\mathbf{x}| < R_0$ двукратно. Точка $\mathbf{x}^0 = R_0\mathbf{n}\left(\alpha^0+\beta^0\right)\cos\beta^0$ имеет два прообраза на Λ^L: точку $\left(\alpha = \alpha^0, \beta = \beta^0\right)$ и точку $\left(\alpha = \alpha^0 + 2\beta^0, \beta = \pi - \beta^0\right)$.

Для определения канонического оператора следует зафиксировать центральную точку. Выберем ее в виде $\alpha = +0, \beta = +0$.

5. Вычислим индексы Маслова путей в неособых точках. Рассмотрим путь $\{\alpha = +0, \beta = t | t\in[0,\pi)\}$. В центральной точке с координатами $\alpha = +0, \beta = +0$ якобиан J^L положителен, и мы выберем индекс в этой точке равным 0. Поскольку якобиан в точках с координатой $\beta\in(+0,\pi/2-0)$ также положителен, то индекс в таких точках тоже равен 0. Вычислим индекс в точках с координатами

$\beta \in (\pi/2+0, \pi-0)$. Для этого нужно вычислить приращение аргумента функции

$$J_\varepsilon = \det \frac{\partial\left(\mathbf{X}^L - i\varepsilon \mathbf{P}^L\right)}{\partial(\alpha,\beta)} =$$
$$= \frac{R_0^2}{2}\left(\sin(2\beta)\left(1+\sigma_0^2\varepsilon^2\right) - 2i\sigma_0\varepsilon\cos(2\beta)\right)$$

при изменении β от $\beta = \pi/2 - 0$ до $\beta = \pi/2 + 0$. Это приращение легко определяется и равно π. Таким образом, индекс в точках $\beta \in (\pi/2+0, \pi-0)$ равен 1.

6. Базисные замкнутые пути на Λ^L задаются равенствами

$$\gamma_1 : \alpha = \alpha_0, \quad \gamma_2 : \beta = \beta_0 \neq 0, \frac{\pi}{2}.$$

Индекс пути γ_1 равен 2, что дает условие квантования

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\gamma_1} \langle \mathbf{p}, d\mathbf{x}\rangle = \frac{R_0^2\sigma_0}{4h} = \frac{1}{2} + m, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{21}$$

которое выполняется для $R_0^2 = \dfrac{h}{\sigma_0}(4m+2)$.

Индекс пути γ_2 равен 0, что дает условие квантования

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\gamma_2} \langle \mathbf{p}, d\mathbf{x}\rangle = 0,$$

которое выполняется автоматически.

7. В окрестности каустики Γ (что соответствует $\beta = 0$) справедливо разложение

$$\mathbf{P}^L = -R_0\sigma_0\mathbf{n}(\alpha)\left(\beta + O\left(\beta^3\right)\right),$$
$$\mathbf{X}^L = R_0\mathbf{n}(\alpha)\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 + O(\beta^4)\right),$$

т.е. по нормали к каустике имеем нормальную форму, соответствующую функции Эйри и ее производной.

В окрестности фокальной точки $\mathbf{x} = 0$ (что соответствует $\beta = \dfrac{\pi}{2}$) имеем разложение

$$\mathbf{P}^L = -R_0\sigma_0\mathbf{n}(\alpha+\pi/2)\left(1 - O\left(\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right),$$
$$\mathbf{X}^L = -R_0\mathbf{n}(\alpha+\pi/2)\left(\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)\right),$$

то есть в окрестности этой точки имеем нормальную форму, соответствующую функции Бесселя J_0 и ее производной.

Используя соображения из разд. 2, приводящие к представлению канонического оператора через функции Бесселя в окрестности фокальной точки, порожденной вырожденной складкой, и аналогичные соображения, позволяющие представить канонический оператор через функции Эйри в окрестности простой невырожденной каустики (складки) [8], приходим к глобальному представлению $K_{\Lambda^L}[1]$ с помощью функций Бесселя и Эйри. Полный вывод этих формул приведен в более общем случае в разд. 4.2.

Утверждение 3. Для старшей части канонического оператора на Λ^L в области $|x| < \sqrt{\dfrac{(4m+2)h}{\sigma_0}} - \varepsilon$ с малым $\varepsilon > 0$ имеется следующее глобальное представление в виде функции Бесселя:

$$K_{\Lambda^L}[1] \approx (-1)^m \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{\left|\Psi\left(\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|\mathbf{x}|, m\right)\right|}}{\sqrt{\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|\mathbf{x}|\sqrt{(4m+2) - \frac{\sigma_0}{h}|\mathbf{x}|^2}}} J_0\left(\Psi\left(\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|\mathbf{x}|, m\right)\right),$$

где

$$\Psi(r,m) = (2m+1)\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{r}{\sqrt{4m+2}}\right) + \\ + \frac{r}{2}\sqrt{(4m+2) - r^2}. \tag{22}$$

В окрестности $|x| > \varepsilon$ для старшей части канонического оператора справедливо следующее представление в виде функции Эйри:

$$K_{\Lambda^L}[1] \approx \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{2}\left|\Phi\left(\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|\mathbf{x}|, m\right)\right|^{1/4}}{\sqrt{\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|\mathbf{x}|\sqrt{(4m+2) - \frac{\sigma_0}{h}|\mathbf{x}|^2}}} \mathrm{Ai}\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}|\mathbf{x}|, m\right)\right),$$

где

$$\Phi(r,m) = \begin{cases} -\left(\dfrac{3}{2}\left((2m+1)\arccos\dfrac{r}{\sqrt{4m+2}} - \dfrac{r}{2}\sqrt{(4m+2) - r^2}\right)\right)^{2/3}, & r \leq \sqrt{4m+2}, \\ \left(\dfrac{3}{2}\left((2m+1)\operatorname{arch}\dfrac{r}{\sqrt{4m+2}} - \dfrac{r}{2}\sqrt{r^2 - (4m+2)}\right)\right)^{2/3}, & r > \sqrt{4m+2}. \end{cases} \tag{23}$$

Замечание 7. Приведенные формулы дают асимптотику пучков Лагерра–Гаусса, определяемых полиномом Лагерра L_m ($m \in \mathbb{Z}$) следующим образом [13], см. также [15]:

$$v_0(x) = CL_m\left(\frac{\sigma_0|\mathbf{x}|^2}{h}\right)\exp\left(-\frac{\sigma_0|\mathbf{x}|^2}{2h}\right), \qquad (24)$$

где

$$C = (-1)^m \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}.$$

Действительно, функция (24) радиально-симметрична и является собственной функцией оператора Шредингера для гармонического осциллятора $-h^2\Delta + \sigma_0^2(x_1^2 + x_2^2)$ с собственным значением $\mathscr{E}_m = \sigma_0 h(4m+2)$ (ср. с (21) с учетом $\mathscr{E} = R_0^2\sigma_0^2$). Сравнение графиков функции, определяемой формулой (24), и полученной асимптотики приведено на рис. 4.

Замечание 8. С учетом предыдущего замечания полученные формулы дают асимптотику полиномов Лагерра при больших значениях индекса. Именно, при больших (целых) n и $r^2 < b(4n+2)$, $b < 1$, получаем

$$L_n(r^2)\exp(-r^2/2) \approx \frac{\sqrt{\Psi(r,n)}}{\sqrt[4]{r^2(4n+2-r^2)}}J_0(\Psi(r,n)),$$

а в окрестности $r^2 > a, a > 0$ —

$$L_n(r^2)\exp(-r^2/2) \approx$$
$$\approx (-1)^n\sqrt{2}\frac{|\Phi(r,n)|^{1/4}}{\sqrt[4]{r^2|4n+2-r^2|}}\mathrm{Ai}(\Phi(r,n)).$$

Приведенная асимптотика согласуется с известными результатами для полиномов Лагерра, в частности, с асимптотикой в работах [16, 17].

4.2. *Динамика лагранжева многообразия и асимптотика пучков Лагерра–Гаусса*

Как упоминалось выше, асимптотика решения задачи (17) определяется каноническим оператором $K_{\Lambda_z^L}1$ на лагранжевом многообразии $\Lambda_z^L = g_{\mathscr{L}}^z(\Lambda^L)$, полученном сдвигом Λ^L вдоль гамильтонова векторного поля с гамильтонианом $\mathscr{L} = -\frac{1}{2k}\left(p_1^2 + p_2^2\right)$ на время z. Это многообразие имеет вид

$$\Lambda_z^L = \{\mathbf{p} = \mathbf{P}_z^L(\alpha,\beta,t) \equiv \mathbf{P}^L(\alpha,\beta),$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_z^L(\alpha,\beta,t) \equiv \mathbf{X}^L(\alpha,\beta) - \frac{z}{k}\mathbf{P}^L(\alpha,\beta), \qquad (25)$$
$$\alpha \in (-\pi,\pi],\ \beta \in [0,\pi)\}.$$

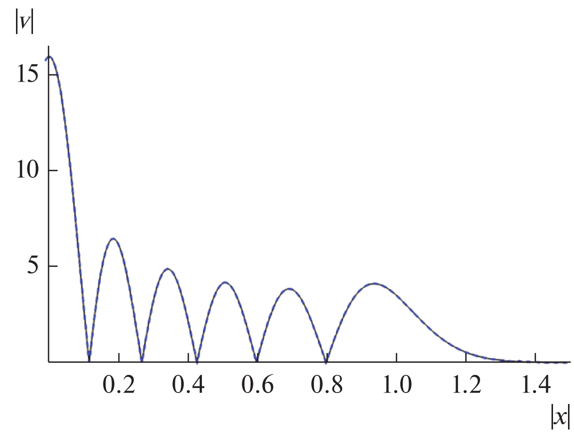

Рис. 4. График модуля (24) при $z = 0$ (сплошная кривая) и асимптотики из утверждения 3 (штриховая) для $h = 0.1$, $m = 5$, $k = 3$, $\sigma_0 = 2$.

Несложно убедиться, что вектор-функции $\mathbf{P}_z^L$ и $\mathbf{X}_z^L$ определяются выражениями

$$\mathbf{X}_z^L(\alpha,\beta) = R_0\frac{\sqrt{k^2+\sigma_0^2z^2}}{k}\mathbf{n}(\alpha+\beta)\cos(\beta-\delta_*), \qquad (26)$$

$$\mathbf{P}_z^L(\alpha,\beta) = -R_0\sigma_0\mathbf{n}(\alpha+\beta)\sin\beta =$$
$$= -\frac{R_0k\sigma_0}{\sqrt{k^2+\sigma_0^2z^2}}\mathbf{n}(\alpha+\beta)\sin(\beta-\delta_*) - \left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial x_2}\end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_z^L}, \qquad (27)$$

$$\delta_* = \arccos\frac{k}{\sqrt{k^2+\sigma_0^2z^2}},$$
$$F = \frac{zk\sigma_0^2}{\left(k^2+\sigma_0^2z^2\right)}\frac{x_1^2+x_2^2}{2}. \qquad (28)$$

Замечание 9. Параметризация Λ_z^L имеет вид, схожий с параметризацией Λ^L. Действительно,

$$\mathbf{P}_z^L = -R_z\sigma_z\mathbf{n}(\alpha'+\beta')\sin\beta' - \left.\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_z^L},$$
$$\mathbf{X}_z^L = R_z\mathbf{n}(\alpha'+\beta')\cos(\beta'),$$

где

$$\alpha' = \alpha + \delta_*, \quad \beta' = \beta - \delta_*,$$
$$R_z^2 = \frac{R_0^2}{k^2}\left(k^2+\sigma_0^2z^2\right), \quad \sigma_z = \frac{\sigma_0k^2}{k^2+\sigma_0^2z^2}.$$

В силу последнего замечания свойства лагранжева многообразия Λ_z^L схожи со свойствами Λ^L. Перечислим основные из них.

1. Якобиан проектирования на $\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^2$ имеет вид

$$J_z^L = \frac{R_z^2}{2}\sin(2\beta') = \frac{R_0^2(k^2+\sigma_0^2z^2)}{2k^2}\sin\left(2(\beta-\delta_*)\right).$$

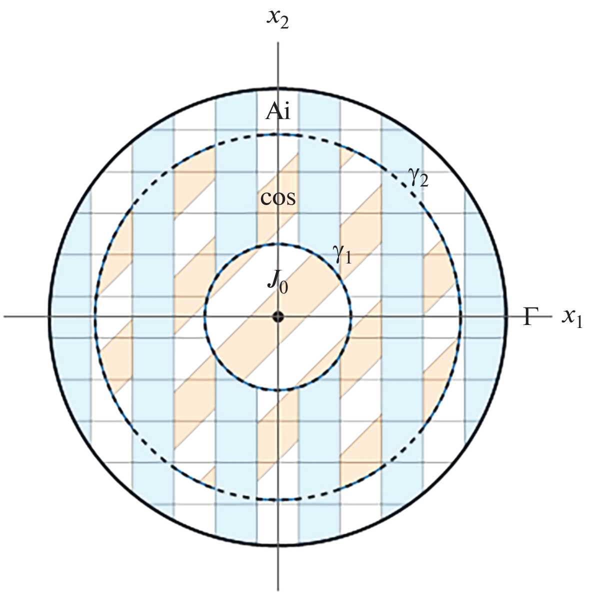

Рис. 5. Проекция лагранжева многообразия на плоскость $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ – круг. Внешняя окружность Γ – простая каустика. В достаточно большой ее окрестности – кольце, ограниченном окружностями Γ и γ_1, асимптотика представляется в виде функции Ai. В достаточно широкой окрестности особой точки $|\mathbf{x}| = 0$ – круге, ограниченном окружностью γ_2, асимптотика представляется в виде функции Бесселя J_0. В пересечении этих областей (кольце, ограниченном окружностями γ_1 и γ_2) имеет место ВКБ-асимптотика, которую можно представить в виде тригонометрических функций. Поскольку в этой области работает также асимптотика и через функцию Эйри, и через функцию Бесселя, то сравнивая асимптотики этих функций с ВКБ-асимптотикой, можно получить выражения для их аргументов.

2. Фокальная точка $\beta = \delta_*$ ($\beta' = 0$) соответствует простой каустике Γ, которая является окружностью

$$|\mathbf{x}| = \frac{R_0}{k}\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2} \equiv R_z.$$

В достаточно широкой окрестности этой каустики ($|\mathbf{x}| > \varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$) асимптотика определяется линейной комбинацией функции Эйри Ai и ее производной ([8] и рис. 5), т.е.

$$\begin{gathered}\left[K_{\Lambda_z^L} 1\right] \approx \exp\left(\frac{i}{h}\Sigma_A(\mathbf{x}, z)\right)\times \\ \times\left(A_1(\mathbf{x}, z)\,\mathrm{Ai}\left(\frac{\Phi_z(\mathbf{x})}{h^{2/3}}\right) + A_2(\mathbf{x}, z)\,\mathrm{Ai}'\left(\frac{\Phi_z(\mathbf{x})}{h^{2/3}}\right)\right).\end{gathered} \tag{29}$$

Фокальные точки $\beta = \dfrac{\pi}{2} + \delta_*$ ($\beta' = \dfrac{\pi}{2}$) соответствуют особой точке $|\mathbf{x}| = 0$, в достаточно широкой окрестности которой ($|\mathbf{x}| < R_z - \varepsilon$) асимптотика определяется линейной комбинацией функций Бесселя J_0 и J_1 [11], а именно

$$\begin{gathered}\left[K_{\Lambda_z^L} 1\right] \approx \exp\left(\frac{i}{h}\Sigma_J(\mathbf{x}, z)\right)\times \\ \times\left(B_1(\mathbf{x}, z)\,J_0\left(\frac{\Psi_z(\mathbf{x})}{h}\right) + B_2(\mathbf{x}, z)\,J_1\left(\frac{\Psi_z(\mathbf{x})}{h}\right)\right).\end{gathered} \tag{30}$$

3. Лагранжево многообразие проектируется в круг $|\mathbf{x}| \le R_z$, при этом каждая неособая точка $\mathbf{x}^0 = R_z\mathbf{n}\left(\alpha^0 + \beta^0\right)\cos\left(\beta^0 - \delta_*\right)$ имеет два прообраза

$$\begin{gathered}\beta^1 = \beta^0, \quad \alpha^1 = \alpha^0 \quad \text{и} \quad \beta^2 = \pi + \delta_* - \beta^0, \\ \alpha^2 = \alpha^0 + 2\beta^0 - \delta_*.\end{gathered}$$

Определим фазы. За счет сдвига по времени появляется фазовый множитель, определяемый гамильтонианом $\mathcal{L} = -\dfrac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right)$ следующим образом:

$$\int_0^t \left(\langle \mathbf{p}, \mathcal{L}_{\mathbf{p}}\rangle - \mathcal{L}\right)\Big|_{\substack{\alpha=+0,\\ \beta=+0}} dt = 0,$$

так как в отмеченной точке $\beta = +0$ на многообразии Λ_z^L значение $\mathbf{p}^2$ равно нулю. Далее можно рассматривать многообразие Λ_z^L при фиксированном z с отмеченной точкой $\alpha = +0$, $\beta = +0$, как и на начальном лагранжевом многообразии. Путь интегрирования γ^i в точку $\left(\alpha^i, \beta^i\right)$ определим следующим образом:

$$\begin{gathered}\gamma^i = \gamma_1^i \cup \gamma_2^i, \\ \gamma_1^i = \{\alpha = +0, \beta = s \mid s \in \left[+0, \beta^i\right]\}, \\ \gamma_2^i = \{\alpha = s, \beta = \beta^i \mid s \in \left[+0, \alpha^i\right]\}.\end{gathered}$$

Тогда действия имеют вид

$$\begin{gathered}S^1 = \int_{\gamma^1}\langle \mathbf{p}, d\mathbf{x}\rangle = R_0^2\sigma_0\int_0^{\beta^1}\sin^2\left(\beta - \beta_*\right)d\beta - \\ -\left(F(x_1, x_2) - \frac{R_0^2\sigma_0^2 zk}{2\left(k^2 + \sigma_0^2 z^2\right)}\right) = \\ = \frac{R_0^2\sigma_0}{2}\arccos\frac{|\mathbf{x}|}{R_z} - \frac{\sigma_z|\mathbf{x}|}{2}\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2} + \\ + \frac{R_0^2\sigma_0}{2}\arccos\frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2}\frac{\sigma_0^2 zk}{\left(k^2 + \sigma_0^2 z^2\right)},\end{gathered} \tag{31}$$

$$S^2 = \int_{\gamma^2} \langle \mathbf{p}, d\mathbf{x} \rangle = \frac{R_0^2 \sigma_0}{2}\left(\pi - \arccos\frac{|\mathbf{x}|}{R_z}\right) + \\ + \frac{\sigma_z |\mathbf{x}|}{2}\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2} + \frac{R_0^2\sigma_0}{2}\arccos\frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} - \\ - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2}\frac{\sigma_0^2 z k}{\left(k^2 + \sigma_0^2 z^2\right)}. \quad (32)$$

Таким образом, вне окрестности каустик ($\varepsilon < |\mathbf{x}| < R_z - \varepsilon$) для канонического оператора работает ВКБ-представление, которое имеет вид

$$K_{\Lambda_z^L}[1] \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\mathbf{x}|\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}}} \times \\ \times \left(\exp\left(\frac{i}{h}S^1\right) + \exp\left(-\frac{i\pi}{2} + \frac{i}{h}S^2\right)\right) = \\ = \frac{2\sqrt{2}A_0}{\sqrt{|\mathbf{x}|\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}}}\exp\left(\frac{i\pi}{4h}R_0^2\sigma_0 + \frac{i}{h}\Theta - \frac{i\pi}{4}\right) \times \quad (33) \\ \times \cos\left(\frac{\mathcal{G}}{h} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ = \frac{(-1)^m 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i}{h}\Theta - \frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{|\mathbf{x}|\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}}}\cos\left(\frac{\mathcal{G}}{h} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathcal{G} = \frac{R_0^2\sigma_0}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|\mathbf{x}|}{R_z}\right) + \frac{\sigma_z|\mathbf{x}|}{2}\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|}, \quad (34)$$

$$\Theta = \frac{R_0^2\sigma_0}{2}\arccos\frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2}\frac{\sigma_0^2 z k}{\left(k^2 + \sigma_0^2 z^2\right)}. \quad (35)$$

Сравнивая представление (30) с ВКБ-асимптотикой (33), при этом учитывая асимптотику функций Бесселя при больших аргументах

$$J_0(y) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{y}}\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right), \\ J_1(y) \approx -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{y}}\cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right), \quad y \to +\infty, \quad (36)$$

определяем функции

$$\Sigma_j = \Theta + \pi h m, \quad \Psi_z = \mathcal{G}, \\ B_1 = \frac{2\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)|\Psi|^{1/2}}{\sqrt{h|\mathbf{x}|\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}}}, \quad B_2 = 0. \quad (37)$$

Отметим, что с учетом

$$\frac{R_z^2\sigma_z}{h} = \frac{R_0^2\sigma_0}{h} = (4m + 2)$$

(см. (21)) выражение (33) преобразуется к виду

$$\frac{2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i}{h}\Theta\right)}{\sqrt{|\mathbf{x}|\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}}}\cos\left(\frac{\mathcal{F}}{h} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \mathcal{F} = \frac{R_0^2\sigma_0}{2}\arccos\frac{|\mathbf{x}|}{R_z} - \frac{\sigma_z|\mathbf{x}|}{2}\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}. \quad (38)$$

Сравнивая представление (29) с (38) вне окрестности каустики и используя асимптотики функции Эйри и ее производной при больших аргументах ($y \to +\infty$)

$$\mathrm{Ai}(-y) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}y^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}y^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \\ \mathrm{Ai}'(-y) \approx -\frac{y^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\cos\left(\frac{2}{3}y^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

можно определить функции

$$\Sigma_A = \Theta, \quad \Phi = -\left(\frac{3}{2}\mathcal{F}\right)^{2/3}, \\ A_1 = \frac{2\sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)|\Phi|^{1/4}}{h^{1/6}\sqrt{|\mathbf{x}|\sqrt{R_z^2 - |\mathbf{x}|^2}}}, \quad A_2 = 0.$$

Окончательно приходим к утверждению.

Утверждение 4. В окрестности

$$|\mathbf{x}| < \sqrt{(4m + 2)h\frac{k^2 + \sigma_0^2 z^2}{k^2\sigma_0}} - \varepsilon$$

(с малым $\varepsilon > 0$) старший член канонического оператора, определяющего асимптотику пучка Лагерра—Гаусса, представляется в виде

$$K_{\Lambda_z^L}[1] \approx (-1)^m\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}\exp\left(i(2m+1)\arccos\frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} - \frac{ik\sigma_0^2 z|\mathbf{x}|^2}{2h\left(z^2\sigma_0^2 + k^2\right)}\right)\frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma_0^2 z^2}} \times \\ \times \frac{\sqrt{\left|\Psi\left(\sqrt{\frac{k^2\sigma_0}{h\left(k^2 + \sigma_0^2 z^2\right)}}|\mathbf{x}|, m\right)\right|}}{\sqrt{\sqrt{\frac{k^2\sigma_0}{h\left(k^2 + \sigma_0^2 z^2\right)}}|\mathbf{x}|\sqrt{(4m+2) - \frac{k^2\sigma_0}{h\left(k^2 + \sigma_0^2 z^2\right)}|\mathbf{x}|^2}}}J_0\left(\Psi\left(\sqrt{\frac{k^2\sigma_0}{h\left(k^2 + \sigma_0^2 z^2\right)}}|\mathbf{x}|, m\right)\right),$$

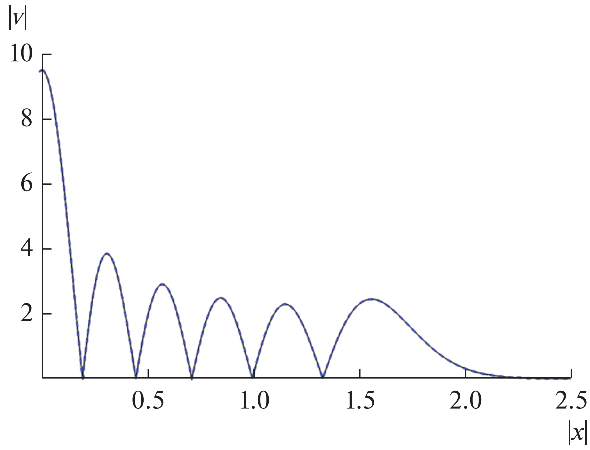

Рис. 6. График модуля (39) при $z = 2$ (сплошная линия) и модуля асимптотики из утверждения 4 (штриховая линия) для $h = 0.1$, $m = 5$, $k = 3$, $\sigma_0 = 2$.

где $\Psi(r,m)$ определяется выражением (22).

В окрестности $|\mathbf{x}| > \varepsilon$ старший член такого канонического оператора представляется в виде

$$K_{\Lambda_z^L}[1] \approx \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}} \times$$
$$\times \exp\left(i(2m+1)\arccos\frac{k}{\sqrt{k^2+\sigma_0^2 z^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{ik\sigma_0^2 z|\mathbf{x}|^2}{2h\left(k^2+\sigma_0^2 z^2\right)}\right) \frac{k}{\sqrt{k^2+\sigma_0^2 z^2}} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{2}\left|\Phi\left(\sqrt{\dfrac{k^2\sigma_0}{h\left(k^2+\sigma_0^2 z^2\right)}}|\mathbf{x}|, m\right)\right|^{1/4}}{\sqrt{\sqrt{\dfrac{k^2\sigma_0}{h\left(k^2+\sigma_0^2 z^2\right)}}|\mathbf{x}| \sqrt{(4m+2) - \dfrac{k^2\sigma_0}{h\left(k^2+\sigma_0^2 z^2\right)}|\mathbf{x}|^2}}} \times$$
$$\times \operatorname{Ai}\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{k^2\sigma_0}{h\left(k^2+\sigma_0^2 z^2\right)}}|\mathbf{x}|, m\right)\right),$$

где Φ определяется выражением (23).

Замечание 10. При произвольном z пучки Лагерра—Гаусса определяются через полиномом Лагерра L_m следующим образом [13]:

$$v(z,\mathbf{x}) = C\frac{k}{\sqrt{k^2+\sigma_0^2 z^2}} L_m\left(\frac{k^2\sigma_0|\mathbf{x}|^2}{h\left(k^2+\sigma_0^2 z^2\right)}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{ik|\mathbf{x}|^2}{2h}\left(\frac{(\sigma_0 z - ik)\sigma_0}{\sigma_0^2 z^2 + k^2}\right) - \right. \tag{39}$$
$$\left. - \frac{ikz}{h} + i(2m+1)\operatorname{arctg}\frac{\sigma_0 z}{k}\right),$$

где $C = (-1)^m \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) 2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_0}{h}}$.

Сравнение полученных асимптотик с графиком (39) проиллюстрировано на рис. 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен геометрический подход к построению асимптотик гауссовых пучков, основанный на лараннжевых многообразиях и теории канонического оператора Маслова. Тип особенностей на соответствующем многообразии задает специальную функцию, определяющую асимптотику в окрестности (достаточно широкой) этой особенности. При этом аргументы этих функций могут быть легко определены из соображения сравнения анзаца специального вида с ВКБ-асимптотикой в регулярной области.

Мы проиллюстрировали этот подход на примере пучков Бесселя и Лагерра—Гаусса. При этом асимптотики обоих пучков в центре пучка определяются функциями Бесселя. Принципиальное отличие этих пучков связано с локализацией. Вопрос локализации связан с проекцией лагранжева многообразия на физическую плоскость. Если проекция является ограниченной областью, то пучок локализован, в противном случае — нет. Такая ситуация имеет место для пучка Бесселя. Однако использование срезающей функции позволяет его локализовать. При этом при движении вдоль оси z носитель срезающей функции также движется, поэтому для локализованного пучка Бесселя имеет место фокусировка (см. рис. 2а). Пучок фокусируется при $z = 0$, а далее, при движении вдоль оси z, его носитель на плоскости (x_1, x_2) начинается расползаться.

В случае пучка Лагерра—Гаусса такой проблемы не возникает, поскольку при любом z его носитель на плоскости (x_1, x_2) является кругом с центром в нуле (см. рис. 2б). При этом асимптотика в окрестности границы носителя определяется функцией Эйри, и пучок экспоненциально затухает вне этого круга.

Отметим также, что полученные формулы для асимптотик в виде специальных функций носят глобальный характер и легко визуализируются на компьютере.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00341).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.
2. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В.* // Труды МФТИ. 2009. Т. 1. № 2. С. 54.
3. *Крюковский А.С.* Равномерномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013.
4. *Bova J.I., Lukin D.S., Kryukovskii A.S.* // Russ. J. Math. Phys. 2020. V. 27. № 4. P. 446.
5. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Из-во МГУ, 1965.
6. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1967.
7. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И.* // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 2. С. 53.
8. *Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Цветкова А.В.* // Теорет. и матем. физика. 2019. Т. 201. № 3. Р. 382.
9. *Доброхотов С.Ю., Миненков Д.С., Назайкинский В.Е.* // Теорет. и матем. физика. 2021. Т. 208. № 2. С. 196.
10. *Доброхотов С.Ю., Макракис Г., Назайкинский В.Е.* // Теорет. и матем физика. 2014. Т. 180. № 2. С. 162.
11. *Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* // Матем. заметки. 2018. Т. 104. № 4. С. 483.
12. *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
13. *Салех Б., Тейх М.* Оптика и фотоника. Принципы и применения. Долгопрудный: ИД Интеллект, 2012. Т. 1.
14. *Киселев А.П.* // Оптика и спектроскопия. 2004. Т. 96. № 4. С. 533.
15. *Plachenov A.B., Chamorro-Posada P., Kiselev P.* // Phys. Rev. A. 2020. V. 102. № 2. P. 023533.
16. *Frenzen C.I., Wong R.* // Siam J. Math. Anal. 1988. V. 19. № 5. P. 1232.
17. *Dobrokhotov S.Yu., Tsvetkova A.V.* // Rus. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 2. P. 198.