К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

УДК 537.874.6

ФРЕНЕЛЕВСКИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ЗОНЫ

© 2023 г. Е. А. Злобина[a, *], А. П. Киселев[a, b, c]

[a] Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7-9, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация

[b] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191023 Российская Федерация

[c] Институт проблем машиноведения РАН,
Большой проспект В.О., 61, Санкт-Петербург, 199178 Российская Федерация

*E-mail: ezlobina2@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.03.2023 г.
После доработки 02.03.2023 г.
Принята к публикации 27.03.2023 г.

Построено семейство точных решений двумерного уравнения Гельмгольца, удобных для описания поля в переходных зонах, возникающих при дифракции Френеля. В качестве примеров рассмотрены, помимо дифракции на клине, высокочастотные асимптотики поля в задачах дифракции на контурах с негладкой кривизной.

DOI: 10.31857/S0033849423060190, **EDN:** XOKFIU

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Понятие о дифракции Френеля, восходящее к началу XIX в., возникло при рассмотрении волнового поля в задаче о падении плоской волны на плоский экран в высокочастотном приближении, т.е. на больших по сравнению с длиной волны расстояниях r от кромки:

$$kr \gg 1, \tag{1}$$

где k – волновое число. В классических работах (см., например, [1, 2]) речь шла об описании слияния плоской волны с дифрагированной кромкой цилиндрической волной в окрестности предельного луча (рис. 1а) – там, где они имеют близкие фазы и физически неразличимы. Математическое описание этого волнового процесса двумерным уравнением Гельмгольца[1] с волновым числом k

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \tag{2}$$

приводит к выражению [2–4]

$$u = \exp(ikx)\Phi(Z) \tag{3}$$

со знаменитым интегралом Френеля

$$\Phi(A) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{A} \exp(ip^2)\, dp. \tag{4}$$

Выражение (3) является точным решением уравнения (2) и, соответственно, дает равномерное по углу φ описание поля (мы пользуемся полярными координатами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$). Аргумент интеграла Френеля в (3) равен корню из разности фаз дифрагированной цилиндрической волны kr, расходящейся из начала координат, и падающей волны kx:

$$Z = \sqrt{kr - kx} = \sqrt{2kr}\sin(\varphi/2). \tag{5}$$

В *переходной зоне* вокруг предельного луча, которая описывается неравенством

$$kr\varphi^4 \ll 1, \tag{6}$$

эти волны сливаются. В переходной зоне разность их фаз имеет вид $k(r - x) = kr\varphi^2/2 + O(kr\varphi^4)$, и поэтому допустимо часто используемое приближение

$$Z \approx z = \sqrt{kr/2}\,\varphi, \tag{7}$$

дающее удобную неравномерную асимптотику поля вблизи предельного луча. При удалении от предельного луча, в области, где $|z| \gg 1$, т.е.

$$kr\varphi^2 \gg 1, \tag{8}$$

интеграл Френеля допускает асимптотическое представление (см., например, [3]). Ниже пре-

[1] При интерпретации математических выражений для волновых полей предполагается их гармоническая зависимость от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, где t – время, ω – круговая частота.

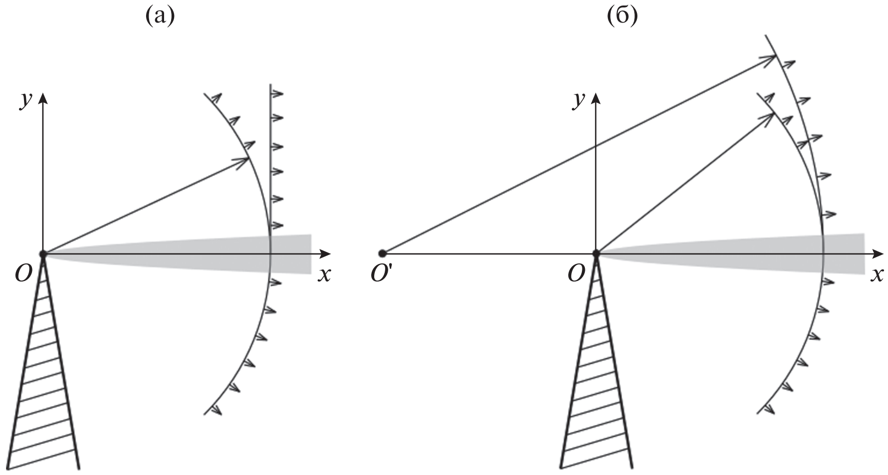

Рис. 1. Дифракция на клине плоской волны (а) и цилиндрической волны (б).

дельного луча, при больших отрицательных значениях z, асимптотика выражения (3) описывает дифрагированную цилиндрическую волну, расходящуюся из начала координат,

$$u \approx A(\varphi, k)\frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}. \tag{9}$$

Здесь A – диаграмма направленности (а по терминологии геометрической теории дифракции [3] – дифракционный коэффициент), имеющая при малых φ вид

$$A(\varphi, k) \approx -\frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}\varphi}. \tag{10}$$

Выше предельного луча, при больших положительных z, формула (3) описывает сложение дифрагированной волны с падающей плоской волной (см. рис. 1):

$$u \approx \exp(ikx) - \frac{\exp(ikr + i\pi/4)}{2\sqrt{\pi kr}\varphi}. \tag{11}$$

Диаграмма волны (9) имеет особенность при $\varphi \to 0$, из чего следует ее непригодность вблизи предельного луча и необходимость описания волнового поля специальной функцией.

Дифракционный процесс слияния плоской волны с цилиндрической волной, имеющей диаграмму со степенной особенностью вида $A \sim \varphi^{\nu}$ вблизи предельного луча, мы называем френелевским. Общее описание такого процесса дано Цепелевым [5], который путем разделения переменных в параболических координатах[2] построил семейство точных решений уравнения Гельмгольца (2):

$$u = CD_{-\nu-1}\left(2\sqrt{kr}\cos\frac{\varphi}{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right)D_{\nu}\left(2\sqrt{kr}\sin\frac{\varphi}{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right), \tag{12}$$

где D_{ν} – функция параболического цилиндра [6], C – произвольная постоянная.

Поскольку имеют место соотношения

$$D_0\left(\sqrt{2}Z\exp(-i\pi/4)\right) = \exp\left(iZ^2/2\right) \tag{13}$$

и

$$D_{-1}\left(\sqrt{2}Z\exp(-i\pi/4)\right) = \\ = \sqrt{2\pi}\exp(-i\pi/4)\exp\left(-iZ^2/2\right)\Phi(-Z) \tag{14}$$

(см. [6]), выражение (3) является частным случаем (12). Решение из семейства (12) со значком ν описывает слияние распространяющейся в области $y > 0$ волны с фазой kx и амплитудой, пропорциональной $\varphi^{-\nu-1}$, и цилиндрической волны с диаграммой, имеющей на предельном луче особенность φ^{ν}. Конкретные задачи, в которых такие дифракционные коэффициенты возникают, – это задача о боковой (головной) волне ($\nu = -3/2$, [5]), дифракция на конусе ($\nu = -3/2$, [7]), а также дифракция на клине ($\nu = -1$, [3, 8, 9]) и на границе с различными особенностями кривизны ($\nu \le -1$, [10–17]).

[2] Параболические координаты полезны в этих вопросах, поскольку в области (1), (6) разность фаз $kr - kx$ можно считать постоянной на параболах $x = Cy^2$.

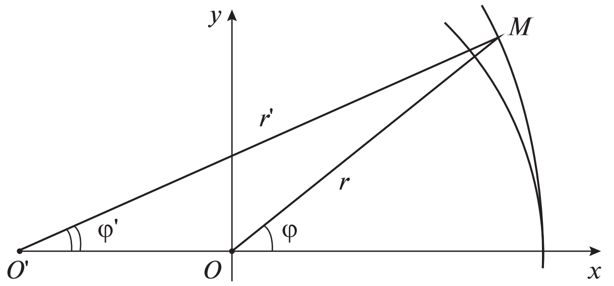

Рис. 2. Слияние двух цилиндрических волн.

Однако в ряде задач, в частности в задачах последнего типа, ни одна из сливающихся вблизи предельного луча волн – ни геометрически отраженная, ни дифрагированная – не может с достаточной точностью рассматриваться как плоская, поэтому необходимо более детальное описание и учет кривизны их фронтов. При этом естественным образом возникает вопрос об асимптотическом описании процесса слияния двух цилиндрических волн, причем одна из них (дифрагированная) присутствует по обе стороны от предельного луча, а другая (отраженная от гладкого участка границы) – только с одной стороны.

Для рассмотренной в ряде учебников [3, 8, 9] задачи дифракции цилиндрической волны на кромке клина, обобщающей упомянутую выше классическую задачу Френеля, простого равномерного по углу описания дифракционного поля нет. При естественном для дифракции Френеля предположении, что расстояние r_0 от источника до вершины клина O велико –

$$kr_0 \gg 1, \tag{15}$$

равно как и расстояние r от кромки до точки наблюдения (1), слияние падающей цилиндрической волны от точечного источника с единичной амплитудой и дифрагированной цилиндрической волны, расходящейся из O, описывается выражением

$$u \approx \frac{\exp\left(ikr_0 + i\pi/4\right)}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{kr_0}} \exp\left(ikr - i\zeta^2\right)\Phi(\zeta), \tag{16}$$

где

$$\zeta = \sqrt{k\rho/2}\,\varphi, \quad \rho = r_0 r/(r_0 + r), \tag{17}$$

см., например, в [8], в менее удобном виде – в [9]. Формула (16) получена в предположении, что выполнено неравенство (6). Похожее выражение встречалось и в других дифракционных задачах [12, 16–18]. Отметим, что при удалении источника на бесконечность вдоль оси x, т.е. при $r_0 \to \infty$, выражение для ζ (17) переходит в z (7), а формула (16) – в (3).

Следует отметить, что термин дифракция Френеля распространился и на задачи с другой структурой дифракционного поля, в частности, на случай гладкого выпуклого препятствия [19], где не возникает дифрагированной цилиндрической волны, однако выражения, аналогичные (3), в описании поля присутствуют. Выражения с интегралом Френеля (4) присутствуют и в задачах об угловых и краевых катастрофах, где изучаются падающие поля, более сложные, чем плоские и цилиндрические волны (например, [20, 21]). Мы придерживаемся в данной работе более классического понимания термина “дифракция Френеля”, имея в виду слияние цилиндрических волн, одна из которых имеет гладкую диаграмму направленности, а другая – диаграмму со степенной особенностью на предельном луче.

Цель данной работы – дать общее простое выражение для поля в переходных зонах френелевского типа. Для этого мы представим семейство точных решений уравнения Гельмгольца (2), удобных для описания слияния двух расходящихся цилиндрических волн, одна из которых присутствует лишь с одной стороны от предельного луча, а другая – с обеих. Наши построения основаны на разделении переменных в эллиптической системе координат, которая вводится так, чтобы цилиндрические волны расходились из ее фокусов.

В данной работе показано, что функции построенного семейства описывают френелевские волновые поля в ряде двумерных задачах дифракции на негладких контурах. Помимо классической дифракции цилиндрической волны на клине, к ним относятся задачи дифракции на контурах с негладкой кривизной. Условия, позволяющие приблизить в окрестности предельного луча отраженную волну цилиндрической волной (9), приводят к ограничениям на ширину переходной зоны. В частности, для контура со скачком кривизны переходная зона характеризуется неравенством [16]

$$kr\varphi^3 \ll 1. \tag{18}$$

2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ФРЕНЕЛЕВСКОГО ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА

Поместим источники цилиндрических волн в точки $O = (0,0)$ и $O' = (-2a,0)$ (рис. 2), причем волна из точки O' распространяется только в области $y > 0$, а значения фаз волн в точке O равны. Предельный луч, вблизи которого волны сливаются, в таком случае совпадает с положительной полуосью x.

Расстояние $2a$ между источниками считается большим по сравнению с длиной волны:

$$ka \gg 1. \tag{19}$$

Условие (19) (ср. (15)) отвечает типичному для классической теории дифракции предположению, что расстояние от препятствия до источника падающей волны много больше длины волны.

Нас интересует поле во *френелевской переходной зоне*, окружающей предельный луч, где угол φ мал, а расстояние r от точки наблюдения M до O велико (1) (см. рис. 2). Отметим, что отсюда немедленно следует малость φ', а также неравенство $kr' \gg 1$, см. (1), (19).

2.1. Эллиптические координаты

Для описания поля будем использовать эллиптическую систему координат (ξ,η):

$$\begin{gathered} x + a = a\,\mathrm{ch}\xi\cos\eta, \quad y = a\,\mathrm{sh}\xi\sin\eta, \\ 0 \le \xi, \quad -\pi < \eta \le \pi, \end{gathered} \tag{20}$$

с фокусами в точках O и O' (см. рис. 2). Координатные линии $\eta = \mathrm{const}$ – гиперболы с фокусами в O и O', и вблизи оси x примерно параллельны ей[3]. Значение $\eta = 0$ соответствует оси x. Линии $\xi = \mathrm{const}$ образуют семейство эллипсов с теми же фокусами, и вблизи оси x идут поперек нее.

В дальнейшем будем помещать фокусы эллиптической системы координат в источники двух цилиндрических волн, которые будут сливаться вблизи положительной полуоси x, т.е. в области, где η мало, а ξ положительно.

Из (20) немедленно следует, что расстояния r и r' от точки M до фокусов O и O' (см. рис. 2) равны соответственно

$$r = a(\mathrm{ch}\xi - \cos\eta), \quad r' = a(\mathrm{ch}\xi + \cos\eta). \tag{21}$$

Из (21) для малых значений η получаем

$$\eta = \sqrt{\frac{2a + r - r'}{a}}\left(1 + O\left(\frac{2a + r - r'}{a}\right)\right). \tag{22}$$

Из рассмотрения треугольника OMO', следует, что

$$\begin{gathered} r' = 2a + r - \frac{ar}{2a + r}\varphi^2\left(1 + O\left(\varphi^2\right)\right), \\ r = r' - 2a + \frac{ar'}{r' - 2a}(\varphi')^2\left(1 + O\left((\varphi')^2\right)\right), \end{gathered} \tag{23}$$

и (22) переписывается в виде

$$\begin{gathered} \eta = \sqrt{\frac{r}{r + 2a}}\varphi\left(1 + O\left(\varphi^2\right)\right) = \\ = \sqrt{\frac{r'}{r' - 2a}}\varphi'\left(1 + O\left((\varphi')^2\right)\right). \end{gathered} \tag{24}$$

Отметим, что $r + 2a$ и $r' - 2a$ можно заменить на r' и r соответственно с точностью до $O\left(2ar\varphi^2/r'\right)$. Кроме того, есть более симметричное выражение $\eta \approx \sqrt{rr'}(\varphi - \varphi')/2a$.

2.2. Семейство точных решений

Записав уравнение Гельмгольца (2) в эллиптических координатах (20) (см., например, [4]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + k^2a^2\left(\mathrm{sh}^2\xi + \sin^2\eta\right)u = 0, \tag{25}$$

будем решать его методом разделения переменных. Положим $u(\xi,\eta) = P(\xi)Q(\eta)$, тогда функции P и Q удовлетворяют уравнениям

$$P''(\xi) + \left(k^2a^2\mathrm{sh}^2\xi - \lambda\right)P(\xi) = 0, \tag{26}$$

$$Q''(\eta) + \left(k^2a^2\sin^2\eta + \lambda\right)Q(\eta) = 0, \tag{27}$$

с комплексным параметром разделения λ, которые элементарными преобразованиями могут быть сведены к уравнению Матье (см., например, [6]), теория которого нам не потребуется.

Наша цель – описать высокочастотное поле в окрестности предельного луча не слишком близко к O, а именно в области, где выполнены условия (19) и $\varphi \ll 1$, т.е.

$$\eta \ll 1, \quad \xi \gg 1/\sqrt{ka}, \tag{28}$$

см. (21). Для этого построим асимптотики решений уравнения (26) при положительных не слишком маленьких ξ и уравнения (27) при малых η любого знака. Нас интересуют только параметры разделения вида

$$\lambda = -ika(2\nu + 1), \quad \nu < 0. \tag{29}$$

Именно отрицательные ν, как мы увидим ниже, возникают при описании френелевских переходных зон. Соответствующее решение уравнения (25) обозначим

$$u_\nu(\xi,\eta) = P_\nu(\xi)Q_\nu(\eta). \tag{30}$$

2.3. Асимптотика решения уравнения (26)

Найдем асимптотику решения (26), отвечающего уходящей волне, в приближении (19). С помощью стандартного метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэнна (см., например, [4]), с точностью до произвольного постоянного множителя получим

$$\begin{gathered} P_\nu(\xi) = \frac{\exp\left(ika\int^{\xi}\sqrt{\mathrm{sh}^2 t + i(2\nu + 1)/ka}\,dt\right)}{\sqrt[4]{\mathrm{sh}^2\xi + i(2\nu + 1)/ka}} \times \\ \times\left(1 + O\left(\frac{1}{ka}\right)\right). \end{gathered} \tag{31}$$

[3] Вдоль этих линий разность фаз двух волн постоянна, $r' - r = \mathrm{const}$.

Здесь учтено выражение для параметра разделения (29). В области (28), очевидно, выполнено неравенство $ka\,\mathrm{sh}^2\xi \gg 1$. Используя его, получим

$$\int^{\xi}\sqrt{\mathrm{sh}^2 t + i\frac{2\nu+1}{ka}}\,dt = \\ = \int^{\xi}\left(\mathrm{sh}t + i\frac{2\nu+1}{2ka\,\mathrm{sh}t} + O\left(\frac{1}{(ka)^2\mathrm{sh}^3 t}\right)\right)dt = \\ = \mathrm{ch}\xi + i\frac{2\nu+1}{4ka}\ln\frac{\mathrm{ch}\xi-1}{\mathrm{ch}\xi+1} + O\left(\frac{1}{(ka)^2(\mathrm{ch}\xi-1)}\right). \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31), находим

$$P_\nu(\xi) = \frac{\exp\left(ika\,\mathrm{ch}\xi - \frac{2\nu+1}{4}\ln\frac{\mathrm{ch}\xi-1}{\mathrm{ch}\xi+1}\right)}{\sqrt[4]{\mathrm{ch}^2\xi-1}}\times \\ \times\left(1+O\left(\frac{1}{ka(\mathrm{ch}\xi-1)}\right)\right) = \\ = \frac{(\mathrm{ch}\xi+1)^{\frac{\nu}{2}}}{(\mathrm{ch}\xi-1)^{\frac{\nu+1}{2}}}\exp(ika\,\mathrm{ch}\xi)\times \\ \times\left(1+O\left(\frac{1}{ka(\mathrm{ch}\xi-1)}\right)\right). \quad (33)$$

Поправочные члены малы в области, где выполнено неравенство (1), см. (19) и (21).

2.4. Асимптотика решения уравнения (27)

Преобразуем уравнение (27) при малых η, разложив $\sin\eta$ по степеням η:

$$Q''_\nu(\eta) + \left(k^2a^2\eta^2 - ika(2\nu+1)\right)Q_\nu(\eta) = \\ = O\left(k^2a^2\eta^4 Q_\nu(\eta)\right). \quad (34)$$

Сделав замену переменной

$$H = \sqrt{2ka}\,\eta\exp(-i\pi/4), \quad (35)$$

придем к уравнению

$$Q''_\nu(H) + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{H^2}{4}\right)Q_\nu(H) = O\left(\frac{H^4}{ka}\right)Q_\nu(H). \quad (36)$$

Таким образом, в области, где H (и, соответственно, η) достаточно мало, одно из решений уравнения (36) асимптотически совпадает с функцией параболического цилиндра D_ν [6]:

$$Q_\nu(H) \approx D_\nu(-H). \quad (37)$$

Можно показать [22], что соответствующая область характеризуется неравенством $ka|\eta|^\mu \ll 1$, $\mu = 2 + 4/(1-3\nu)$ (для отрицательных значений ν, рассматриваемых нами, $\mu > 2$).

2.5. Геометрооптическая интерпретация асимптотики функции (30)

Для отвечающего уходящей волне решения (30) уравнения (25) с $\nu < 0$ из формул (33) и (37) вытекает следующее асимптотическое выражение вблизи предельного луча:

$$u_\nu(\xi,\eta) \approx C\frac{(\mathrm{ch}\xi+1)^{\frac{\nu}{2}}}{(\mathrm{ch}\xi-1)^{\frac{\nu+1}{2}}}\exp(ika\,\mathrm{ch}\xi)\,D_\nu(-H). \quad (38)$$

Здесь H определено в (35), C — произвольная постоянная. Представление (38) пригодно в области, где выполнены неравенства (1) и

$$kr|\varphi|^\mu \ll 1, \quad \text{где} \quad \mu = 2 + \frac{4}{1-3\nu}. \quad (39)$$

Отметим, что чем больше модуль ν, тем у́же область, описываемая (39). Тем не менее, при каждом $\nu < 0$ аргумент функции параболического цилиндра H может принимать там большие значения.

Обсудим геометрический смысл величин, входящих в (38). С помощью соотношений (21) и (24) множитель перед экспонентой выражается через расстояния r и r' до фокусов O и O' — источников цилиндрических волн:

$$\frac{(\mathrm{ch}\xi+1)^{\frac{\nu}{2}}}{(\mathrm{ch}\xi-1)^{\frac{\nu+1}{2}}} = \sqrt{\frac{a}{r}}\left(\frac{r+2a}{r}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left(1+O\left(\frac{r\varphi^2}{r+2a}\right)\right) = \\ = \sqrt{\frac{a}{r'}}\left(\frac{r'}{r'-2a}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\left(1+O\left(\frac{r'(\varphi')^2}{r'-2a}\right)\right). \quad (40)$$

Показатель экспоненты в (38) с помощью соотношений (21) и (35) переписывается следующим образом:

$$ika\,\mathrm{ch}\xi = ika + ikr + \frac{H^2}{4} + O\left(\frac{H^4}{ka}\right) = \\ = -ika + ikr' - \frac{H^2}{4} + O\left(\frac{H^4}{ka}\right). \quad (41)$$

Теперь рассмотрим аргумент функции параболического цилиндра. Из соотношений (35) и (22) вытекает, что

$$H \approx \sqrt{2k(2a + r - r')}\exp(-i\pi/4), \quad (42)$$

т.е. H выражается через разность значений фаз цилиндрических волн, расходящихся из O и O'. С помощью соотношения (24) получим еще два представления:

$$H = \sqrt{\frac{2kar}{r+2a}}\varphi\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\left(1+O\left(\frac{r\varphi^2}{r+2a}\right)\right) = \\ = \sqrt{\frac{2kar'}{r'-2a}}\varphi'\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\left(1+O\left(\frac{r'(\varphi')^2}{r'-2a}\right)\right). \quad (43)$$

В результате можно записать (38) в геометрических терминах:

$$u_\nu \approx C\sqrt{\frac{a}{r}}\left(\frac{r+2a}{r}\right)^{\frac{\nu}{2}}\exp\left(ik\left(r+a-\frac{ar\varphi^2}{2(r+2a)}\right)\right)\times \\ \times D_\nu\left(-\sqrt{\frac{2kar}{r+2a}}\varphi\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx \\ \approx C\sqrt{\frac{a}{r'}}\left(\frac{r'}{r'-2a}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\exp\left(ik\left(r'-a+\frac{ar'(\varphi')^2}{2(r'-2a)}\right)\right)\times \\ \times D_\nu\left(-\sqrt{\frac{2kar'}{r'-2a}}\varphi'\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (44)$$

В той части переходной зоны (1), (39), где аргумент функции D_ν велик, заменим ее в (38) асимптотикой [6]. Ниже предельного луча, при $\varphi < 0$, имеем одну цилиндрическую волну:

$$u_\nu \approx A_\nu(\varphi;k)\frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}, \quad (45)$$

а выше, при $\varphi > 0$ – две:

$$u_\nu \approx A_\nu(\varphi;k)\frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} + A_\nu'(\varphi';k)\frac{\exp(ikr')}{\sqrt{kr'}}, \quad (46)$$

где

$$A_\nu(\varphi;k) = 2^{\frac{\nu}{2}}C(ka)^{\frac{\nu+1}{2}}\varphi^\nu\exp\left(ika - i\frac{\pi\nu}{4}\right), \\ A_\nu'(\varphi';k) = -C\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}\frac{(\varphi')^{-\nu-1}}{(2ka)^{\frac{\nu}{2}}}\times \\ \times\exp\left(-ika + i\frac{\pi(5\nu+1)}{4}\right). \quad (47)$$

Выражение (45) и совпадающее с ним первое слагаемое в (46) описывают цилиндрическую волну, расходящуюся из точки O. Второе слагаемое в (46) отвечает цилиндрической волне, расходящейся из точки O'. Отметим, что чем сингулярнее диаграмма цилиндрической волны на предельном луче, тем у́же область (39) пригодности выражения (38).

Рассмотрим приложение полученных результатов в конкретных дифракционных задачах.

3. ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНЕ

Убедимся, что выражение (38) с $\nu = -1$ описывает процесс слияния падающей цилиндрической и дифрагированной цилиндрической волн в классической двумерной задаче дифракции на клине. Действительно, вследствие формулы (14) выражение (38) совпадает с известным (16) (например, [3, 8, 9]) при надлежащем выборе постоянного множителя. А именно, следует принять

$$C = \exp(ikr_0/2 + i\pi/4)/2\pi\sqrt{2kr_0}. \quad (48)$$

Асимптотика выбранной функции (38) при условии (8) ниже предельного луча имеет вид (45), а выше предельного луча – (46), где расходящаяся из точки O' волна отвечает падающей волне, а расходящаяся из O – дифрагированной волне. Их диаграммы при малых φ имеют следующие выражения:

$$A^{\text{пад}} = \frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi}}, \quad A^{\text{диф}} = \frac{i}{4\pi\varphi}\frac{\exp(ikr_0)}{\sqrt{kr_0}}. \quad (49)$$

Заметим, что неравенство (39) при $\nu = -1$ сводится к (18) и описывает более узкую область, чем (6). Это связано с тем, что простые оценки [22], приводящие к условию (39), не являются предельно точными.

4. ДИФРАКЦИЯ НА КОНТУРАХ С НЕГЛАДКОЙ КРИВИЗНОЙ

4.1. Предварительные замечания

В этом разделе мы убедимся в том, что построенные выше решения встречаются в ряде двумерных задач дифракции коротких волн на контурах, кривизна которых гладкая всюду, за исключением одной точки O, где имеет скачок или более слабую особенность.

Пусть падающая волна $u^{\text{пад}}$ – цилиндрическая, расходящаяся из точки M_0, расположенной на расстоянии r_0 от точки O, приходит в O некасательно – под углом скольжения $\varphi_0 > 0$ (рис. 3). Начало координат поместим в точку O, а ось x направим вдоль предельного (геометрически отраженного в O) луча. Положение точки наблюдения M будем характеризовать расстоянием r до точки O и углом φ между осью x и направлением на точку M.

Начнем с качественного обсуждения волнового процесса. Уходящее волновое поле $u^{\text{ух}}$ вдали от предельного луча складывается из волны, дифрагированной точкой негладкости $u^{\text{диф}}$, и волн $u_\pm^{\text{отр}}$, геометрически отраженных от гладких частей контура слева и справа от O:

$$u^{\text{ух}}(M) = u^{\text{диф}}(M) + u_\pm^{\text{отр}}(M). \quad (50)$$

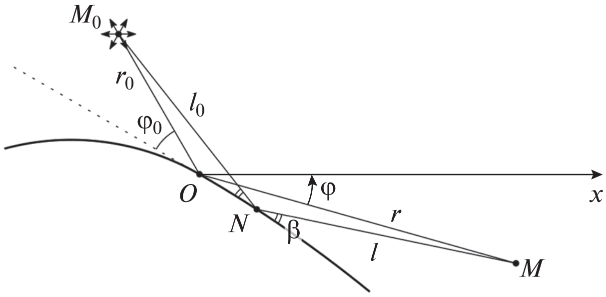

Рис. 3. Дифракция на контуре с негладкой кривизной.

Знак "–" отвечает точкам наблюдения M, лежащим выше, а "+" – ниже предельного луча.

В области, где выполнено неравенство (8), дифрагированная волна представляет собой цилиндрическую волну (9), расходящуюся из точки O. Ее диаграмма, как известно [11–17], имеет на предельном луче степенную сингулярность по углу.

Выражения для геометрически отраженных от гладких частей контура волн $u_{\pm}^{\text{отр}}$ в случае некасательного падения можно найти лучевым методом (например, [23]). Они имеют вид

$$u_{\pm}^{\text{отр}}(M) = \mathscr{C}\frac{\exp(ik\tau + i\pi/4)}{\sqrt{k\mathscr{J}}}\left(1 + O\left(\frac{1}{k\mathscr{J}}\right)\right), \quad \mathscr{J} = l_0 + l + \frac{2æ l_0 l}{\sin\beta}. \tag{51}$$

Здесь l_0 и l – расстояния от точки источника M_0 и от точки наблюдения M до точки геометрического отражения N соответственно; $\tau = l_0 + l$ – значение эйконала (геометрического времени пробега) в точке M; $\mathscr{J}$ – геометрическое расхождение лучей, β – угол скольжения, æ – значение кривизны в точке N (см. рис. 3). Наконец, $\mathscr{C}$ зависит от интенсивности и диаграммы направленности источника падающей на контур цилиндрической волны, а также от граничного условия на контуре. Для ненаправленного источника единичной амплитуды и условия Дирихле $\mathscr{C} = -1/2\sqrt{2\pi}$ [23].

На предельном луче фазы геометрически отраженных волн и дифрагированной волны совпадают, что позволяет говорить о слиянии этих волн и возникновении френелевской переходной зоны. Если кривизна контура терпит в O скачок, то выражение (51), очевидно, терпит разрыв на предельном луче и пригодно лишь на некотором удалении от него. Вблизи предельного луча, в переходной зоне, поле должно описываться соответствующей специальной функцией, сглаживающей и эту особенность, и сингулярность дифрагированной волны. Поскольку, как и в случае дифракции на клине, геометрооптическое поле терпит на предельном луче разрыв, естественно, что здесь возникает интеграл Френеля. Однако, в отличие от классической задачи, геометрооптическое поле ненулевое с обеих сторон от предельного луча, и описание его слияния с дифрагированной волной требует двух интегралов Френеля от разных аргументов [10, 12, 16].

В случае же более гладкой кривизны контура выражение (51) непрерывно и описывает геометрически отраженное поле в главном порядке, а френелевское поле представляет собой поправку к нему и описывается функцией параболического цилиндра со значком $\nu < -1$ [14, 15, 17].

4.2. Дифракция на контуре со скачком кривизны

Рассмотрим контур, у которого кривизна æ в точке O имеет скачок:

$$æ = \begin{cases} æ_- & \text{слева от } O, \\ æ_+ & \text{справа от } O, \end{cases} \tag{52}$$

причем $[æ] = æ_+ - æ_- \neq 0$ может быть любого знака. Здесь и далее падающая волна приходит в точку O некасательно.

В [16] в рамках метода Кирхгофа получено следующее выражение для поля в переходной зоне на умеренных расстояниях $æ_{\pm}r \lesssim 1$ от O:

$$u^{\text{ух}} = \mathscr{C}\frac{\exp(ik(r_0 + r) + i\pi/4)}{\sqrt{k(r_0 + r)}} \times \left(\frac{\exp(-i\zeta^2/J_+)}{\sqrt{J_+}}\Phi\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{J_+}}\right) + \frac{\exp(-i\zeta^2/J_-)}{\sqrt{J_-}}\Phi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{J_-}}\right)\right), \tag{53}$$

где Φ – интеграл Френеля (4), величина ζ определена в (17),

$$J_{\pm} = 1 + \frac{2æ_{\pm}\rho}{\sin\varphi_0}, \tag{54}$$

а $\mathscr{C}$ – та же постоянная, что и в (51). Область пригодности формулы (53) описывается неравенствами (1) и (18) – они обеспечивают сшивание асимптотики (53) с лучевыми формулами (51) для волн, геометрически отраженных от гладких частей контура.

Покажем, что выражение (53) переписывается через функции построенного нами семейства (38). Введем величину

$$2a_{\pm} = \frac{r_0}{1 + 2æ_{\pm}r_0/\sin\varphi_0}, \tag{55}$$

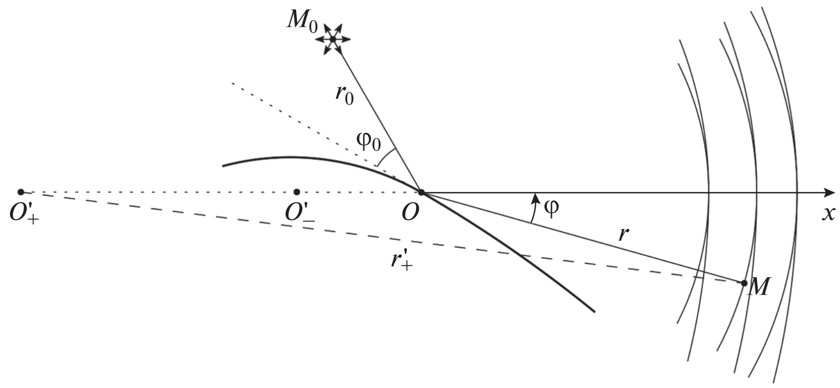

Рис. 4. Дифракция на скачке кривизны.

геометрическую интерпретацию которой дадим ниже. Тогда

$$\frac{\zeta^2}{J_\pm} = \frac{krr_0\varphi^2}{2\left(r_0 + r\left(1 + 2æ_\pm r_0/\sin\varphi_0\right)\right)} = \frac{ka_\pm r\varphi^2}{r + 2a_\pm}, \tag{56}$$

и с учетом формулы (14) выражение (53) принимает вид суммы двух функций семейства (38) с $\nu = -1$:

$$u^{\text{ух}} = U_+ + U_-, \tag{57}$$

где

$$U_\pm = \frac{\mathscr{C}}{\sqrt{kr_0}}\sqrt{\frac{a_\pm}{r + 2a_\pm}} \times \\ \times \exp\left(ik\left(r + r_0 - \frac{a_\pm r\varphi^2}{2(r + 2a_\pm)}\right) + i\frac{\pi}{4}\right) \times \\ \times D_{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{2ka_\pm r}{r + 2a_\pm}}\varphi\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{58}$$

Таким образом, найденная в рамках метода Кирхгофа [16] формула укладывается в построенную теорию. Заметим, что неравенство (39) при $\nu = -1$ совпадает с неравенством (18).

Поясним геометрический смысл величин (55). В переходной области, где выполнено неравенство (18), выражения для отраженных волн (51) аппроксимируются цилиндрическими волнами (9), исходящими из точек $O'_\pm$, лежащих на продолжении предельного луча на расстояниях $2a_\pm$ от точки O (рис. 4). Действительно, в [16] показано, что лучевые выражения (51) для геометрически отраженных волн $u_\pm^{\text{отр}}$ при условии (18) преобразуются к виду

$$u_\pm^{\text{отр}} \approx \mathscr{C}\frac{\exp\left(ik\left(r + r_0 - \rho^2\varphi^2/2J_\pm\right) + i\pi/4\right)}{\sqrt{kJ_\pm(r + r_0)}}, \\ J_\pm = 1 + \frac{2æ_\pm\rho}{\sin\varphi_0}, \tag{59}$$

где величина ρ определена в (17). Расстояния $r'_\pm$ от $O'_\pm$ до точки наблюдения M равны соответственно

$$r'_\pm = \sqrt{r^2 + 4a_\pm^2 + 2a_\pm r\cos\varphi} = \\ = 2a_\pm + r - \frac{\rho}{2J_\pm}\varphi^2 + O\left(\frac{\rho}{J_\pm}\varphi^4\right). \tag{60}$$

Легко видеть, что, с точностью до малых членов, величины $kr'_\pm$ отличаются от фаз соответствующих экспонент в (59) лишь на постоянное слагаемое $r_0 - 2æ_\pm$, а выражение в знаменателе (59) переписывается в виде $J_\pm(r_0 + r) \approx r_0 r'_\pm/2a_\pm$. Таким образом, в переходной зоне (18) формулы (59) для геометрически отраженных волн $u_\pm^{\text{отр}}$ преобразуются к виду (9):

$$u_\pm^{\text{отр}} \approx A_\pm^{\text{отр}}\frac{\exp\left(ikr'_\pm\right)}{\sqrt{kr'_\pm}}, \\ A_\pm^{\text{отр}} = \mathscr{C}\sqrt{\frac{2a_\pm}{r_0}}\exp\left(ik(r_0 - 2a_\pm) + i\frac{\pi}{4}\right). \tag{61}$$

В [16] показано, что на малых расстояниях $æ_\pm r \ll 1$ аргументы интегралов Френеля в формуле (53) становятся близки и в результате поле аппроксимируется выражением, содержащим одну функцию параболического цилиндра $D_{-3}\left(\sqrt{2}\zeta\exp(i\pi/4)\right)$. Отметим, что это выражение также является частным случаем формулы (38).

4.3. Дифракция на контуре с “гельдеровской” сингулярностью кривизны

Теперь рассмотрим контур, кривизна которого в точке O имеет особенность вида

$$æ(s) = \begin{cases} æ_0 & \text{при} \quad s \le 0, \\ æ_0 + hs^\lambda & \text{при} \quad s > 0, \end{cases} \quad 0 < \lambda < 1. \tag{62}$$

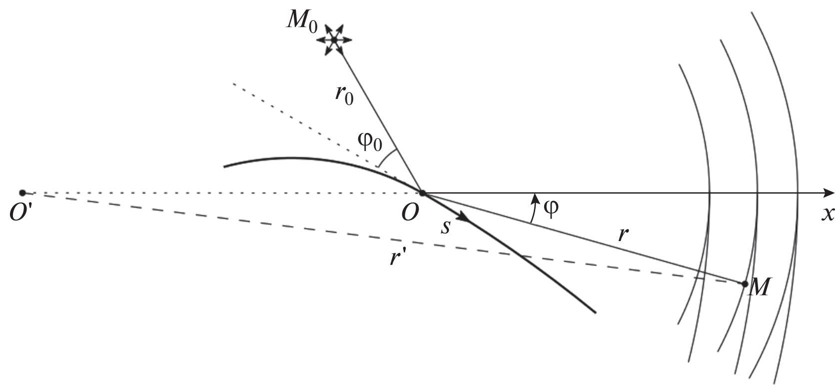

Рис. 5. Дифракция на контуре с “гельдеровской” сингулярностью кривизны.

Здесь s — длина дуги контура, отсчитываемая от точки негладкости O в направлении оси x (рис. 5), а $æ_0$ и $h \neq 0$ — константы, причем h может быть любого знака. В [14] такая особенность названа “гельдеровской” сингулярностью. Как и раньше, падающая волна приходит в сингулярную точку контура некасательно.

В [17] с помощью метода Кирхгофа получена асимптотика для уходящего поля вблизи предельного луча на умеренных расстояниях $æ_0 r \lesssim 1$ от O. В главном порядке поле дается выражением (51), которое непрерывно, но не гладко на предельном луче, и имеет вид

$$u_0^{\text{ух}} = \mathscr{C}\frac{\exp\left(ik(r+r_0) - i\zeta^2/J + i\pi/4\right)}{\sqrt{kJ(r+r_0)}}, \quad J = 1 + \frac{2æ_0\rho}{\sin\varphi_0}, \tag{63}$$

а эффект от “гельдеровской” сингулярности носит поправочный характер и описывается выражением

$$u_h^{\text{ух}} = -h\mathscr{C}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(1+\lambda)\exp(i\lambda\pi/4)}{(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}}\frac{\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}J^{1+\frac{\lambda}{2}}}\times \\ \times\frac{\exp\left(ik(r_0+r_1) - i\zeta^2/2J + i\pi/4\right)}{\sqrt{kJ(r_0+r_1)}}\times \\ \times D_{-3-\lambda}\left(\sqrt{\frac{2}{J}}\zeta\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{64}$$

Здесь величина ζ определена в формуле (17). Асимптотика (63), (64) для поля применима в области, где выполнены неравенства (1), (18) и

$$kh(r|\varphi|)^{2+\lambda} \ll 1, \tag{65}$$

обеспечивающие сшивание с лучевой формулой для отраженной волны.

Покажем, что функция (64) принадлежит семейству (38). Действительно, если принять

$$2a = \frac{r_0}{1 + 2æ_0 r_0/\sin\varphi_0}, \tag{66}$$

то (64) переписывается в виде

$$u_h^{\text{ух}} = -h\mathscr{C}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(1+\lambda)\exp\left(i\pi(1+\lambda)/4\right)}{\left(\sqrt{k}\sin\varphi_0\right)^{1+\lambda}}\times \\ \times\frac{1}{\sqrt{r_0 r}}\left(\frac{2ar}{r+2a}\right)^{\frac{3+\lambda}{2}}\exp\left(ik\left(r + r_0 - \frac{ar\varphi^2}{2(r+2a)}\right)\right)\times \\ \times D_{-3-\lambda}\left(\sqrt{\frac{2kar}{r+2a}}\varphi\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{67}$$

Поясним геометрический смысл величины (66). В [17] проведено асимптотическое упрощение лучевой формулы (51) для отраженной волны в области (8), (18) и (65). Установлено, что в главном порядке отраженное поле описывается выражением (63), а влияние на него “гельдеровской” сингулярности является поправкой. Оно проявляется только ниже предельного луча, при $\varphi < 0$, и имеет вид

$$u_h^{\text{отр}} = -\mathscr{C}\frac{2kh\rho^{2+\lambda}(-\varphi)^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)J^{2+\lambda}(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}}\times \\ \times\frac{\exp\left(ik\left(r + r_0 - \rho\varphi^2/2J\right) - i\pi/4\right)}{\sqrt{kJ(r+r_0)}}. \tag{68}$$

В области своей применимости выражение (68) допускает аппроксимацию цилиндрической волной, которая расходится из точки O', расположенной на продолжении предельного луча на расстоянии $2a$ от точки O (см. рис. 5). Действительно, расстояние от O' до точки O наблюдения записывается совершенно аналогично (60) и отличается от фазы экспоненты в (68) лишь на постоянное слагаемое $r_0 - 2a$, откуда нетрудно получить, что

$$u_h^{\text{отр}} = A^{\text{отр}} \frac{\exp(ikr')}{\sqrt{kr'}}, \quad A^{\text{отр}} = -\sqrt{\frac{2a}{r_0}} \times \\ \times \frac{2kh(-2a\varphi')^{2+\lambda} \exp(ik(r_0 - 2a) - i\pi/4)}{(2+\lambda)(1+\lambda)(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}}. \tag{69}$$

В случае "гельдеровской" сингулярности кривизны на ширину переходной зоны накладываются ограничения (18) и (65), более жесткие, чем неравенство (39) с $\nu = -3 - \lambda$, и даже чем соответствующие ограничения в случае скачка кривизны, что объясняется более сложной геометрией фронта отраженной от контура волны.

4.4. Дифракция на контуре с особенностью производной кривизны

Допустим теперь, что производная кривизны контура $æ^{(j)}(s) = d^j æ/ds^j$ порядка $j \geq 1$ в точке O имеет скачок с амплитудой h. Как и в случае "гельдеровской" сингулярности кривизны, рассмотренной в разд. 4.3, здесь уходящее поле в главном порядке характеризуется лучевой формулой (51), а эффект негладкости кривизны имеет характер малой поправки. Сравнение выражения для поля в окрестности предельного луча [15, 17] с формулами (45)–(47) показывает, что влияние негладкости производной кривизны порядка j на уходящее поле в переходной зоне описывается функцией семейства (38), причем $\nu = -3 - j$. В полярных координатах она имеет вид (64), где λ следует заменить на j. Ширина переходной зоны характеризуется неравенством (39) с $\nu = -3 - j$ (отметим, что при $\nu < -3$ это ограничение жестче, чем условие (18)).

Случай, когда производная $æ^{(j)}(s)$, $j \geq 1$, имеет в точке O "гельдеровскую" сингулярность (62), рассматривается аналогично. Влияние негладкости кривизны на уходящее поле описывается функцией семейства (38) со значком $\nu = -3 - j - \lambda$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным результатом работы является получение простых удобных выражений для общего описания френелевских переходных зон.

Построено семейство точных решений уравнения Гельмгольца для описания слияния двух волн с неплоскими фронтами. Продемонстрировано, что функции этого семейства описывают поля в задачах дифракции на контурах с негладкой кривизной в переходной зоне на умеренном расстоянии от точки негладкости. Область пригодности построенных выражений зависит, с одной стороны, от сингулярностей диаграмм волн на предельном луче и, с другой – от геометрии фронтов волн. С увеличением гладкости кривизны контура переходная зона сужается.

Интересным представляется вопрос о численном моделировании волнового поля на основе полученных формул, которое позволило бы выяснить их области пригодности в реальных ситуациях.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны участникам Всероссийского семинара "Математическое моделирование волновых процессов" (Российский новый университет) и лично Д.С. Лукину, А.С. Крюковскому, Е.А. Палкину, В.Т. Полякову и А.В. Попову за полезное обсуждение результатов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00557).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюжинец Г.Д.* // Успехи физ. наук. 1959. Т. 69. № 2. С. 321.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973.
3. *Боровиков В.А., Кинбер Б.Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
4. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы математической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2.
5. *Цепелев Н.В.* // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 51. С. 197.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 2.
7. *Popov A., Ladyzhensky (Brodskaya) A., Khozioski S.* // Russ. J. Math. Phys. 2009. Т. 16. № 2. С. 296.
8. *Уфимцев П.Я.* Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. М.: Бином, 2012.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Физматгиз, 1963.
10. *James G.L.* Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves. L.: Peter Peregrinus Ltd, 1986.
11. *Kaminetzky L., Keller J.B.* // SIAM J. Appl. Math. 1972. V. 22. № 1. P. 109.
12. *Rogoff Z.M., Kiselev A.P.* // Wave Motion. 2001. V. 33. № 2. P. 183.
13. *Zlobina E.A., Kiselev A.P.* // Wave Motion. 2020. V. 96. Article No. 102571.

14. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33. № 2. С. 35.
15. *Злобина Е.А.* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Т. 493. С. 169.
16. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 130.
17. *Злобина Е.А.* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2021. Т. 506. С. 43.
18. *Попов А.В.* // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 4. С. 594.
19. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения волн. М.: Наука, 1975.
20. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 10. С. 1155.
21. *Крюковский А.С.* Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013.
22. *Злобина Е.А.* // Мат. заметки. 2023. Т. 114. № 4. С. 666.
23. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972.