

**ТЕОРИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

УДК 621.372.54

**АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ  
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ**

© 2023 г. А. С. Коротков\*, А. Каврук

<sup>a</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
ул. Политехническая, 29, Санкт Петербург, 195251 Российская Федерация

\*E-mail: korotkov@spbstu.ru

Поступила в редакцию 20.07.2022 г.

После доработки 22.02.2023 г.

Принята к публикации 25.02.2023 г.

Рассмотрены различные решения задачи аппроксимации передаточных функций дробного порядка и показана методика решения задачи устойчивости для подобных функций. Проведено сравнение уже имеющихся решений задачи аппроксимации функции  $p^\alpha$  с предложенным на основе критерия наименьшей среднеквадратичной ошибки. В качестве примера представлены результаты моделирования фильтра с применением предложенного решения.

DOI: 10.31857/S0033849423060086, EDN: ХМОСТЕ

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В основе представления передаточных функций дробной степени, т.е. нецелочисленной степени, лежит понятие интеграла и производной дробного порядка. Существует несколько возможных вариантов определения данных функций. В качестве примера приведем определения Римана–Лиувилля для интеграла и производной дробного порядка  $\alpha$  функции  $f(t)$  [1] (подробнее см. [2]):

$$J^\alpha(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx,$$

$$D^\alpha(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-x)^{-\alpha} f(x) dx,$$

где  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция. Преобразование Лапласа  $L\{\cdot\}$  при нулевых начальных условиях позволяет преобразовать представление функций из временной области в частотную:

$$L\{J^\alpha(f(t))\} = F(p)/p^\alpha,$$

$$L\{D^\alpha(f(t))\} = p^\alpha F(p),$$

где  $p$  – комплексная частота;  $F(p)$  – образ в частотной области функции  $f(t)$ .

Рассмотрим элемент, получивший название псевдоемкость, который занимает промежуточное положение между конденсатором и сопротивлением. Связь тока и напряжения данного элемента

описывается во временной и частотной областях следующими выражениями:

$$i(t) = C \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}, \quad L\{i(t)\} = I(p) = Cp^\alpha U(p),$$

где  $C$  – псевдоемкость с размерностью  $[Фс^{\alpha-1}]$ .

Рассмотрим частотные свойства такого элемента. Для этого подставим  $p = j\omega$ :

$$Z(j\omega) = \frac{1}{C(j\omega)^\alpha} = \frac{1}{C\omega^\alpha \exp\left(\frac{j\pi\alpha}{2}\right)}.$$

Модуль и аргумент (разность фаз между напряжением и током) импеданса псевдоемкости:

$$|Z(j\omega)| = \frac{1}{C\omega^\alpha}, \quad \arg(Z(j\omega)) = -\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Аналогично определяется элемент псевдоиндуктивность. Комбинация элементов с дробной степенью зависимости импедансов от частоты составляет физическую основу реализации устройств с дробной передаточной функцией.

Возможные практические применения устройств с дробными схемными функциями рассмотрены, например, в [3, 4] и [5]. Выделяются применения в области биологии, медицины, биофизики и других естественных науках. Однако основные исследования сосредоточены в области систем управления [4], радиотехники и электроники [6], в том числе являются практически значимыми задачи синтеза схем и цепей с дробными передаточными функциями. Характерным примером

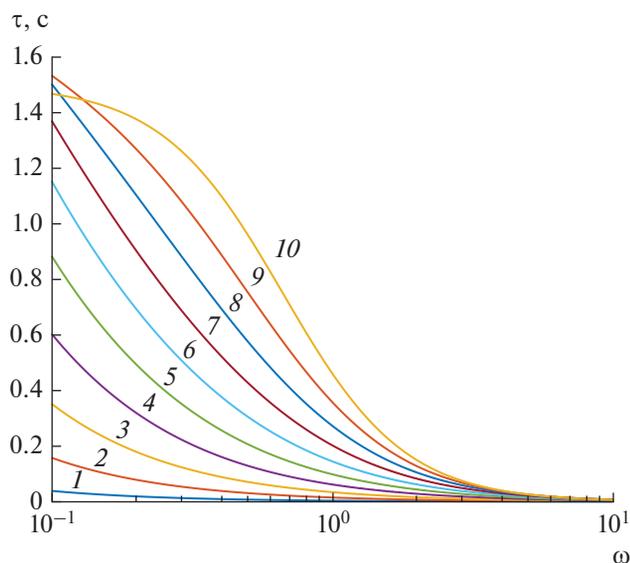


Рис. 1. Зависимость ГВЗ от частоты при разных порядках интегратора:  $\alpha = 0.1$  (1), 0.2 (2), 0.3 (3), 0.4 (4), 0.5 (5), 0.6 (6), 0.7 (7), 0.8 (8), 0.9 (9), 1.0 (10).

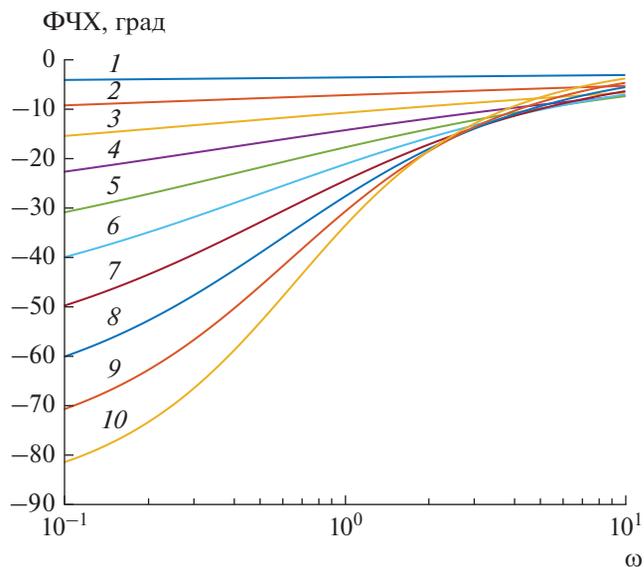


Рис. 2. Фазочастотная характеристика регулятора при разных порядках интегратора:  $\alpha = 0.1$  (1), 0.2 (2), 0.3 (3), 0.4 (4), 0.5 (5), 0.6 (6), 0.7 (7), 0.8 (8), 0.9 (9), 1.0 (10).

является регулятор для системы автоматического управления, так называемый ПИД-регулятор, который представляет параллельное соединение трех блоков: линейного усилителя (пропорционального множителя, П), интегратора, И, дифференциатора, Д. Устройство используется в петле обратной связи контура регулирования и определяет ошибку слежения, длительность переходного процесса, устойчивость. В качестве примера рассмотрим передаточную функцию простейшего регулятора, содержащего усилитель и интегратор:

$$T(p) = K_p + K_i/p^\alpha.$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) и групповое время запаздывания (ГВЗ) такого регулятора определяются по выражению

$$\varphi = -\arctg \left( \frac{K_i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\omega^\alpha K_p + K_i \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \right), \quad \tau = -\frac{d\varphi}{d\omega}.$$

Не ограничивая общности, примем коэффициенты  $K_p = 3$  и  $K_i = 2$ . На рис. 1, 2 показаны зависимости в диапазоне нормированных частот ГВЗ и ФЧХ от дробного порядка  $\alpha$  передаточной функции интегратора. Приблизительно до частоты 0.1 ГВЗ ПИ-регулятора с целочисленной передаточной функцией практически не изменяется; для регулятора с дробной передаточной функцией полюса, в которой ГВЗ близко к постоянному, уже, но абсолютное значение ГВЗ меньше.

Приведенный пример показывает, что построение устройств с дробными передаточными функ-

циями открывает новые возможности, обусловленные появлением дополнительной степени свободы при точном определении порядка функции. Поскольку рассматриваемый класс задач соответствует проблеме оптимального синтеза цепей, то, как первый этап, содержит процедуру аппроксимации, в основе которой анализ устойчивости [7, 8] и использование классических функций Баттерворта [9, 10], Чебышева [11], Кауэра [12]. Следует отметить, что общие закономерности, свойственные перечисленным аппроксимациям с целочисленными степенями, хорошо известны из теории фильтров и сохраняются также для аппроксимаций с дробными степенями. Поэтому основную сложность представляет выбор функции, с помощью которой осуществляется преобразование аргумента комплексной частоты в дробной степени  $p^\alpha$  к виду дробно-рациональной функции. Данное преобразование осуществляется с помощью разложения функции  $p^\alpha$  в непрерывную дробь [13]. Однако данное разложение не является единственным. Как следствие, возникает необходимость сопоставительного анализа различных разложений с точки зрения возникающей ошибки аппроксимации и выбора наилучшего решения, поскольку в опубликованных статьях, в том числе перечисленных, такой анализ не проводился (см., например, [9–12, 14, 15]).

Цель данной работы – решение задачи аппроксимации передаточных функций высокого порядка дробной степени на основе целочисленных аппроксимаций; сопоставительный анализ представленных решений; выбор решений, обес-

печивающих минимальную амплитудную и фазовую ошибки, включая численные оценки ошибок для функций различных порядков и пример.

### 1. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕПЕЙ С ПЕРЕДАТОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

Коротко рассмотрим основной подход к анализу устойчивости цепей с передаточными функциями высокого порядка дробной степени [7, 8]. Определим знаменатель передаточной функции как

$$D(p) = a_m p^{\alpha_m} + a_{m-1} p^{\alpha_{m-1}} + \dots + a_1 p^{\alpha_1} + a_0 p^{\alpha_0} = \sum_{i=0}^m a_i p^{\alpha_i},$$

где показатель степени всегда можно представить обыкновенной дробью  $\alpha_i = k_i/v$ , причем числитель и знаменатель – целые числа. Тогда, после замены переменной  $W = p^{1/v}$  представим знаменатель передаточной функции выражением

$$D(W) = a_m W^{k_m} + a_{m-1} W^{k_{m-1}} + \dots + a_1 W^{k_1} + a_0 W^{k_0}.$$

Расположение корней полученного уравнения степени  $k_m$  на комплексной плоскости переменной  $W$  определяет устойчивость рассматриваемой схемы, поскольку проведенная замена переменной соответствует преобразованию из  $p$ -плоскости в  $W$ -плоскость, в которой область расположения корней ограничена лучами, направленными под углом  $\pm \frac{\pi}{v}$  к горизонтальной оси. Если корень находится в области, ограниченной лучами, направленными под углом  $\pm \frac{\pi}{2v}$ , то система неустойчива. Рассмотрим следующий пример. Пусть решена задача аппроксимации на основе функции Баттерворта, причем порядок знаменателя передаточной функции равен 1.5 [9]:

$$p^{3/2} + 0.6800 p^{1/2} + 0.8591 = 0. \tag{1}$$

Для решения задачи воспользуемся заменой переменной  $W = p^{1/2}$  в выражении (1). Тогда знаменатель передаточной функции равен

$$W^3 + 0.6800W + 0.8591 = 0. \tag{2}$$

Так как  $p$  – комплексная частота  $p = |p| \exp(i\varphi)$ , то

$$W = p^{1/2} = \sqrt{|p|} \exp(i\varphi/2) = |W| \exp(i\theta).$$

Откуда определим систему уравнений вида

$$\begin{cases} |W|^3 \cos 3\theta + 0.6800 |W| \cos \theta + 0.8591 = 0 \\ |W|^3 \sin 3\theta + 0.6800 |W| \sin \theta = 0 \end{cases}.$$

Представим решения системы:  $|W| = 1.0936$ ;  $\theta = \pm 1.2362$  рад =  $\pm 70.83$  град. Так как для рас-

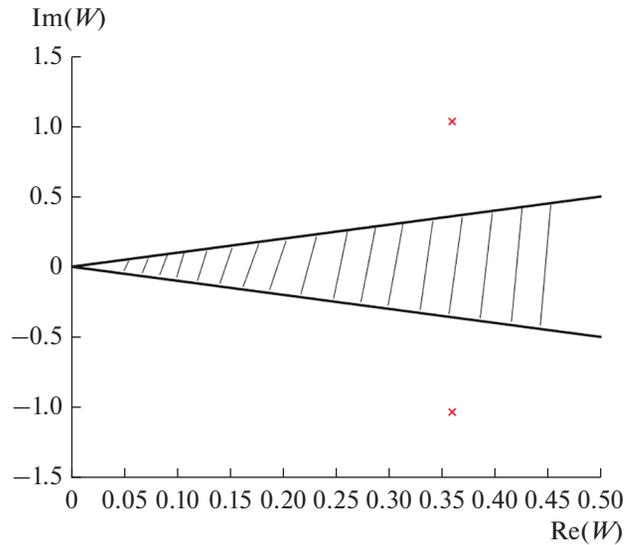


Рис. 3. Расположение полюсов (обозначены крестиками) на комплексной плоскости  $W$  (заштрихованная область – зона неустойчивости).

сматриваемого примера  $v = 2$ , то область неустойчивости составляет  $[-45, +45]$  град. Решения находятся вне этой области (рис. 3), следовательно, цепь устойчива.

Следует отметить, что для решения задачи устойчивости ограниченно применимы алгебраические критерии, например Рауса–Гурвица, так как полином знаменателя передаточной функции после подстановки имеет целочисленный порядок. Если критерий выполнен, то устойчивость обеспечивается. Однако невыполнение критерия не является показателем неустойчивости. Действительно, для функции (2) не выполняется необходимое условие, а именно: коэффициент при второй степени равен 0 (должен быть положительным), т.е. заведомо известно, что полюса передаточной функции лежат в правой полуплоскости. Тем не менее устойчивость, как показано, имеет место. Другими словами, непосредственно ответ об устойчивости с использованием критерия Рауса–Гурвица дать нельзя, поскольку область устойчивости расширяется на часть правой полуплоскости.

### 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ПО БАТТЕРВОРТУ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

В работе [9] предлагается следующее решение задачи аппроксимации для максимально плоской функции. Рассматривается следующая передаточная функция:

$$H_{n+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{n+\alpha} + k_2},$$

где  $n$  – целое число,  $\alpha$  – дробное число, причем  $0 < \alpha < 1$ ,  $k_1$  и  $k_2$  – положительные коэффициенты. Анализ устойчивости показывает, что если  $n + \alpha > 2$ , то схема становится неустойчивой. Следовательно, может быть реализована только передаточная функция в виде

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_2}. \quad (3)$$

Тогда передаточная функция высокого порядка аппроксимируется выражением

$$H_{n+\alpha}(p) = \frac{H_{1+\alpha}(p)}{B_{n-1}(p)},$$

где  $B_{n-1}(p)$  – полином Баттерворта  $(n-1)$ -го порядка. Например, для аппроксимации порядка  $(2 + \alpha)$  получим

$$H_{2+\alpha}(p) = \frac{H_{1+\alpha}(p)}{1 + p}.$$

Изучение свойств функции (3) показало, что модуль функции, т.е. амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), имеет “выброс” в области частоты среза [9]. Как следствие, для реализации гладкой функции Баттерворта необходимо внести поправку. В этой связи на практике используются модифицированные функции [9, 10]:

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_2 p^\alpha + k_3}, \quad (4)$$

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_2 p + k_3}, \quad (5)$$

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + k_2 p^{\alpha_2} + k_3}. \quad (6)$$

Для определения коэффициентов  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  в [9, 10] было проведено решение оптимизационной задачи в постановке следующего вида:

$$\begin{aligned} \min_x \| |H(\mathbf{x}, \omega)| - |B_1(\omega)| \|^2 = \\ = \min_x \sum_{i=1}^l (|H(\mathbf{x}, \omega_i)| - |B_1(\omega_i)|)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $H(\mathbf{x}, \omega)$  – функции (4)–(6);  $B_1(\omega)$  – полином Баттерворта 1-го порядка;  $\omega_i$  – частотные точки;  $\mathbf{x} = \{k_1, k_2, k_3\}$ . При решении оптимизационной задачи коэффициент  $k_1$  фиксирован,  $k_1 = 1$ . Коэффициенты  $k_2$ ,  $k_3$  варьировались в диапазонах  $0 < k_2 \leq 2$ ,  $0 < k_3 \leq 2$ . Решение проводилось в MatLab с использованием процедуры минимизации наименьшей квадратичной ошибки (процедура LSE). Порядок функции менялся от 1.01 до 1.99 с шагом 0.01. В результате получены множества значений коэффициентов  $k_2$ ,  $k_3$  как функций от  $\alpha$ . Далее использована процедура интерполяции

и построены зависимости для коэффициентов  $k_2$ ,  $k_3$  от как от аргумента для функций (4)–(6). В качестве примера приведем результат, представленный в [9] для функции (4):

$$\begin{aligned} k_1 = 1, \quad k_2 = 1.0683\alpha^2 + 0.1610\alpha + 0.3324, \\ k_3 = 0.2937\alpha + 0.7122. \end{aligned}$$

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ПО ЧЕБЫШЕВУ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

В работе [11] рассмотрено решение задачи на основе аппроксимации по Чебышеву. Предложен подход, аналогичный рассмотренному. Выражение (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \min_x \| |H(\mathbf{x}, \omega)| - |C_n(\omega)| \|^2 = \\ = \min_x \sum_{i=1}^l (|H(\mathbf{x}, \omega_i)| - |C_n(\omega_i)|)^2, \end{aligned}$$

где  $C_n(\omega)$  – передаточная функция фильтра Чебышева  $n$ -го порядка. На первом этапе решения задачи рассматривается функция

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_3 p^\alpha + k_2}, \quad (8)$$

для которой определяются коэффициенты при  $n = 2$ . При этом использована передаточная функция Чебышева с неравномерностью 3 дБ. Получены решения для коэффициентов  $k_i$  при значениях  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.8$ . Далее рассмотрены функции  $H_{2+\alpha}(p)$ ,  $H_{3+\alpha}(p)$ , полученные как перемножением функции (8) и билинейной передаточной функции, так и перемножением функции (8) и квадратичной передаточной функции соответственно:

$$\begin{aligned} H_{2+\alpha}(p) &= \frac{k_1}{p^{2+\alpha} + k_5 p^{1+\alpha} + k_4 p^\alpha + k_3 p + k_2}, \\ H_{3+\alpha}(p) &= \\ &= \frac{k_1}{p^{3+\alpha} + k_6 p^{2+\alpha} + k_5 p^2 + k_4 p^{1+\alpha} + k_3 p + k_2}. \end{aligned}$$

Далее в расчетах были использованы функции Чебышева 3-го и 4-го порядков с неравномерностью 3 дБ и при тех же значениях  $\alpha$ .

### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ПО ЗОЛОТАРЕВУ–КАЭУРУ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

В работе [12] приводится решение задачи на основе аппроксимации по Золотареву–Кауэру. Как и в случае аппроксимации по Чебышеву, коэффициенты определяются из решения оптимизационной задачи. Для решения была выбрана

передаточная функция 2-го порядка с подавлением в полосе задерживания 50 дБ, нулем на частоте 10.4 рад/с и с максимумом в полосе пропускания 5 дБ:

$$E_2(p) = 0.0032 \frac{p^2 + 108.0248}{p^2 + 0.4562p + 0.6075}.$$

Искомая передаточная функция порядка  $(1 + \alpha)$ :

$$H_{1+\alpha}(p) = a_4 \frac{a_1 p^{1+\alpha} + 1}{a_2 p^{1+\alpha} + a_3 p^\alpha + 1}.$$

Рассматривалась минимизация квадратичной ошибки:

$$\begin{aligned} \min_x \| |H(\mathbf{x}, \omega)| - |E_2(\omega)| \|^2 &= \\ = \min_x \sum_{i=1}^l (|H_{1+\alpha}(\mathbf{x}, \omega_i)| - |E_2(\omega_i)|)^2. \end{aligned}$$

Дополнительно исследовалось влияние диапазона частот на решение оптимизационной задачи. С точки зрения минимизации ошибки по подавлению в полосе задерживания целесообразно использовать наиболее широкий диапазон, обладающий симметрией относительно частоты среза (в работе рассмотрен диапазон  $10^{-5} \dots 10^5$  рад/с).

При минимизации ошибки в полосе пропускания целесообразно рассматривать несимметричный диапазон (например, в данной работе рассмотрен диапазон  $10^{-5} \dots 10^1$  рад/с). Чем более

широкая часть полосы пропускания рассматривается, тем ближе АЧХ к необходимому коэффициенту передачи, но при этом обеспечивается меньшее подавление в полосе задерживания.

### 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

Как отмечалось, основу реализации передаточных функций дробной степени составляют псевдоемкость и псевдоиндуктивность, импеданс которых пропорционален (обратно пропорционален) функции  $p^\alpha$ . Основной подход предполагает аппроксимацию функции  $p^\alpha$  с помощью физически реализуемой дробно-рациональной функции. Рассмотрим решение на примере функции (4) в виде

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_3 p^\alpha + k_2} = \frac{k_1}{pp^\alpha + k_3 p^\alpha + k_2}.$$

Предположим, что множитель  $p^\alpha$  удалось представить дробно-рациональной функцией:

$$p^\alpha \approx \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{a_2 + a_1 p + a_0 p^2},$$

где коэффициенты  $a_i$  зависят от  $\alpha$ . Тогда после подстановки получим

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1 (a_2 + a_1 p + a_0 p^2)}{(k_3 a_0 + k_2 a_2) + (a_0 + k_3 a_1 + k_2 a_1) p + (a_1 + k_3 a_2 + k_2 a_0) p^2 + a_2 p^3}.$$

То есть реализация передаточной функции дробной степени сводится к реализации дробно-рациональной функции.

В большинстве работ (см., например, [10]) рассматривается аппроксимация функции  $p^\alpha$  с помощью разложения в непрерывную дробь. При этом исходная функция представляется тождеством вида

$$p^\alpha \equiv \frac{(1+p)^\alpha}{(1+1/p)^\alpha}. \tag{9}$$

Следует отметить, что при больших значениях  $\omega$  поведение функции преимущественно определяется числителем:  $p^\alpha \approx (1+p)^\alpha$ . При малых значениях  $\omega$  поведение функции преимущественно определяется знаменателем:  $p^\alpha \approx (1+1/p)^\alpha$ . В основе решения – результаты, представленные в [13]. В частности, там показано, что справедливо следующее разложение в непрерывную дробь:

$$(1+x)^\alpha \approx \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{(1+\alpha)x}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha x}{2 + \frac{(1-\alpha)x}{3 + \frac{(2+\alpha)x}{2 + \frac{(2-\alpha)x}{5 + \dots}}}}}. \tag{10}$$

Слагаемое  $n$ -го уровня в этом разложении описывается выражением

$$(1+x)^\alpha \approx \frac{1}{1 + \dots + \frac{(n+\alpha)x}{2 + \frac{(n-\alpha)x}{2n+1 \dots}}}$$

Если ограничить разложение тремя уровнями (дробью первого порядка), то получим

$$(1+x)^\alpha \approx \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + \frac{(1+\alpha)x}{2}}} = \frac{1 + (1+\alpha)x/2}{1 + (1-\alpha)x/2}. \tag{11}$$

Используя данный результат для разложения функции  $(1 + 1/x)^\alpha$  путем замены переменной  $x \leftrightarrow 1/x$  в (11), представим

$$(1 + 1/x)^\alpha \approx \frac{(1 + \alpha)/2 + x}{(1 - \alpha)/2 + x} \tag{12}$$

Таким образом, окончательно для функции (9) разложение примет вид

$$p^\alpha \approx \frac{\left(\frac{1 + (1 + \alpha)p/2}{1 + (1 - \alpha)p/2}\right) \left(\frac{(1 - \alpha)/2 + p}{(1 + \alpha)/2 + p}\right)}{2(1 - \alpha) + (5 - \alpha^2)p + 2(1 + \alpha)p^2} = \frac{2(1 - \alpha) + (5 - \alpha^2)p + 2(1 + \alpha)p^2}{2(1 + \alpha) + (5 - \alpha^2)p + 2(1 - \alpha)p^2} \tag{13}$$

Следует отметить, что разложение в непрерывную дробь не единственно. В [13] приведены другие варианты разложения. Следовательно, функция  $p^\alpha$  может быть представлена иным выражением. Еще один результат, но без вывода, приведен в [14, 15]. Анализ показал, что аппроксимирующая функция из [14, 15] выполнена на основе разложения (10), если ограничить разложение функции  $(1 + x)^\alpha$  пятью уровнями согласно (10) и далее осуществить замену переменной  $x \leftrightarrow p - 1$ . Получен следующий результат:

$$p^\alpha \approx \frac{(2 - 3\alpha + \alpha^2) + (8 - 2\alpha^2)p + (2 + 3\alpha + \alpha^2)p^2}{(2 + 3\alpha + \alpha^2) + (8 - 2\alpha^2)p + (2 - 3\alpha + \alpha^2)p^2} \tag{14}$$

Для повышения точности аппроксимации можно использовать дробь более высокого порядка. Как

$$p^\alpha \approx \frac{12(\alpha^2 - 3\alpha + 2) + 6(\alpha^3 - \alpha^2 - 16\alpha + 28)p + (\alpha^4 - 41\alpha^2 + 292)p^2 + 6(-\alpha^3 - \alpha^2 + 16\alpha + 28)p^3 + 12(\alpha^2 + 3\alpha + 2)p^4}{12(\alpha^2 + 3\alpha + 2) + 6(-\alpha^3 - \alpha^2 + 16\alpha + 28)p + (\alpha^4 - 41\alpha^2 + 292)p^2 + 6(\alpha^3 - \alpha^2 - 16\alpha + 28)p^3 + 12(\alpha^2 - 3\alpha + 2)p^4} \tag{16}$$

Данный результат соответствует решению, приведенному без вывода в [10]. Для функции  $p^{1/2}$  разница с (16) составляет около 1 дБ в полосе частот 2-й декады.

### 6. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД И РАЗЛОЖЕНИЕ В НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ

В [13] отмечена взаимосвязь между разложением в ряд и разложением в непрерывную дробь. Возникает вопрос: если разложение в непрерывную дробь неоднозначно, то как это соответствует единственности разложения в ряд. Проверим рассмотренные выше результаты. Для этого пред-

ставим числитель выражения (9) дробно-рациональными функциями 1-го и 2-го порядков:

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_1 p + a_0}{b_1 p + b_0}, \tag{17}$$

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}, \tag{18}$$

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}, \tag{19}$$

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_2 p^2 + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}, \tag{20}$$

$$(1 + x)^\alpha = \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + x - \frac{(1 - \alpha)x}{2 - \frac{(1 + \alpha)x}{3(1 + x) - \frac{2(2 - \alpha)x}{4 - \dots}}}}}$$

Слагаемое  $n$ -го уровня в данном разложении описывается выражением

$$(1 + x)^\alpha = \frac{1}{1 + \dots - \frac{n(n - \alpha)x}{2n - \frac{n(n - \alpha)x}{(2n + 1)(1 + x)} \dots}}$$

Если ограничить разложение пятью уровнями (дробью 2-го порядка), то получим

$$(1 + x)^\alpha \approx \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + x - \frac{(1 - \alpha)x}{2 - \frac{(1 + \alpha)x}{3(1 + x) - \frac{2(2 - \alpha)x}{4}}}}} = \frac{12 + 6(2 + \alpha)x + (2 + 3\alpha + \alpha^2)x^2}{12 + 6(2 - \alpha)x + (2 - 3\alpha + \alpha^2)x^2} \tag{15}$$

Используя результат для разложения функции  $(1 + 1/x)^\alpha$  путем замены переменной  $x \leftrightarrow 1/x$  и выражение (15), представим функцию (9) с помощью дроби 4-го порядка как:

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_1 p + b_0}. \quad (21)$$

Рассмотрим решение для функции 1-го порядка (17):

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{1 + b_1 p}{1 + c_1 p}.$$

Осуществим разложение в ряд левой и правой частей данного выражения

$$(1 + p)^\alpha \approx 1 + \alpha p + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} p^2 + \dots,$$

$$\frac{1 + b_1 p}{1 + c_1 p} \approx 1 + (b_1 - c_1) p + \frac{-2b_1 c_1 + 2c_1^2}{2} p^2 + \dots$$

И далее приравняем коэффициенты при равных степенях аргумента  $p$  до 2-го порядка малости:

$$\alpha = b_1 - c_1, \quad \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} = \frac{-2b_1 c_1 + 2c_1^2}{2}.$$

Решение данной системы имеет вид

$$b_1 = (1 + \alpha)/2, \quad c_1 = (1 - \alpha)/2,$$

что полностью соответствует результату (11). Замена переменной  $p \leftrightarrow 1/p$  приводит к выражениям (12), (13). Разложения в ряд Тейлора, составление систем уравнений и решения для функций

2-го порядка проводятся аналогично рассмотренному случаю и показывают следующие результаты в виде разложений функции  $(1 + p)^\alpha$ : решение с использованием (18) соответствует решению (16); решение с использованием (19) приводит к результату вида

$$\begin{aligned} (1 + p)^\alpha &\approx \frac{6}{\alpha^2 - \alpha} + \frac{2(2 + \alpha)}{\alpha(\alpha - 1)} p = \\ &= \frac{6}{\alpha^2 - \alpha} - \frac{4}{\alpha} p + p^2 = \\ &= \frac{6 + 2(2 + \alpha) p}{6 - 4(\alpha - 1) p + \alpha(\alpha - 1) p^2}, \end{aligned}$$

что соответствует разложению в непрерывную дробь (10), ограниченному 4-м уровнем:

$$\begin{aligned} (1 + x)^\alpha &= \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + \frac{(1 + \alpha)x}{2 + \frac{(1 - \alpha)x}{3}}}} = \\ &= \frac{(4 + 2\alpha)x + 6}{(\alpha^2 - \alpha)x^2 + (4 - 4\alpha)x + 6\alpha}. \end{aligned}$$

Результат для функции (9):

$$p^\alpha \approx \frac{3\alpha(\alpha - 1) + (\alpha^3 + \alpha^2 - 14\alpha + 12)p + 2(-2\alpha^2 - 2\alpha + 13)p^2 + 6(\alpha + 2)p^3}{p(6(\alpha + 2) + 2(-2\alpha^2 - 2\alpha + 13)p + (\alpha^3 + \alpha^2 - 14\alpha + 12)p^2 + 3\alpha(\alpha - 1)p^3)}. \quad (22)$$

Рассмотрим аппроксимирующую функцию (22) на предмет устойчивости. Для этого осуществим

подстановку выражения (22) в передаточную функцию порядка  $(1 + \alpha)$ :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{p^\alpha p + k_2 p^\alpha + k_3} = \\ &= \frac{p(a_3 + a_2 p + a_1 p^2 + a_0 p^3)}{p^4(a_3 + a_0 k_3) + p^3(a_2 + a_3 k_2 + a_1 k_3) + p^2(a_1 + a_2 k_2 + a_2 k_3) + p(a_0 + a_1 k_2 + a_3 k_3) + a_0 k_2}, \end{aligned}$$

где  $a_i$  – коэффициенты числителя (22);  $k_2, k_3$  – коэффициенты передаточной функции порядка  $(1 + \alpha)$ , причем  $k_2, k_3 > 0$  [9]. Используем значения коэффициентов  $k_2, k_3$  согласно результатам работы [9]. Знаменатель передаточной функции является полиномом Гурвица, если все коэффициенты одного знака, что выполняется для всех коэффициентов кроме свободного члена: свободный член во всем диапазоне значений  $\alpha$  от 0 до 1 принимает отрицательные значения, остальные коэффициенты – положительные. Таким обра-

зом, решение (22) соответствует неустойчивой схеме, и далее его не рассматриваем.

Для функций (20), (21) получены следующие результаты:

$$\begin{aligned} (1 + p)^\alpha &\approx \frac{3}{\alpha^2 - 1} - \frac{\alpha + 2}{2(\alpha - 1)} p^2 = \\ &= \frac{3}{\alpha^2 - 1} - \frac{3\alpha}{\alpha^2 - 1} p + p^2 = \\ &= \frac{6 - (\alpha + 2)(\alpha + 1)p^2}{6 - 6\alpha p + 2(\alpha^2 - 1)p^2}, \end{aligned}$$

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{-\frac{3}{\alpha - 2} - \frac{2(1 + \alpha)}{\alpha - 2} p - \frac{\alpha^2 + \alpha}{2(\alpha - 2)} p^2}{-\frac{3}{\alpha - 2} + p} = \frac{-6 - 4(1 + \alpha)p - (\alpha^2 + \alpha)p^2}{-6 + 2(\alpha - 2)p},$$

для которых не удалось обнаружить соответствие в разложениях дробей. При этом для функции (9) имеем

$$p^\alpha \approx \frac{6(\alpha^2 - 1) - 18\alpha p + (-\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 20)p^2 + 3(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha)p^3 + 3(-\alpha^2 - 3\alpha - 2)p^4}{-3(\alpha^2 + 3\alpha + 2) + 3\alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 2)p + (-\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 20)p^2 - 18\alpha p^3 + 6(\alpha^2 - 1)p^4}, \quad (23)$$

$$p^\alpha \approx \frac{p(12(\alpha - 2) + 4(2\alpha^2 - 2\alpha - 13))p + 2(\alpha^3 - \alpha^2 - 14\alpha - 12)p^2 + 6\alpha(-\alpha - 1)p^3}{6\alpha(-\alpha - 1) + 2(\alpha^3 - \alpha^2 - 14\alpha - 12)p + 4(2\alpha^2 - 2\alpha - 13)p^2 + 12(\alpha - 2)p^3}. \quad (24)$$

Обобщая приведенные результаты, отметим, что совпадение разложения в дробь и разложения в ряд имеет место для аппроксимаций с полиномами одного порядка в числителе и знаменателе (9), если рассматривается  $2n + 1$  уровней разложения, где  $n$  – порядок аппроксимации числителя/знаменателя функции (9), т.е. для решений вида (17), (18).

### 7. СОПОСТАВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АППРОКСИМАЦИЙ

Проанализируем каждую из аппроксимирующих функций и сравним с (9) при различных значениях  $\alpha$ . Критерий сравнения – среднеквадратичная ошибка. Абсолютную и относительную амплитудные ошибки при заданном значении  $\alpha$  будем определять соотношением

$$\Delta_A^\alpha = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (|G(\alpha, \omega_i)| - \omega^\alpha)^2},$$

$$\delta_A^\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (|G(\alpha, \omega_i)| - \omega^\alpha)^2}{\sum_{i=1}^N \omega^{2\alpha}}},$$

где  $G(\alpha, \omega_i)$  – одна из аппроксимирующих функций (13), (14), (16), (23), (24) при фиксированном значении  $\alpha$  и переменном значении частоты  $\omega_i$ ,  $N$  – количество отсчетов по частотной оси. Для расчета был взят диапазон нормированных частот от 0.1 до 10.0, количество точек равно  $10^5$ . Ошибка вычислялась в диапазоне значений  $\alpha$  от 0.01 до 0.99 с шагом 0.01. Результаты представлены на рис. 4.

Из приведенных результатов следует, что в диапазоне значений  $\alpha$  от 0.01 до 0.10 амплитудные ошибки различных решений близки. При  $\alpha$  от 0.1 до 0.6 функция (13) дает наилучший результат среди рассмотренных. При  $\alpha$  от 0.60 до 0.99 функция (24) дает наименьшую ошибку в сравнении с другими. При  $\alpha$  от 0.10 до 0.86 среднеквадратичная ошибка функции (13) меньше, чем функции (14).

Аналогично приведем формулу расчета фазовых ошибок:

$$\Delta_\phi^\alpha = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \arg(G(\alpha, \omega_i)) - \frac{\pi\alpha}{2} \right)^2}.$$

Для расчета был использован тот же диапазон частот и значений  $\alpha$ , что и в случае определения амплитудных ошибок. Результаты расчета представлены на рис. 5.

Из приведенных результатов следует, что для различных функций ошибка аргумента  $p^\alpha$  при малых  $\alpha$  отличается незначительно. Для функций (14), (16) фазовые ошибки во всем диапазоне значений  $\alpha$  по сравнению с другими решениями являются наименьшими. Функция (14) имеет меньшие ошибки, чем функция (13) того же порядка. Резюмируя результаты по амплитудным и фазовым

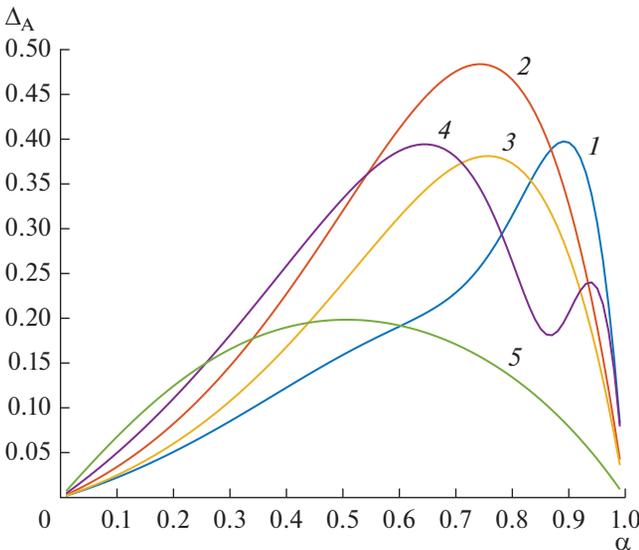
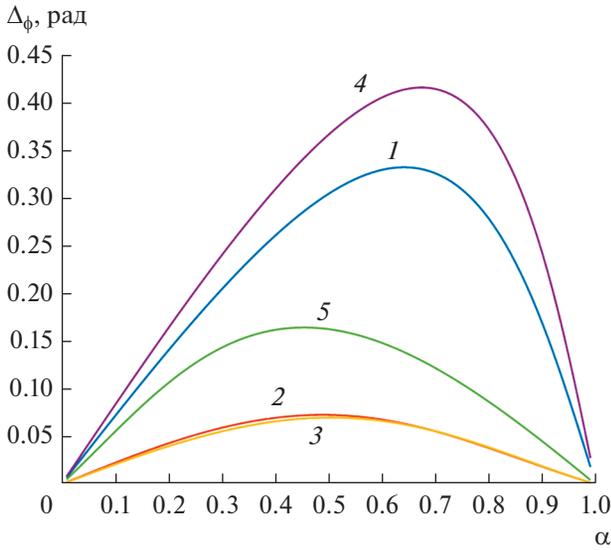


Рис. 4. Среднеквадратичные амплитудные ошибки аппроксимации функции  $p^\alpha$ : кривая 1 – (13), кривая 2 – (14), кривая 3 – (16), кривая 4 – (23), кривая 5 – (24).



**Рис. 5.** Среднеквадратичные фазовые ошибки аппроксимации функции  $p^\alpha$ : кривая 1 – (13), кривая 2 – (14), кривая 3 – (16), кривая 4 – (23), кривая 5 – (24).

ошибкам, отметим, что функции (13), (23) не являются оптимальными с точки зрения фазовых ошибок. В случае других решений удастся либо получить меньшую ошибку по амплитудным характеристикам, но при этом проиграть по фазовым ошибкам, либо наоборот. Компромиссным вариантом является решение (16).

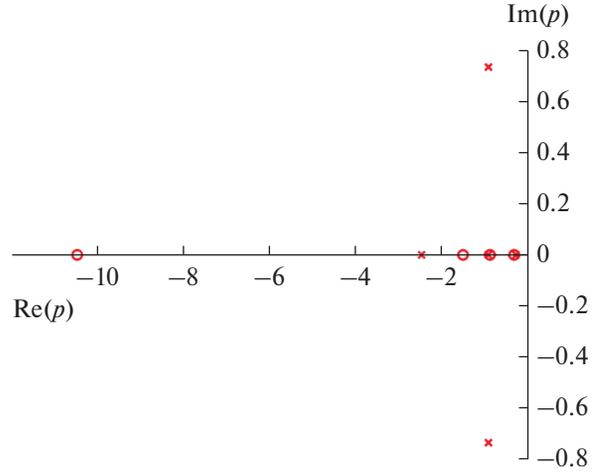
В качестве практического примера представим результаты для фильтра нижних частот Баттерворта порядка 1.5 с использованием аппроксимирующей функции (16). Передаточная функция с учетом (1) имеет вид

$$T(p) = \frac{0.20p^4 + 2.65p^3 + 6.26p^2 + 4.75p + 1.00}{p^5 + 5.60p^4 + 11.77p^3 + 12.29p^2 + 6.08p + 1.00}.$$

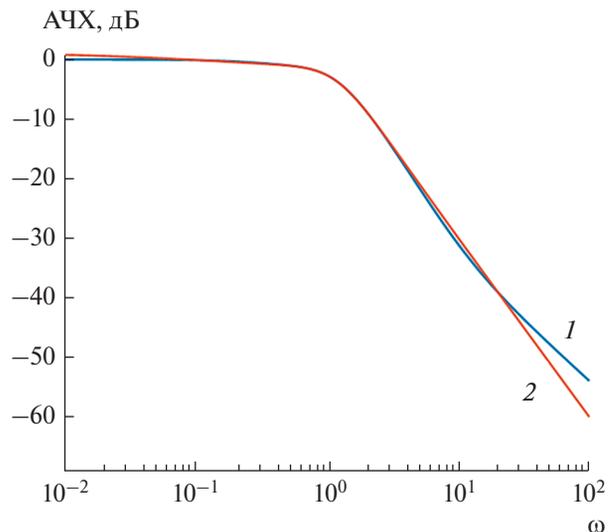
Расположение полюсов и нулей на комплексной плоскости представлено на рис. 6, что соответствует устойчивой схеме. АЧХ фильтра показана на рис. 7. Ошибка в верхней части приведенного диапазона частот не превышает 1 дБ.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Представлены методы решения задачи аппроксимации функции  $p^\alpha$  для построения передаточных функций высокого порядка дробной степени. Проведен сопоставительный анализ решений (13), (14), (16), (23), (24) в диапазоне нормированных частот от 0.1 до 10. Исключено из рассмотрения неустойчивое решение (22). Показано, что при значениях дробной части показателя степени



**Рис. 6.** Расположение полюсов и нулей передаточной функции ФНЧ с использованием аппроксимации (16).



**Рис. 7.** Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ Баттерворта порядка 1.5: кривая 1 – фильтр с функцией (16), кривая 2 – идеальный дробный фильтр.

передаточной функции  $\alpha$  от 0.10 до 0.60 аппроксимация (13) дает наилучший результат по критерию минимума относительной амплитудной среднеквадратичной ошибки, которая не превышает 7%. При  $\alpha$  от 0.60 до 0.99 рекомендуется использовать предложенную в данной работе аппроксимацию (24), преимуществом которой по сравнению с известными решениями (13) [10], (14) [14, 15], (16) [10] и решением, предложенным также в данной работе (23), является наименьшая относительная амплитудная ошибка, не превышающая 7% в полосе частот две декады при 4-м порядке приближения. Для функций (14), (16) фазовые ошибки во всем диапазоне значений  $\alpha$  по сравнению с

другими решениями являются наименьшими и составляют до 0.08 и 0.07 рад соответственно.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-15-2022-31).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руман Б. Сочинения. М.: Гостехтеориздат, 1949.
2. Потанов А.А. // Журн. радиоэлектроники. 2010. № 1. С. 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan10/4/text.pdf>.
3. Elwakil A. // IEEE Circuits and Systems Magaz. 2010. V. 10. № 4. P. 40. <https://doi.org/10.1109/MCAS.2010.938637>
4. Warriar P., Shah P. // IEEE Access. 2021. V. 9. Article No. 58982. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3073033>
5. Psychalinos C., Elwakil A., Allagui A., Tepljakov A. // Int. J. Electron. Commun. (AEU). 2017. V. 81. P. 132. <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2017.07.016>
6. Sladok O., Koton J., Kubanek D. et al. // IEEE Access. 2021. V. 9. Article No. 92178. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3091544>
7. Radwan A.G., Soliman A.M., Elwakil A.S., Sedeek A. // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. V. 40. P. 2317. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.10.033>
8. Soltan A., Radwan A.G., Soliman A.M. // Circuits, Syst., Signal Process. 2015. V. 34. P. 1461. <https://doi.org/10.1007/s00034-014-9925-z>
9. Freeborn T.J. // Circuits, Syst., Signal Process. 2016. V. 35. P. 1983. <https://doi.org/10.1007/s00034-015-0226-y>
10. Maundy B., Elwakil A.S., Freeborn T.J. // Signal Processing. 2011. V. 91. P. 484. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2010.06.018>
11. Freeborn T., Maundy B., Elwakil A.S. // Mathematical Problems in Engineering. 2015. V. 2015. Article ID 832468. <https://doi.org/10.1155/2015/832468>
12. Kubanek D., Freeborn T.J., Koton J., Dvorak J. // Appl. Sci. 2018. V. 8. P. 2603. <https://doi.org/10.3390/app8122603>
13. Khovanskii A.N. The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory. Groningen: Noordhoff, 1963.
14. Tsirimokou G., Laoudias C., Psychalinos C. // Int. J. Circ. Theor. Appl. 2015. V. 43. P. 1105. <https://doi.org/10.1002/cta.1995>
15. Freeborn T.J., Maundy B., Elwakil A.S. // IET Circuits Devices Syst. 2010. V. 4. № 6. P. 514. <https://doi.org/10.1049/iet-cds.2010.0141L>