

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МОЩНЫХ НАНО- И СУБНАНОСЕКУНДНЫХ  
ВИДЕОИМПУЛЬСОВ В СРЕДЕ С МЕНЯЮЩИМИСЯ  
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ© 2023 г. П. С. Глазунов<sup>a, b</sup>, В. А. Вдовин<sup>b, \*</sup>, А. М. Салецкий<sup>a</sup><sup>a</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Ленинские горы, 1, Москва, 119991 Российская Федерация<sup>b</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 7, стр. 11, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: vdv@cplire.ru

Поступила в редакцию 05.05.2023 г.

После доработки 05.05.2023 г.

Принята к публикации 25.05.2023 г.

Предложена консервативная модель слабопроводящей материальной среды с меняющимися термодинамическими характеристиками в процессе распространения в ней импульса. Получены уравнения, описывающие изменение формы профиля видеоимпульса, распространяющегося в среде, а также в нелинейных линиях передачи с температурной зависимостью диэлектрической проницаемости. Показано, что если температурный коэффициент диэлектрической проницаемости отрицателен, то возможно увеличение пиковой мощности импульса с течением времени, в противном случае температурная зависимость диэлектрической проницаемости приводит к увеличению затухания.

DOI: 10.31857/S0033849423080053, EDN: UWMFWQ

## ВВЕДЕНИЕ

Генераторы наносекундных видеоимпульсов напряжения становятся все более востребованными [1, 2] как для фундаментальных физических исследований (ускорители частиц [3–5]; изучение стримерных разрядов [6]), так и для технических приложений (рентгеноимпульсные аппараты [7, 8]; источники [9] и излучатели [10–13] сверхширокополосных импульсов; генераторы накачки полупроводниковых [14, 15] и газовых лазеров [16, 17]).

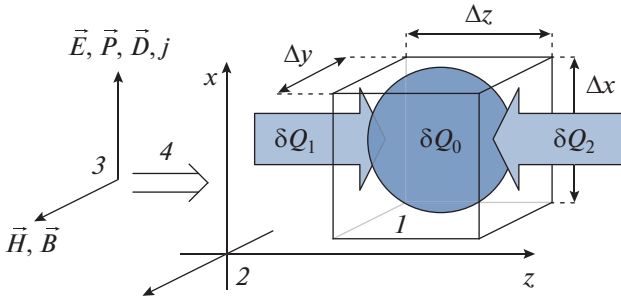
В 60-е годы XX в. была продемонстрирована возможность использования нелинейных линий передачи в конструкциях подобных генераторов для формирования ударных электромагнитных волн [18–20]. Это позволило сократить длительность фронта импульса до одной наносекунды [21]. В современных работах нелинейные линии добавляются в конструкцию высоковольтных генераторов для получения установок с уникальными параметрами генерации [22–30].

Однако теория нелинейных линий, используемая в работах [18–30], ограничивается случаем, в котором электромагнитные волны, проходя через материальную среду, не изменяют ее термодинамического состояния. Это предположение сужает класс нелинейных эффектов, которые можно описать теоретически.

Цель данной статьи – разработать модель, учитывающую изменение термодинамического состояния материальной среды при распространении в ней электромагнитного импульса.

Похожие модели рассматривались ранее в задачах, не связанных с генерацией наносекундных видеоимпульсов. Учет изменения характеристик среды при увеличении температуры проводился в задаче о микроволновой сушке [31, 32]; задаче о распространении лазерного излучения в капиллярных световодах [33], металлических полых волноводах [34, 35], а также ионизирующей диэлектрической среде [36, 37]; задаче об описании взаимодействия лазерного видеоимпульса с поверхностью металла [38, 39].

Отметим, что в каждой из работ [31–39] используется понятие температуры – чисто термодинамической величины. Но несмотря на это в данных работах опускается вопрос о том, являются ли рассматриваемые модели материальных сред термодинамическими (для этого необходима проверка выполнения термодинамических соотношений). В данной статье мы предлагаем модель нелинейной материальной среды, для которой выполняются начала термодинамики. Нелинейные эффекты (искажение формы профиля видеоимпульса при его распространении) в нашей модели возникают из-за сочетания двух факторов: нали-



**Рис. 1.** Схема, поясняющая вывод уравнений: 1 – малый объем среды  $\Delta Q_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$ ; 2 – используемая система координат; 3 – направление векторов электромагнитного поля; 4 – направление распространения импульса.

чия ненулевой проводимости среды и наличия зависимости поляризации среды от температуры.

## 1. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА

Рассмотрим слабо проводящие среды, обладающие постоянной удельной проводимостью  $\sigma = \text{const}$  и относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , зависящей от температуры среды  $T$ . Для упрощения примем, что  $\epsilon$  и  $\sigma$  не зависят от частоты излучения, а явление дифракции слабо проявляется на фоне возникающих нелинейных эффектов, поэтому пучок электромагнитных волн распространяется в одном направлении (вдоль оси  $Oz$ , рис. 1). Пусть справедливы материальные уравнения

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon(T) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ \vec{P} &= \epsilon_0 \chi(T) \vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  – векторы магнитной и электрической индукции;  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  – векторы напряженности электрического и магнитного поля;  $\vec{j}$  – вектор плотности тока электронов проводимости;  $\vec{P}$  – вектор поляризации среды;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\chi(T)$  – относительная диэлектрическая восприимчивость среды, зависящая от температуры.

Пусть  $\vec{E} = E(z, t) \vec{e}_x$ ,  $\vec{H} = H(z, t) \vec{e}_y$  ( $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  – орты, направленные вдоль координатных осей). Тогда из уравнений (1) следует

$$\begin{aligned} \vec{D} &= D(z, t) \vec{e}_x, \quad \vec{B} = B(z, t) \vec{e}_y, \\ \vec{j} &= j(z, t) \vec{e}_x, \quad \vec{P} = P(z, t) \vec{e}_x. \end{aligned}$$

В таком случае уравнения Максвелла принимают вид системы (операция взятия частной производ-

ной по какой-либо переменной  $\xi$  обозначим символом  $\partial_\xi$ ):

$$\begin{aligned} \partial_z E &= -\mu_0 \partial_t H, \\ -\partial_z H &= \epsilon_0 \partial_t E + \partial_t \{ \epsilon_0 \chi(T) E \} + j. \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы система (1), (2) была замкнутой, ее нужно дополнить уравнением для  $T$ . Это уравнение может быть выведено из первого начала термодинамики.

Для применения первого начала необходимо предположить, что при прохождении импульса термодинамическое состояние материальной среды успевает достичь локального термодинамического равновесия. Это предположение верно, если продолжительность видеоимпульса  $\Delta t$  много больше времен релаксационных процессов  $\tau_e$  и  $\tau_p$ , происходящих в среде. Время  $\tau_e$  связано с движением электронов проводимости, а время  $\tau_p$  – со смещением связанных зарядов.  $\tau_e$  можно оценить как среднее время пробега электрона в твердом теле (примерно  $10^{-14}$  с);  $\tau_p$  варьируется в широких пределах в зависимости от типа поляризации диэлектрика. Поскольку мы приняли, что  $\Delta t \sim 10^{-10}$  с, необходимо выполнение неравенства  $\tau_p \ll 10^{-10}$  с. Столь быстрые процессы поляризации возможны в диэлектриках с ионным или атомным типом поляризации, для которых  $\tau_p \sim 10^{-12} \dots 10^{-13}$  с [40]. В таком случае условия  $\Delta t \gg \tau_e$ ,  $\tau_p$  выполняются.

Запишем первое начало термодинамики для единицы объема среды (см. рис. 1):

$$\delta Q = dU + dA,$$

где  $\delta Q$  – количество тепла, поглощаемое единицей объема среды;  $U$  – сумма внутренней энергии среды  $U'$  и энергии электромагнитного поля  $U'' = (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)/2$  в единице объема среды;  $dA = -EdD - HdB$  – работа, совершаемая единицей объема среды. Используя эти формулы, первое начало термодинамики можно записать относительно  $U'$ :

$$\delta Q = dU' - EdP. \quad (3)$$

Согласно стандартной процедуре расчета [41] для определения  $U'$  необходимо решить систему уравнений в частных производных при заданных  $C_p(P, T)$  и  $E(P, T)$ :

$$\partial_T U'(P, T) = C_p(P, T), \quad (4)$$

$$\partial_P U'(P, T) = E(P, T) - T \partial_T E(P, T). \quad (5)$$

Здесь  $C_p(P, T)$  – удельная (на единицу объема) теплоемкость материальной среды при постоянной поляризации. С учетом того, что  $E(P, T) = P/(\epsilon_0 \chi(T))$ , проинтегрировав уравнение (5), получим

$$U'(P, T) = f(T) + P^2 \{ \chi^{-1}(T) - T \partial_T \chi^{-1}(T) \} / (2\epsilon_0), \quad (6)$$

где  $f(T)$  – некоторая функция температуры. Подставляя (6) в (4), найдем, что

$$C_p(P, T) = C_0(T) + C_1(P, T), \quad C_0(T) = \partial_T f(T), \quad (7)$$

$$C_1(P, T) = -P^2 T \partial_{TT} \chi^{-1}(T) / (2\epsilon_0).$$

Поскольку  $C_1 = 0$  при  $\chi = \text{const}$ , очевидно, что  $C_1$  является составляющей теплоемкости, возникающей из-за температурной зависимости  $\chi(T)$ . Параметр же  $C_0$ , как видно из формулы (7), может зависеть только от температуры, поэтому  $C_0$  является составляющей теплоемкости, связанной с тепловыми колебаниями атомов кристаллической решетки:  $C_0 = c\rho$ , где  $c$  – удельная на единицу массы теплоемкость,  $\rho$  – плотность материальной среды. Пусть  $c, \rho = \text{const}$ . В таком случае с точностью до постоянного слагаемого

$$U'(P, T) = c\rho T + P^2 \{ \chi^{-1}(T) - T \partial_T \chi^{-1}(T) \} / (2\epsilon_0). \quad (8)$$

Существование решения системы уравнений (4), (5) гарантирует, что для исследуемой модели материальной среды локально выполняется второе начало термодинамики [41] (возможно введение энтропии как непрерывной и дважды дифференцируемой функции аргументов  $P, T$ ). Выполнение третьего начала (стремление энтропии системы к нулю при  $T \rightarrow 0$ ) возможно достичь при учете температурной зависимости  $C_0(T)$ .

Далее, найдем  $\delta Q$ . Для этого рассмотрим малый объем среды  $\Delta^0 U = \Delta x \Delta y \Delta z$  (см. рис. 1). В этом объеме за счет джоулева нагрева за время  $\Delta t$  выделится тепло  $\delta Q_0 = Ej \Delta^0 U \Delta t$ . Помимо этого через границы объема  $\Delta^0 U$  будет происходить теплообмен с окружающей его средой. Поскольку мы предполагаем, что физические величины не зависят от координат  $x$  и  $y$ , тепловой поток будет направлен вдоль оси  $Oz$ . Согласно закону Фурье (см. выбранные направления тепловых потоков на рис. 1) через левую стенку  $\Delta^0 U$  за время  $\Delta t$  проходит количество тепла, равное

$$\delta Q_1 = -\kappa \partial_z T(z) \Delta x \Delta y \Delta t,$$

а через правую

$$\delta Q_2 = \kappa \partial_z T(z + \Delta z) \Delta x \Delta y \Delta t.$$

Здесь  $\kappa = \text{const}$  – коэффициент теплопроводности. Тогда

$$\delta Q = (\delta Q_2 + \delta Q_1 + \delta Q_0) / \Delta^0 U.$$

При  $\Delta^0 U, \Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\delta Q / dt = Ej + \kappa \partial_{zz} T. \quad (9)$$

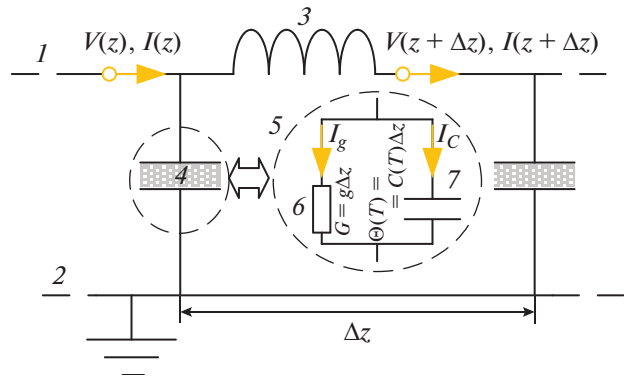


Рис. 2. Схема нелинейной длинной линии: прямой 1 и обратный 2 провода линии; распределенная индуктивность 3; распределенная емкость 4 с наполнителем из нелинейной материальной среды; 5 – эквивалентная схема емкости 4, представляющая собой параллельно соединенные резистор 6 и вакуумный конденсатор 7;  $V, I$  – напряжение и ток в длинной линии;  $I_g$  – ток утечки,  $I_C$  – емкостной ток.

Разделим (3) на  $dt$ . Подставим (9) в (3). Учтем (8), а также то, что  $d\chi/dt = \partial_T \chi \times \partial_t T$ . В получившемся выражении сгруппируем слагаемые с  $\partial_t T$ , получим

$$\partial_t T = \frac{jE + \kappa \partial_{zz} T - T \partial_T \chi \partial_t (\epsilon_0 E^2 / 2)}{c\rho + (\epsilon_0 E^2 / 2) T \partial_{TT} \chi}. \quad (10)$$

Система уравнений (1), (2), (10) является искомой системой, замкнутой относительно  $E(z, t), T(z, t), H(z, t)$ . Для нее справедлив закон сохранения энергии. Используя формулы (3) и (9), нетрудно показать, что

$$E \partial_t P + Ej \equiv \partial_t U' - \kappa \partial_{zz} T.$$

Используя теорему Пойнтинга

$$\partial_z (EH) + \partial_t (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) / 2 = -E \partial_t P - Ej,$$

придем к равенству

$$\partial_z (EH - \kappa T) + \partial_t (\epsilon_0 E^2 / 2 + \mu_0 H^2 / 2 + U') = 0.$$

Интегрируя это равенство по переменной  $z$ , получим закон сохранения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\epsilon_0 E^2 / 2 + \mu_0 H^2 / 2 + U') dz \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} U dz = \text{const}. \quad (11)$$

Приведем вывод аналогичных уравнений для длинной линии (рис. 2). Пусть распределенная емкость представляет собой конденсатор, заполненный проводящим диэлектриком, поляризуемость которого зависит от температуры. В таком случае этот конденсатор можно представить в виде параллельно соединенных резистора с прово-

димостью  $G = g\Delta z$  и вакуумного конденсатора с емкостью  $\Theta(T) = C(T)\Delta z$ , здесь  $g, C$  – соответственно значения погонной проводимости (за счет которой появляется ток утечки  $I_g$ ) и погонной емкости длинной линии.

Записывая законы Кирхгофа для цепи, изображенной на рис. 2, и устремляя  $\Delta z$  к нулю, получим

$$\partial_z V(z, t) = -L\partial_t I(z, t), \quad (12)$$

$$\partial_z I(z, t) = -\partial_t \{C(T)V(z, t)\} - gV(z, t), \quad (13)$$

где  $V(z, t), I(z, t)$  – значения напряжения и тока в длинной линии, а  $L$  – погонная индуктивность. Видно, что с помощью замен  $V \rightarrow E, I \rightarrow H, L \rightarrow \mu_0, C(T) \rightarrow \epsilon_0 \epsilon(T) = \epsilon_0(1 + \chi(T)), g \rightarrow \sigma$  перейдем к системе уравнений Максвелла (2). Аналогичные замены следует сделать при использовании первого начала термодинамики:

$$HdB = Hd(\mu_0 H) \rightarrow Id(LI),$$

$$EdD = Ed(\epsilon_0 \epsilon(T)E) \rightarrow Vd(C(T)V).$$

Нас интересует изменение термодинамического состояния проводящего диэлектрика, поэтому первое начало термодинамики запишем для единицы его длины:

$$\delta Q = dU + dA = dU - Vd(C(T)V) - Id(LI),$$

где  $\delta Q$  и  $dU$  – погонное количество тепла и погонная внутренняя энергия диэлектрика. По аналогии с предыдущим случаем распишем  $U$  в виде суммы погонной внутренней энергии среды  $U'$  и погонной энергии электромагнитного поля  $U''$ . Погонная емкость  $C$  совпадает по размерности с  $\epsilon_0$ , поэтому должна быть справедлива формула  $C = \epsilon_0 \epsilon(T)\psi$ , где  $\psi$  – некоторый безразмерный коэффициент. Тогда  $C = \epsilon_0 \psi + \epsilon_0 \chi(T)\psi$  и, проводя аналогию с предыдущим случаем, мы введем  $U'' = (\epsilon_0 \psi V^2 + L I^2)/2$ . Замены  $\epsilon_0 \psi \rightarrow \epsilon_0, V \rightarrow E, I \rightarrow H, L \rightarrow \mu_0$  переводят это выражение в формулу для плотности энергии электромагнитного поля в вакууме.

Далее запишем первое начало термодинамики относительно  $U'$ :

$$\delta Q = dU' - Vd\wp, \quad \wp = \epsilon_0 \psi \chi(T)V. \quad (14)$$

Здесь символ  $\wp$  введен исключительно для проведения аналогии: заменами  $\wp \rightarrow P, \epsilon_0 \psi \rightarrow \epsilon_0, V \rightarrow E$  уравнения (14) сводятся к уравнению (3) и второму из уравнений (1). Решая систему уравнений в частных производных, аналогичную (4), (5), получим

$$U'(\wp, T) = \zeta T + \wp^2 \{\chi^{-1}(T) - T\partial_T \chi^{-1}(T)\} / (2\epsilon_0 \psi), \quad (15)$$

где  $\zeta$  – погонная теплоемкость проводящего диэлектрика.

Для нахождения погонного тепла  $\delta Q$  рассмотрим объем проводящего диэлектрика  $\Delta^3 U = S\Delta z$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения диэлектрика в длинной линии. Тогда за время  $\Delta t$  в диэлек-

трике длиной  $\Delta z$  за счет тока утечки выделится тепло  $\delta Q_0 = gU^2 \Delta z \Delta t$ , а через левую и правую стенки  $\Delta^3 U$  пройдут количества тепла  $\delta Q_1 = -\kappa S \partial_z T(z) \Delta t$  и  $\delta Q_2 = \kappa S \partial_z T(z + \Delta z) \Delta t$  соответственно. Тогда

$$\delta Q = (\delta Q_2 + \delta Q_1 + \delta Q_0) / \Delta z.$$

При  $\Delta z, \Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\delta Q / dt = gU^2 + \kappa S \partial_{zz} T. \quad (16)$$

В итоге приходим к следующему уравнению для температуры:

$$\partial_t T = \frac{gV^2 + S\kappa \partial_{zz} T - T\partial_T \chi \partial_t (\epsilon_0 \psi V^2 / 2)}{\zeta + (\epsilon_0 \psi V^2 / 2) T \partial_{TT} \chi}. \quad (17)$$

Заменами  $\kappa S \rightarrow \kappa, g \rightarrow \sigma, \epsilon_0 \psi \rightarrow \epsilon_0, V \rightarrow E, \zeta \rightarrow c$  данное уравнение сводится к уравнению (10).

## 2. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ

Сделаем еще ряд упрощений.

Во-первых, решение системы (1), (2), (10) будем искать при заданных начальных условиях. Предполагается, что сам импульс генерируется в линейной среде, а затем, преодолевая границу раздела, к моменту времени  $t_0$  (который мы примем за начальный) оказывается полностью локализован в нелинейной среде. Пусть температура материальной среды при  $t = t_0$  постоянна и равна  $T_0$ . Также предположим, что к моменту времени  $t_0$  нелинейные эффекты не успевают существенно повлиять на динамику распространения импульса. Поэтому импульс, распространяющийся в нелинейной среде, при  $t \leq t_0$  можно представить в виде плоской электромагнитной волны, бегущей вдоль оси  $Oz$  с постоянной фазовой скоростью  $v_0 = \{\epsilon(T_0)\mu_0\}^{-1/2}$ :

$$E(z, t) = E_0 f(z/L - v_0(t - t_0)/L),$$

$$H(z, t) = H_0 f(z/L - v_0(t - t_0)/L).$$

Здесь  $E_0, H_0$  – амплитуды электромагнитных полей начального импульса;  $L$  – некоторая константа;  $f$  – функция, которая задает форму профиля начального импульса.

Будем считать, что  $f(\xi) \neq 0$  только при  $|\xi| \leq 1/2$ , а  $\max|f| = 1$ . В качестве такой функции для определенности выберем

$$f(\xi) = \begin{cases} \{1 + \cos(2\pi\xi)\}/2, & |\xi| < 1/2, \\ 0, & |\xi| \geq 1/2. \end{cases} \quad (18)$$

В таком случае константа  $L$  представляет собой длину начального импульса в среде, а продолжительность начального импульса в среде  $\Delta t = L/v_0$ . Подставляя в первое уравнение системы (2) решения  $E(z, t), H(z, t)$ , имеющие вид бегущих волн,

получим  $H_0 = E_0/(\mu_0 v_0)$ . Пусть для определенности  $t_0 = 0$ , тогда начальные условия примут вид

$$\begin{aligned} E(z, 0) &= E_0 f(z/L), \\ H(z, 0) &= \{E_0/(\mu_0 v_0)\} f(z/L), \quad T(z, 0) = T_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Во-вторых, пусть зависимость  $\chi = \chi(T)$  имеет линейный вид

$$\chi(T) = \chi_0 \{1 + \gamma(T - T_0)\}, \quad (20)$$

где  $\gamma$  – некоторый коэффициент пропорциональности,  $\chi_0 = \text{const}$  – относительная диэлектрическая восприимчивость среды при  $T = T_0$ .

В-третьих, будем предполагать, что  $\kappa \partial_{zz} T \ll \text{ср} \partial_t T$ . Это условие можно сформулировать в виде условия малости безразмерного параметра  $s = \kappa \Delta t / (\text{ср} L^2)$ . Действительно, пусть после прохождения импульса температура среды увеличивается на  $\Delta T$ . Очевидно, этот процесс нагрева будет занимать характерное время  $\Delta t$ , а распределение температуры в пространстве будет характеризоваться масштабом длины  $L$ . Поэтому  $\kappa \partial_{zz} T \approx \kappa \Delta T / L^2$ ,  $\text{ср} \partial_t T \approx \text{ср} \Delta T / \Delta t$ . Следовательно,  $\kappa \partial_{zz} T \ll \text{ср} \partial_t T$  при  $s \ll 1$ . Для оценки  $s$  возьмем характерные для твердых тел значения  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 10^3 \text{ Дж/(кг К)}$ ,  $\kappa = 10^3 \text{ Вт/(м К)}$ . Пусть  $\Delta t = 1 \text{ нс}$ , тогда  $s \approx (1 + \chi) \times 10^{-11}$ .

При зависимости (20) и условии  $s \ll 1$  уравнение (10) примет вид

$$\text{ср} \partial_t T = jE - \gamma \chi_0 T \partial_t (\epsilon_0 E^2 / 2). \quad (21)$$

Далее введем безразмерные величины:  $\tau = t/\Delta t$ ;  $\xi = z/L$ ;  $\mathcal{E}(\xi, \tau) = E/E_0$ ,  $\mathcal{H}(\xi, \tau) = H/H_0$ ;  $\theta(\xi, \tau) = T/\Delta T$ ,  $\theta_0 = T_0/\Delta T$ . Здесь  $\Delta T = (E_0)^2 \sigma \Delta t / (\text{ср})$  – характерное увеличение температуры среды после прохождения импульса (эта оценка  $\Delta T$  выполнена для линейного случая, в котором  $\epsilon = \text{const}$  и  $\text{ср} \partial_t T = \sigma E^2$ ). В случае длинной линии  $\mathcal{E}(\xi, \tau) = V/V_0$ ,

$\mathcal{H}(\xi, \tau) = I/I_0$ ,  $\Delta T = (V_0)^2 g \Delta t / \zeta$ . Тогда, подставляя равенство  $\partial_t P = \partial_t (\chi(T) E) = \chi(T) \partial_t E + E \partial_t \chi \partial_t T$  в (2), а затем с помощью (21) исключая из (2)  $\partial_t T$ , сведем уравнения (1), (2), (21) к системе

$$\partial_\xi \mathcal{E} + \partial_\tau \mathcal{H} = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathcal{H} + \{1 + \beta(\theta - \theta_0) - \alpha \beta \theta \mathcal{E}^2\} \partial_\tau \mathcal{E} = \\ = -(\beta/\alpha) \mathcal{E} (1 + \alpha \mathcal{E}^2), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\partial_\tau \theta = \mathcal{E}^2 - \alpha \theta \partial_\tau (\mathcal{E}^2 / 2), \quad (24)$$

$$\mathcal{E}(\xi, 0) = \mathcal{H}(\xi, 0) = f(\xi), \quad \theta(\xi, 0) = \theta_0. \quad (25)$$

Здесь введены два безразмерных постоянных коэффициента:  $\alpha = \gamma \epsilon_0 \chi_0 (E_0)^2 / (\text{ср})$ ,  $\beta = \alpha \sigma \Delta t / (\epsilon_0 (1 + \chi_0)) = \sigma \Delta t (E_0)^2 \gamma \chi_0 / (\text{ср} (1 + \chi_0))$ . В случае длинной линии  $\alpha = \partial_t C (U_0)^2 / \zeta$ ,  $\beta = \alpha g \Delta t / C (T_0)$ .

Используя метод Хохлова, систему (22), (23) можно свести к одному уравнению. Исключая из (23)  $\mathcal{H}$ , приходим к уравнению  $\partial_{\xi\xi} \mathcal{E} - \partial_{\tau\tau} \mathcal{E} = \partial_\tau F$ , где  $F = [\beta(\theta - \theta_0) - \alpha \beta \theta \mathcal{E}^2] \partial_\tau \mathcal{E} + \beta \mathcal{E} (1 + \alpha \mathcal{E}^2) / \alpha$ . Согласно методу Хохлова [42], редуцированное уравнение имеет вид  $\partial_\xi \mathcal{E} + \partial_\tau \mathcal{E} = -F/2$ . Далее, сделав замену  $W = \mathcal{E}^2 / 2$ , приходим к системе

$$\begin{aligned} \partial_\xi W + \{1 + \beta(\theta - \theta_0)/2 - \\ - \alpha \beta W \theta\} \partial_\tau W = -\beta W (1 + 2\alpha W) / \alpha, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\partial_\tau \theta = 2W - \alpha \theta \partial_\tau W, \quad (27)$$

$$W(\xi, 0) = f^2(\xi) / 2, \quad \theta(\xi, 0) = \theta_0. \quad (28)$$

Для системы (26), (27) справедлив некоторый аналог закона сохранения энергии (11). Если скомбинировать уравнения (26) и (27), можно показать справедливость равенства  $\partial_\xi W + \partial_\tau \{W[1 + \beta(\theta - \theta_0)/2] + \beta W \theta / 2 + \beta \theta / (2\alpha)\} = 0$ . Интегрируя это равенство по переменной  $\xi$ , получим закон сохранения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{W[1 + \beta(\theta - \theta_0)/2] + \beta W \theta / 2 + \beta(\theta - \theta_0) / (2\alpha)\} d\xi = \text{const}.$$

Уравнение (26) является уравнением переноса, поэтому  $u = v(T)/v_0 = \{1 + \beta(\theta - \theta_0)/2 - \alpha \beta W \theta\}^{-1}$  есть безразмерная фазовая скорость распространения импульса. Так как  $u = u(W, \theta)$ , то решение системы (26), (27) в общем случае возможно получить только с помощью специальных численных методов, пригодных для описания ударных волн. Реализация этих методов является отдельной задачей и будет рассмотрена нами позднее. В данной же статье ограничимся приближением  $u = 1$ ,  $\theta_0 = T_0/\Delta T \ll 1$ , в котором возможно получить аналитическое решение.

Покажем, что приближение  $u = 1$  эквивалентно условию  $0.5 \tau^* |\beta| (|\alpha| + 1) \exp(|\alpha|/2) \ll 1$ , где  $\tau^*$  – время (в относительных единицах), в течение которого распространяется видеоимпульс. Отметим для начала, что решение уравнения (27) можно получить в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \theta(\xi, \tau) &= \theta_0 \exp\{-\alpha[W(\xi, \tau) - W(\xi, 0)]\} + \\ &+ 2 \exp\{-\alpha W(\xi, \tau)\} \int_0^\tau W(\xi, \tau') \exp\{\alpha W(\xi, \tau')\} d\tau'. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (18) следует, что  $\max|W(\xi, 0)| = 1/2$ . Если считать, что  $\max|W(\xi, \tau)| \approx \max|W(\xi, 0)|$ , то  $|2 \exp\{-\alpha W(\xi,$

$\tau\} \int W(\xi, \tau') \exp\{\alpha W(\xi, \tau')\} d\tau' \leq \exp(|\alpha|/2)$  и  $|\exp\{-\alpha[W(\xi, \tau) - W(\xi, 0)]\}| \leq \exp(|\alpha|/2)$ . В таком случае, используя формулу (29), можно выполнить следующие оценки:

$$|\theta - \theta_0| \leq \theta_0(\exp(|\alpha|/2) + 1) + \exp(|\alpha|/2),$$

$$|\theta| \leq \{\theta_0 + 1\} \exp(|\alpha|/2).$$

Пусть  $\beta \ll 1$ , тогда  $u \approx 1 - \beta(\theta - \theta_0)/2 + \alpha\beta W\theta$ , следовательно,

$$|u - 1| \leq 0.5|\beta||\theta - \theta_0| +$$

$$+ |\alpha\beta| \max|W| \max|\theta| \leq 0.5|\beta|\{\theta_0[|\alpha| + 1] \times$$

$$\times \exp(|\alpha|/2 + 1) + (|\alpha| + 1)\exp(|\alpha|/2)\}.$$

При  $\theta_0 \ll 1$  в таком случае  $|u - 1| \leq 0.5|\beta|(|\alpha| + 1)\exp(|\alpha|/2)$ . Зависимость  $u = u(W, \theta)$  приводит к тому, что разные точки профиля импульса движутся с разными скоростями. Однако если относительное смещение этих точек  $\Delta\xi$  за время наблюдения  $\tau^*$  мало по сравнению с линейными размерами самого импульса (линейные размеры импульса в относительных единицах  $\xi$  равны 1), то этим смещением, а значит, и зависимостью  $u = u(W, \theta)$  можно пренебречь. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$\Delta\xi = 0.5\tau^*|\beta|(|\alpha| + 1)\exp(|\alpha|/2) \ll 1.$$

Итак, рассматриваемое приближение можно сформулировать в виде двух неравенств:  $0.5\tau^*|\beta|(|\alpha| + 1)\exp(|\alpha|/2) \ll 1$  и  $\theta_0 \ll 1$ . В этом приближении система (26), (27) сводится всего к одному уравнению для  $W$ :

$$\partial_\xi W + \partial_\tau W = -(\beta/\alpha)W(1 + 2\alpha W). \quad (30)$$

Сделаем замену переменной  $\zeta = \xi - \tau$  и перейдем к движущейся со скоростью  $u = 1$  системе координат, получим

$$\partial_\tau W(\zeta, \tau) = -(\beta/\alpha)W(1 + 2\alpha W). \quad (31)$$

Уравнение (31) можно рассматривать как дифференциальное (относительно переменной  $\tau$ ) уравнение. Проинтегрировав его, получим

$$W(\zeta, \tau) = \frac{W(\zeta, 0) \exp(-\beta\tau/\alpha)}{1 + 2\alpha W(\zeta, 0)\{1 - \exp(-\beta\tau/\alpha)\}}. \quad (32)$$

Отметим, что в отсутствие нелинейности  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ , но  $\alpha/\beta \rightarrow \text{const} = \sigma\Delta t/(\epsilon_0(1 + \chi_0))$ , а для длинной линии  $\alpha/\beta \rightarrow g\Delta t/C(T_0)$ . При этом уравнение (31) становится линейным и его решение принимает вид затухающей бегущей волны (для линейного случая мы вводим обозначение  $W'$ ):

$$W'(\zeta, \tau) = W(\zeta, 0) \exp(-\tau\beta/\alpha). \quad (33)$$

Отношение  $W'/W = 1 + 2\alpha W(\zeta, 0)\{1 - \exp(-\tau\beta/\alpha)\}$  описывает искажения формы профиля импульса, вызванные непосредственно нелинейными эф-

фектами. Будем считать, что  $\chi_0 > 0$ , поэтому  $\beta/\alpha > 0$ . Рассмотрим три случая.

Во-первых, случай  $\alpha > 0$ . Поскольку  $W'(\zeta, \tau)/W(\zeta, \tau) > 1$  при  $\tau > 0$ , то в таком случае нелинейные эффекты приводят к увеличению затухания импульса.

Во-вторых, случай  $-1 < \alpha < 0$ . Используя метод фазовой плоскости для (31) и учитывая, что  $\max W(\zeta, 0) = 0.5$ , можно показать, что  $\partial_\tau W(\zeta, \tau) < 0$  при любых  $\tau$  и  $\zeta$ . Значит,  $W(\zeta, \tau)$  монотонно уменьшается с ростом  $\tau$ , однако теперь  $0 < W'(\zeta, \tau)/W(\zeta, \tau) < 1$ . Это означает, что уменьшение амплитуды в нелинейном случае происходит медленнее, чем в линейном.

В-третьих, случай  $\alpha < -1$ . Используя метод фазовой плоскости, можно показать, что  $\partial_\tau W(\zeta, \tau) < 0$  для точек  $\zeta$ , удовлетворяющих неравенству  $1 + 2\alpha W(\zeta, 0) > 0$ , и  $\partial_\tau W(\zeta, \tau) > 0$  для точек  $\zeta$ , удовлетворяющих неравенству  $1 + 2\alpha W(\zeta, 0) < 0$ . При этом снова  $0 < W'/W < 1$ . Таким образом, в области, где  $1 + 2\alpha W(\zeta, 0) > 0$ , нелинейные эффекты приводят к уменьшению затухания. В области, где  $1 + 2\alpha W(\zeta, 0) < 0$ , происходит рост  $W(\zeta, \tau)$  с течением времени. Причем, как следует из (32),  $W(\zeta, \tau) \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow (\alpha/\beta)\ln\{2\alpha W(\zeta, 0)/[1 + 2\alpha W(\zeta, 0)]\}$ . В действительности рост  $W$  будет ограничиваться нелинейными эффектами, связанными с формированием ударной волны из-за зависимости  $u = u(W, \theta)$ . Но увеличение  $\max W$  на несколько процентов можно наблюдать даже в приближении  $0.5\tau^*|\beta|(|\alpha| + 1)\exp(|\alpha|/2) \ll 1, \theta_0 \ll 1$ .

### 3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В качестве примера проведем расчет распространения электромагнитного видеопульса в коаксиальном кабеле. Цель данного примера — провести оценку параметров  $\alpha, \beta$  и показать, что описанные выше нелинейные эффекты могут проявляться на современных установках.

Пусть кабель состоит из центральной жилы, которую окружает слой изолятора, а затем слой металла (экранирующий слой). Обычно изолятором в СВЧ-кабелях служит политетрафторэтилен (ПТФЭ). Данный материал является неполярным полимером, в котором сочетаются два типа поляризации: атомная и электронная. По этой причине продолжительность релаксационных процессов, связанных с поляризацией, в ПТФЭ составляет примерно  $10^{-12}$  с [43], поэтому условия  $\Delta t \gg \tau_e, \tau_p$  выполняются. Примем радиус центральной жилы  $r = 0.5$  мм, а радиус окружающего ее изолятора  $R = 1.5$  мм (такие значения соответствуют техническим характеристикам коммерческих кабелей, см. лист технических характеристик в сети Интернет: DATA SHEET Coaxial Cable: MULTIFLEX\_141). Погонную теплоемкость диэлектрика  $\zeta$  рассчита-

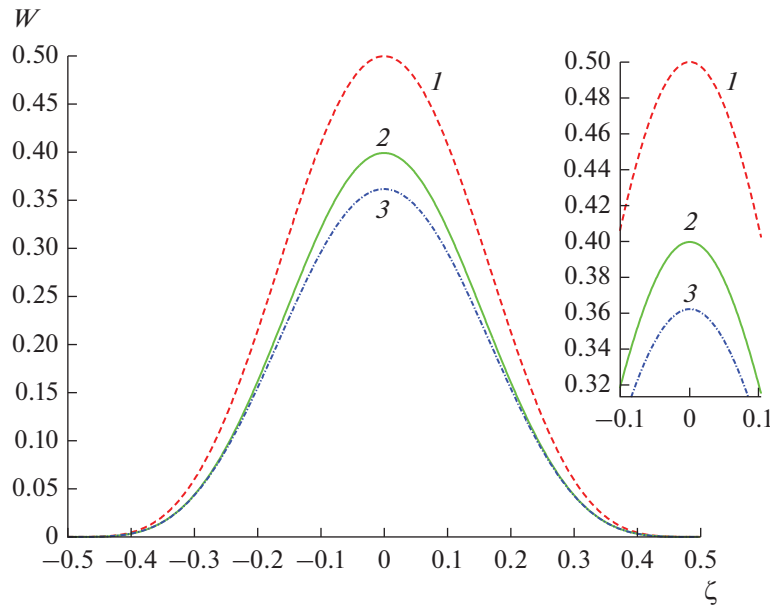


Рис. 3. Формы профиля импульса при  $\tau = 1000$  для  $\alpha = -0.34$ ,  $\beta = -1.1 \times 10^{-4}$ :  $W(\zeta, 0)$  (кривая 1),  $W(\zeta, \tau)$  (кривая 2) и  $W'(\zeta, \tau)$  (кривая 3), на вставке – участки этих кривых в области максимума в увеличенном масштабе.

ем по формуле  $\zeta = c\rho\pi(R^2 - r^2)$ , где  $c$  – удельная (на единицу массы) теплоемкость диэлектрика,  $\rho$  – плотность диэлектрика (для ПТФЭ  $c = 1000$  Дж/(кг К),  $\rho = 2150$  кг/м<sup>3</sup>). Такие расчеты  $\zeta$  дают значение 13.5 Дж/(м К).

Для расчета погонной емкости и индуктивности воспользуемся формулами статики [44, 45]:  $C(T) = \epsilon_0\epsilon(T)\psi$ ,  $\psi = 2\pi/\ln(R/r)$ ,  $L = \mu_0\ln(R/r)/(2\pi)$ . В таком случае  $\partial_T C(T) = \tau_\epsilon\epsilon_0\epsilon(T_0)\psi$ , где  $\tau_\epsilon = \partial_T\epsilon(T)/\epsilon(T_0)$  – так называемый температурный коэффициент диэлектрической проницаемости. Для ПТФЭ [46]  $\tau_\epsilon = -4.6 \times 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>,  $\epsilon(T_0 = 20^\circ\text{C}) = 2.08$ . Из расчетов следует:  $C(T_0) = 100$  пкФ/м,  $L = 219$  нГн,  $\partial_T C(T) = -4.6 \times 10^{-14}$  Ф/(м К). Следовательно, волновое сопротивление линии равно  $Z = (L/C)^{1/2} = 46.8$  Ом, а фазовая скорость  $v_0 = (LC)^{-1/2} = 2.1 \times 10^8$  м/с.

Для нахождения погонной проводимости  $g$  проинтегрируем уравнение  $\text{div}(\epsilon_0\epsilon\vec{E}) = \rho$  по цилиндрическому объему коаксиального кабеля. Используя теорему Остроградского–Гаусса, получим

$$|\vec{E}(R)| = \rho_l / (2\pi R\epsilon_0\epsilon),$$

где  $\rho_l = CU$  – линейная плотность заряда центральной жилы, поэтому  $|\vec{E}(R)| = U(R)/\ln(R/r)$ . Погонный ток утечки  $I_g$  можно представить в виде  $I_g = gU = 2\pi Rj = 2\pi RE\sigma$ . Подставляя в последнюю формулу  $|\vec{E}(R)|$ , получим  $g = 2\pi\sigma/\ln(R/r) = \psi\sigma$ .

Поскольку ПТФЭ является диэлектриком и в данном материале нет электронов проводимости, здесь под  $\sigma$  подразумевается некоторая эффектив-

ная проводимость, обусловленная диэлектрическими потерями (для ПТФЭ  $\text{Im}(\epsilon)/\text{Re}(\epsilon) = 3 \times 10^{-4}$  [46]). В случае проводящего диэлектрика проводимость может быть включена в мнимую часть комплексной относительной диэлектрической проницаемости в виде слагаемого  $\text{Im}(\epsilon) + \sigma/(\epsilon_0\omega)$  [47]. Поэтому для оценки  $\sigma$  примем, что  $\sigma/(\epsilon_0\omega) \approx \sigma\Delta t/\epsilon_0 \approx \text{Im}(\epsilon)$ . Для продолжительности видеоимпульса  $\Delta t = 0.1$  нс такая оценка дает значения  $\sigma = 5.5 \times 10^{-5}$  См/м и  $g = 3.2 \times 10^{-4}$  См/м. Пусть  $V_0 = 10$  МВ. Это соответствует пиковой мощности видеоимпульса  $P = V^2/Z = 2.1$  ТВт. Отметим, что рекордные пиковые мощности, достигаемые на современных генераторах видеоимпульсов нано- и субнаносекундной длительности, составляют до 100 ТВт [1, 48]. В таком случае  $\alpha = \partial_T C(V_0)^2/\zeta = -0.34$ ,  $\beta = \alpha g\Delta t/C(T_0) = -1.1 \times 10^{-4}$ . При предельном переходе к линейному случаю (когда  $\sigma \neq 0$ , но  $\epsilon$  не зависит от  $T$ )  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta/\alpha \rightarrow g\Delta t/C(T_0) = 3.2 \times 10^{-4}$ . Подставляя результаты расчетов в формулу  $0.5\tau^*|\beta|(|\alpha| + 1)\exp(-|\alpha|/2) \ll 1$ , получим условие  $\tau^* \ll 1.1 \times 10^4$ . Поскольку мы работаем в безразмерных единицах и в выбранном приближении  $u = 1$ , за время  $\tau = N$  импульс успевает пройти  $N$  собственных длин  $L$ , т.е. расстояние, равное  $l = NL = Nv_0\Delta t = 2.1N \times 10^{-2}$  м. Для  $\tau = 1000$ , например,  $l = 21$  м.

На каждом графике мы будем строить три кривые, которые соответствуют: первоначальной форме импульса  $W(\zeta, 0)$ , решению (32)  $W(\zeta, \tau)$  и решению (33)  $W'(\zeta, \tau)$ .

На рис. 3 изображены подобные графики при  $\tau = 1000$  для  $\alpha = -0.34$ ,  $\beta = -1.1 \times 10^{-4}$ . Видно, что

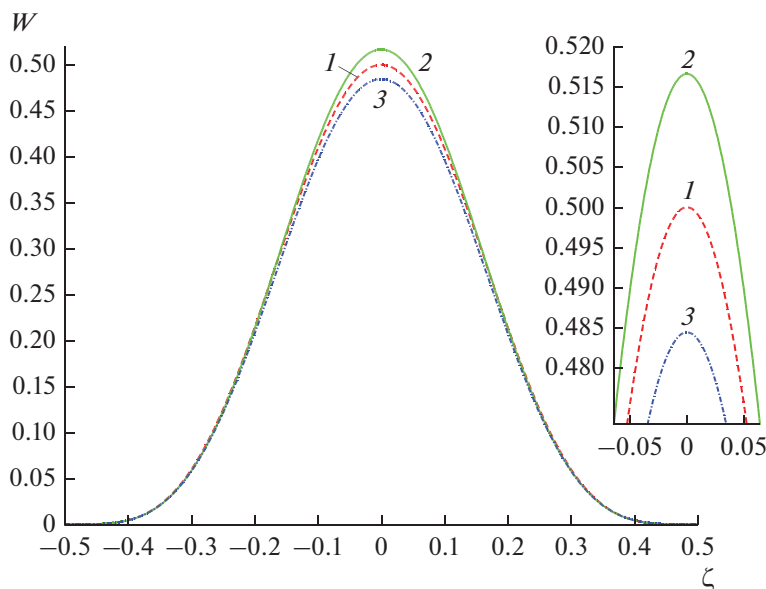


Рис. 4. Формы профиля импульса при  $\tau = 100$  для  $\alpha = -2.01$ ,  $\beta = -6.44 \times 10^{-4}$ :  $W(\zeta, 0)$  (кривая 1),  $W(\zeta, \tau)$  (кривая 2) и  $W'(\zeta, \tau)$  (кривая 3), на вставке – участки этих кривых в области максимума в увеличенном масштабе.

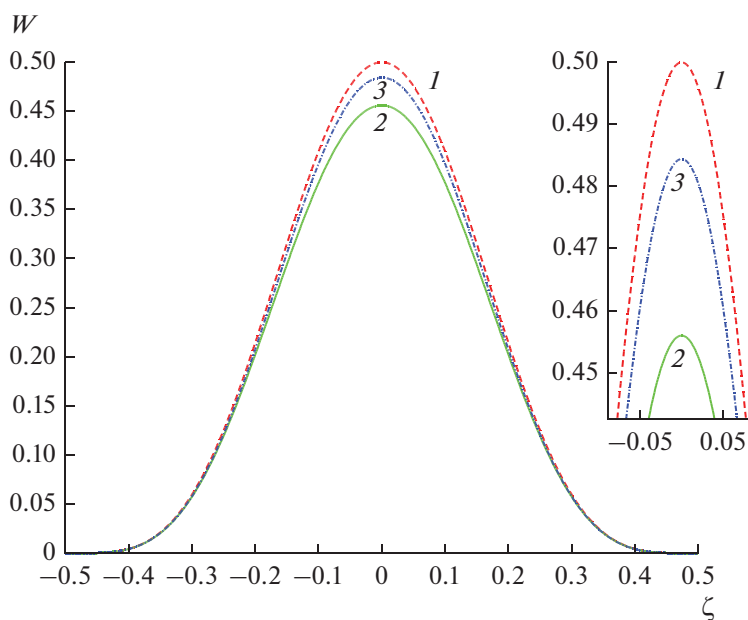


Рис. 5. Формы профиля импульса при  $\tau = 100$  для  $\alpha = 2.01$ ,  $\beta = 6.44 \times 10^{-4}$ :  $W(\zeta, 0)$  (кривая 1),  $W(\zeta, \tau)$  (кривая 2) и  $W'(\zeta, \tau)$  (кривая 3), на вставке – участки этих кривых в области максимума в увеличенном масштабе.

затухание в линейном случае действительно происходит быстрее, чем в нелинейном. К моменту времени  $\tau = 1000$  в линейном случае происходит уменьшение максимального значения  $W$  до значения 0.36 (уменьшение пиковой мощности на 28%), а в нелинейном случае до значения 0.4 (уменьшение пиковой мощности на 20%).

Проведем аналогичные расчеты для  $V_0 = 24.3$  МВ. При таком значении  $V_0$  расчеты дают  $\alpha = -2.01$ ,  $\beta = -6.44 \times 10^{-4}$ ,  $\tau^* \leq 388$ . Графики для этого случая при  $\tau = 100$  приведены на рис. 4. К моменту

времени  $\tau = 100$  в нелинейном случае максимальное значение  $W$  увеличивается до 0.517 (пиковая мощность увеличивается на 3.4%), в линейном случае максимальное значение  $W$  уменьшается до 0.484 (пиковая мощность уменьшается на 3.2%).

В качестве заключительно примера проведем расчеты для  $\alpha = 2.01$ ,  $\beta = 6.44 \times 10^{-4}$  (случай положительного температурного коэффициента диэлектрической проницаемости). На рис. 5 построены соответствующие графики также для момента времени  $\tau = 100$ . Видно, что теперь затухание происхо-



дит быстрее в нелинейном случае, чем в линейном: в нелинейном случае к моменту времени  $\tau = 100$  максимальное значение  $W$  уменьшается до значения 0.456 (пиковая мощность уменьшается на 8.8%).

Мы намеренно провели расчеты для ПТФЭ, поскольку данный диэлектрический материал широко используется в СВЧ-технике в качестве изолятора. Однако для экспериментального изучения нелинейных эффектов, изложенных в статье, лучше подходят материалы с более значительной, чем у ПТФЭ, зависимостью диэлектрической проницаемости от температуры. Теоретически использование таких материалов позволит наблюдать описанные выше нелинейные эффекты при более низких пиковых мощностях. Действительно, например, эффект увеличения пиковой мощности импульса возникает только при условии  $\alpha < -1$ . Поскольку  $\alpha \sim (V_0)^2$ , этот эффект возникает, когда амплитуда начального видеоимпульса  $V_0$  превышает некоторое пороговое значение  $V_0^* = (\zeta/(\epsilon_0 \partial_T \epsilon(T) |\psi|))^{1/2}$ , соответствующее тому, что  $\alpha = -1$ . Таким образом, чем больше значение  $|\partial_T \epsilon(T)| = \epsilon(T_0) |\tau_e|$ , тем меньше значение  $V_0^*$ . Для ПТФЭ  $\tau_e \epsilon(T_0) = \partial_T \epsilon(T) = -9.7 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ,  $V_0^* = 16.7 \text{ МВ}$ , что соответствует пиковой мощности 6 ТВт. Например, для  $\text{SrTiO}_3$  при частоте 2.4 ГГц [49, 50]  $\tau_e = -2.6 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\epsilon = 264$ ,  $\tau_e \epsilon = \partial_T \epsilon(T) = -0.69 \text{ K}^{-1}$ ,  $c = 560 \text{ Дж/(кг К)}$ ,  $\rho = 5100 \text{ кг/м}^3$ ,  $\zeta = c \rho \pi (R^2 - r^2) = 17.9 \text{ Дж/(м К)}$ . При таких параметрах  $V_0^* = 716 \text{ КВ}$ . Это соответствует пиковой мощности 11 ГВт.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработана модель, ценность которой состоит в том, что она консервативна, для нее справедливы начала термодинамики и, главное, эта модель способна предсказывать динамику изменения формы профиля видеоимпульса.

С помощью метода Хохлова мы упростили исходную систему уравнений Максвелла и свели ее к нелинейному уравнению переноса. Из данного уравнения следует, что динамика изменения формы импульса определяется тремя безразмерными параметрами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\theta_0$ , а фазовая скорость распространения импульса зависит от амплитуды импульса и температуры среды. Мы рассмотрели приближение, в котором фазовую скорость можно считать постоянной величиной. В этом приближении была выведена аналитическая формула, описывающая искажение формы профиля видеоимпульса при достаточном малых временах его распространения  $\tau^*$ . Для  $\alpha < -1$ , что соответствует отрицательному температурному коэффициенту диэлектрической проницаемости, эта формула предсказывает нелинейное увеличение пиковой мощности им-

пульса. Данный эффект потенциально применим для технологий генерации высоковольтных наносекундных импульсов, в частности для проектирования нелинейных линий, используемых для увеличения пиковой мощности.

В дальнейшем мы планируем провести реализацию численных методов решения уравнений модели. Это позволит учесть зависимость фазовой скорости импульса от его амплитуды и проследить за изменением формы профиля импульса при любых временах его распространения.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы статьи выражают благодарность В.В. Кулагину и В.А. Черепенину за ценные замечания по написанию данной статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rukin S.N.* // Rev. Sci. Instrum. 2020. V. 91. № 1. P. 011501. <https://doi.org/10.1063/1.5128297>
2. *Gundersen M., Vernier P.T., Cronin S.B., Kerketta S.* // IEEE Trans. 2020. V. PS-48. № 4. P. 742. <https://doi.org/10.1109/TPS.2020.2972934>
3. *Senaj V., del Barrio Montañés A.A., Kramer T. et al.* // JACoW IPAC. 2021. V. 21. P. 4454. <https://doi.org/10.18429/JACoW-IPAC2021-THPAB340>
4. *Sokovnin S.Yu., Balezin M.E.* // Radiation Phys. and Chem. 2018. V. 144. P. 265. <https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2017.08.023>
5. *del Barrio Montañés A.A., Senaj V., Kramer T. et al.* // J. Phys.: Conf. Ser. IOP Publ. 2023. V. 2420. № 1. P. 012085. <https://doi.org/10.18429/JACoW-IPAC2022-THPOTK044>
6. *Jintao Q.I.U., Zhang C., Zehui L.I.U. et al.* // Plasma Sci. Technol. 2021. V. 23. № 6. P. 064011. <https://doi.org/10.1088/2058-6272/abf299>
7. *Komarskiy A.A., Korzhenevskiy S.R., Komarov N.A.* // AIP Conf. Proc. 2020. V. 2250. № 1. P. 020018. <https://doi.org/10.1063/5.0013238>
8. *Serguschichev K.A., Smirnov A.A., Ilyin V.A. et al.* // J. Phys.: Conf. Ser. IOP Publ. 2019. V. 1410. № 1. P. 012237. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1410/1/012237>
9. *Zhang J., Zhang D., Fan Y. et al.* // Physics of Plasmas. 2020. V. 27. № 1. P. 010501. <https://doi.org/10.1063/1.5126271>
10. *Fedorov V.M., Efanov M.V., Ostashev Ye.O. et al.* // Electronics. 2021. V. 10. № 9. P. 1011. <https://doi.org/10.3390/electronics10091011>
11. *Efremov A.M., Koshelev V.I., Kovalchuk B.M. et al.* // Laser and Particle Beams. 2014. V. 32. № 3. P. 413. <https://doi.org/10.1017/S0263034614000299>
12. *Singh S.K., Mitra S., Naresh P. et al.* // Proc. 2014 Int. Conf. IEEE Int. Power Modulator and High Voltage

- Conf. Santa Fe. 1–5 Jun. 2014. P. 271.  
<https://doi.org/10.1109/IPMHVC.2014.7287261>
13. *Ahajjam Y., Aghzout O., Catala-Civera J.M. et al.* // Advanced Electromagnetics. 2019. V. 8. № 3. P. 76.  
<https://doi.org/10.7716/aem.v8i3.676>
  14. *Wen S., Wang M., Xie J., Wu D.* // Microwave and Optical Technol. Lett. 2019. V. 61. № 4. P. 867.  
<https://doi.org/10.1002/mop.31654>
  15. *Ahmad V., Sobus J., Greenberg M. et al.* // Nature Commun. 2020. V. 11. № 1. P. 4310.  
<https://doi.org/10.1038/s41467-020-18094-4>
  16. *Kozlov B.A., Makhanko D.S., Seredinov V.I., Pyanchenkova S.A.* // J. Phys.: Conf. Ser. IOP Publ. 2019. V. 1393. № 1. P. 012010.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1393/1/012010>
  17. *Kozlov B., Makhank'o D., Seredinov V.* // Proc. 2020 Int. Conf. 7th Intern. Congr. on Energy Fluxes and Radiation Effects IEEE. Tomsk. Russia. 14–16 Sept. 2020. P. 621.  
<https://doi.org/10.1109/EFRE47760.2020.9241987>
  18. *Катаев И.Г.* Ударные электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1963.
  19. *Островский Л.А.* // ЖТФ. 1963. Т. 33. № 9. С. 1080.
  20. *Гапонов А.В., Островский Л.А., Фрейдман Г.И.* // Изв. вузов. Радиоп физика. 1967. Т. 10. № 9–10. С. 1376.
  21. *Месяц Г.А.* Импульсная энергетика и электроника. М.: Наука, 2004. Гл. 23.
  22. *Driessen A.B.J.M., Beckers F.J.C.M., Huiskamp T., Pemen A.J.M.* // IEEE Trans. 2017. V. PS-45. № 12. С. 3288.  
<https://doi.org/10.1109/TPS.2017.2771275>
  23. *Gusev A.I., Pedos M.S., Ponomarev A.V. et al.* // Rev. Sci. Instrum. 2018. V. 89. № 9. P. 094703.  
<https://doi.org/10.1063/1.5048111>
  24. *Huang L., Meng J., Zhu D. et al.* // IEEE Trans. 2020. V. PS-48. № 11. P. 3847.  
<https://doi.org/10.1109/TPS.2020.3029524>
  25. *Gao J., Li S., Shi C. et al.* // Rev. Sci. Instrum. 2019. V. 90. № 1. P. 014704.  
<https://doi.org/10.1063/1.5053780>
  26. *Karelin S.Y., Krasovitsky V.B., Magda I.I. et al.* // Problems of Atomic Sci. Technol. 2019. P. 65.  
<https://doi.org/10.46813/2019-122-065>
  27. *Priputnev P., Romanchenko I., Tarakanov V., Pegel I.* // Proc. 2020 7th Int. Congr. on Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE). Tomsk. 14–16 Sept. N.Y.: IEEE, 2020. P. 434.  
<https://doi.org/10.1109/EFRE47760.2020.9241904>
  28. *Umaskulov M.R., Shunailov S.A., Sharypov K.A., Yalandin M.I.* // J. Appl. Phys. 2019. V. 126. № 8. Article No. 084504.  
<https://doi.org/10.1063/1.5110438>
  29. *Alichkin E.A., Pedos M.S., Ponomarev A.V. et al.* // Rev. Sci. Instrum. 2020. V. 91. № 1. P. 104705.  
<https://doi.org/10.1063/5.0017980>
  30. *Fairbanks A.J., Darr A.M., Garner A.L.* // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 148606.  
<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3015715>
  31. *Alpert Y., Jerby E.* // IEEE Trans. 1999. V. PS-27. № 2. P. 555.  
<https://doi.org/10.1109/27.772285>
  32. *Zhong J., Liang S., Yuan Y., Xiong Q.* // IEEE Trans. 2016. V. MTT-64. № 8. P. 2467.  
<https://doi.org/10.1109/TMTT.2016.2584613>
  33. *Sid A., Debbache D., Bendib A.* // Phys. of Plasmas. 2006. V. 13. № 8. P. 083107.  
<https://doi.org/10.1063/1.2219431>
  34. *Andreev N.E., Courtois C., Cros B. et al.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. № 1. P. 016404.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.016404>
  35. *Tuev P.V., Lotov K.V.* // JOSA A. 2021. V. 38. № 1. P. 108.  
<https://doi.org/10.1364/JOSAA.410552>
  36. *Peñano J.R., Sprangle P., Hafizi B. et al.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. № 3. P. 036412.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.036412>
  37. *Petrov G.M., Davis J.* // J. Phys. B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2008. V. 41. № 2. P. 025601.  
<https://doi.org/10.1088/0953-4075/41/2/025601>
  38. *Ovchinnikov K.N., Uryupin S.A.* // Contributions to Plasma Phys. 2019. V. 59. № 7. P. e201800119.  
<https://doi.org/10.1002/ctpp.201800119>
  39. *Grigorovich D.A., Ovchinnikov K.N., Uryupin S.A.* // Plasma Phys. Rep. 2022. V. 48. № 11. P. 1156.  
<https://doi.org/10.1134/S1063780X22601286>
  40. *Рез И.С., Поплавко Ю.М.* Диэлектрики: основные свойства и применения в электронике. РиС, 1989.
  41. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 1. Теория равновесных систем: Термодинамика. М.: Едиториал УРСС, 2002.
  42. *Ахманов С.А.* // Успехи физ. наук. 1986. Т. 149. № 7. С. 361.
  43. *Silaghi M.A.* Dielectric Material. 2012.  
<https://doi.org/10.5772/50638>
  44. *Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. С. 147.
  45. *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей. Л.: Энергоатомиздат, 1986. С. 132.
  46. *Krupka J., Derzakowski K., Riddle B., Baker-Jarvis J.* // Measurement Sci. Technol. 1998. V. 9. № 10. P. 1751.  
<https://doi.org/10.1088/0957-0233/9/10/015>
  47. *Глазунов П.С., Вдовин В.А., Сленков А.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2019. № 2.  
<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.2.1>
  48. *Savage M.E., Bennett L.F., Bliss D.E. et al.* // Proc. 2007 16th IEEE Int. Pulsed Power Conf. Albuquerque 17–22 Jun. 2007. N.Y.: IEEE, 2007. V. 2. P. 979.  
<https://doi.org/10.1109/PPPS.2007.4652354>
  49. *Luo T., Shan X., Zhao J. et al.* // J. Amer. Ceramic Soc. 2019. V. 102. № 7. P. 3849.  
<https://doi.org/10.1111/jace.16415>
  50. *de Ligny D., Richet P.* // Phys. Rev. B. 1996. V. 53. № 6. P. 3013.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.53.3013>