

**К 100-ЛЕТИЮ
Б.В. СЕСТРОРЕЦКОГО**

УДК 621.396

**АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУМЕРНОГО БЫСТРОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ**

© 2023 г. Т. Я. Шевгунов*

^a *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Волоколамское шос., 4, Москва, 125993 Российская Федерация*

*E-mail: shevgunov@gmail.com

Поступила в редакцию 20.02.2023 г.

После доработки 20.02.2023 г.

Принята к публикации 25.02.2023 г.

Предложен алгоритм оценивания спектральной корреляционной функции (СКФ) циклостационарных случайных процессов (ЦССП) по их реализациям конечной длительности. Описаны основные шаги алгоритма и формализованы основные операции, выполняемые на каждом из них. Представленные результаты оценивания СКФ при наличии коррелированного стационарного шума, перекрывающего анализируемый ЦССП в частотной области, подтверждают эффективность работы алгоритма в условиях низкого отношения сигнал-шум. Проведена оценка количества требуемых вычислительных операций и необходимого объема памяти ЭВМ для хранения промежуточных результатов.

DOI: 10.31857/S0033849423080119, EDN: ZJMCDR

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одной из характеристик, количественно описывающей нестационарные свойства широкого

класса случайных процессов (СП), является его циклическая ковариационная функция (ЦКВФ) [1], симметричная форма которой имеет вид

$$\mathcal{H}_x^{(\alpha)}(\tau) = \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{+B/2} \mathbb{M}[x^*(t - \tau/2)x(t + \tau/2)] \exp(-j2\pi\alpha t) dt \right\}, \quad (1)$$

где \mathbb{M} – математическое ожидание, τ – временной сдвиг, α – циклическая частота, являющаяся специфичным параметром преобразования (1). В том случае, если $\exists \alpha \neq 0, \exists \tau : \mathcal{H}_x^{(\alpha)}(\tau) \neq 0$, то процесс $x(t)$ является циклостационарным в широком смысле случайным процессом (ЦССП) [2, 3]. Научный интерес со стороны исследователей и инженеров к анализу ЦССП неуклонно растет в последние десятилетия [4, 5], хотя базовые понятия циклостационарности все еще остаются малоизвестными для широкого круга профессионалов, работающих в области цифровой обработки сигналов или анализа временных рядов. Можно выделить два ключевых преимущества циклостационарного подхода. Во-первых, большинство сигналов, с которыми приходится иметь дело в радиотехнике, могут быть описаны как реализации ЦССП, модели которых обладают большей информативностью по сравнению с моделями,

используемыми в стационарном подходе [6, 7]. Во-вторых, циклостационарный подход предлагает последовательное и непротиворечивое расширение классической теории стационарных процессов, что позволяет выполнить систематическое обобщение большинства известных методов [8].

При анализе ЦССП часто более удобной оказывается спектральная корреляционная функция (СКФ), характеризующая меру устойчивой корреляции спектральных компонент и связанная с ЦКВФ преобразованием Фурье:

$$S_x^{(\alpha)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_x^{(\alpha)}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau. \quad (2)$$

Существующие алгоритмы оценивания СКФ на основе обработки конечных реализаций обладают некоторыми недостатками. Так, алгоритмы прямого вычисления спектральной корреляции

[9, 10] при высокой точности обладает низким быстродействием при оценивании СКФ в широкой полосе частот; широко известный алгоритм накопления быстрого преобразования Фурье (БПФ) [11, 12] не обеспечивает плотного замощения биспектральной плоскости элементами разрешения, что может приводить к потере значимых компонент СКФ; алгоритмы [13, 14], основанные на циклических периодограммах, чувствительны к выбору взвешивающих оконных функций.

В данной статье предложен алгоритм формирования оценок СКФ в широкой полосе частот на основе двумерного БПФ, являющийся развитием более ранних работ автора [15, 16].

2. АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Ключевая идея, лежащая в основе предложенного алгоритма, состоит в том, что на основе реализации ЦССП $x(t)$ конечной длительности T_x оценка его СКФ может быть сформирована в форме

$$\hat{S}_x(f_1, f_2) = \int_0^{T_x} \int_0^{T_x} w(t_1, t_2) \hat{K}_x(t_1, t_2) \exp[-j2\pi(f_1 t_1 - f_2 t_2)] dt_1 dt_2, \quad (3)$$

где в преобразование Фурье дополнительно введена двумерная оконная функция $w(t_1, t_2)$, формально представляющая собой функцию двух переменных. Оконная функция $w(t_1, t_2)$ выбирается нефакторизуемой, т.е. не существуют функции $w_1(t_1)$ и $w_2(t_2)$ такие, что $w(t_1, t_2) = w_1(t_1)w_2(t_2)$ для всех значений t_1, t_2 . В противном случае двойной интеграл в (3) можно было бы представить в виде произведения двух однократных интегралов преобразования Фурье с весовыми функциями-сомножителями по каждой переменной интегрирования.

Для построения метода оценивания достаточно рассмотреть в (3) оконные функции, допускающие представление

$$w(t_1, t_2) = w(t_1 - t_2), \quad (4)$$

где $w(\tau)$ описывает некоторую одномерную оконную функцию, удовлетворяющую условиям вещественности, четности, единичного значения в нуле: $w(0) = 1$, компактности носителя или убывания по закону не медленнее обратной первой степени аргумента, конечности энергии. В качестве оконных функций может быть использовано большинство известных и хорошо описанных оконных функций [17, 18], включая окна прямоугольной, треугольной и гауссовой формы, а также окно в форме функции sinc [19].

Алгоритм оценивания СКФ на основе двойного БПФ может быть представлен последователь-

ностью из семи операций (см. далее подразделы 2.1–2.7 соответственно).

Операции 1–4 являются обязательными для формирования оценки СКФ, операция 5 необходима для нормировки, а операции 6 и 7 обеспечивают возможность удобной для последующего анализа визуализации оценки СКФ в виде функции пары частот (α, f) , при выборе симметричной формы двумерной ковариационной функции [20]. В записи шагов алгоритма индекс x , указывающий на то, что оценки и матрицы относятся к обрабатываемому сигналу $x(t)$, не приводится.

2.1. Формирование длинной реализации цифрового сигнала

Результат этой операции $x[n]$ может быть получен посредством аналого-цифрового преобразования $x[n] = x(nT_s)$. Максимально возможное количество отсчетов N в сформированной выборке $x[n]$, длительность которой соответствует $T_x = NT_s$, определяется исходя из возможностей эффективного сохранения в рабочей памяти ЭВМ как минимум четырех квадратных матриц размером $N \times N$, а также из компромисса между требованиями по точности оценки по циклической частоте α и требованиями быстродействия, если таковые предъявляются.

2.2. Составление оценки ковариационной функции в матричной форме

В результате выполнения данной операция будет составлена матрица оценки ковариационной функции \mathbf{K} , элементы которой вычисляются как отсчеты двумерной дискретной функции:

$$[\mathbf{K}]_{m,n} = K[n_1 - 1, n_2 - 1] = x[n_1]x^*[n_2], \quad (5)$$

где $K[n_1, n_2]$ описывает функция двух номеров отсчетов n_1 и n_2 , сопоставляемых соответственно моментам времени t_1 и t_2 : $t_1 = n_1 T_s$, $t_2 = n_2 T_s$. В общем случае все элементы матрицы \mathbf{K} отличны от нуля; структура представлена на рис. 1.

2.3. Применение двумерной оконной функции к матрице оценки

Выполнение этой операции состоит в применении к матрице \mathbf{K} поэлементного умножения:

$$\mathbf{Kw} = \mathbf{K} \circ \mathbf{W}, \quad (6)$$

где элементы взвешивающей матрицы вычисляются с использованием выбранной оконной функции $w[n] = w(nT_s)$:

$$[\mathbf{W}]_{n_1, n_2} = w[n_1 - n_2], \quad (7)$$

Структура матрицы \mathbf{Kw} представлена на рис. 2, где в результате применения прямоугольного окна

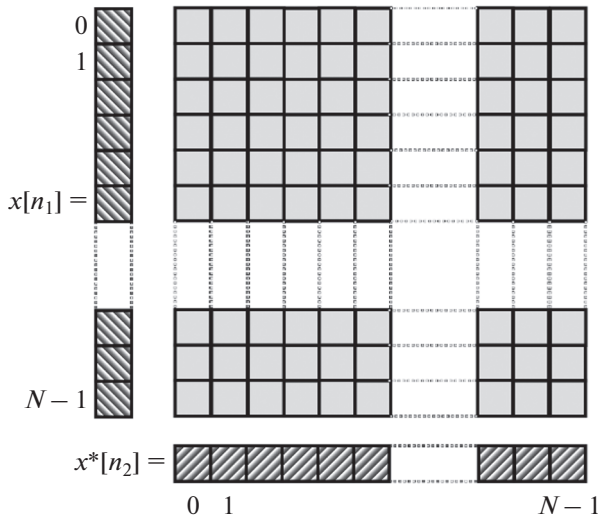


Рис. 1. Матрица двумерной ковариационной функции.

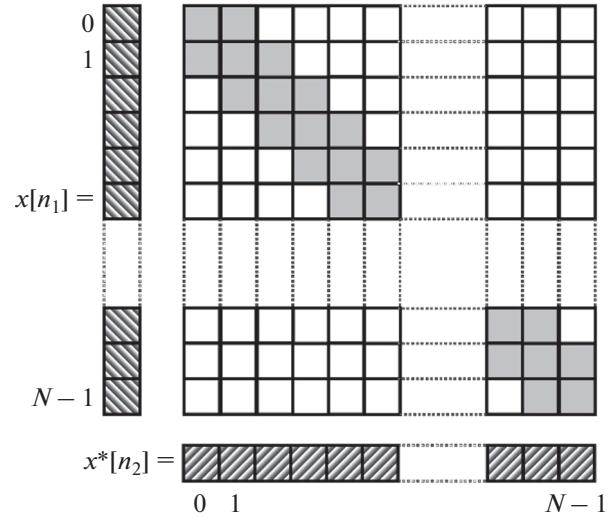


Рис. 2. Матрица ДКФ после применения двумерной оконной функции.

становятся нулевыми все элементы за пределами симметричной полосы вдоль главной диагонали матрицы \mathbf{K} , узкой по сравнению с размером матрицы.

2.4. Вычисление двумерного БПФ

Вычисление двумерного БПФ выполняется над данными, записанными в матричной форме, с использованием быстрых алгоритмов, реализованных в программном пакете или на программно-аппаратной платформе. В соответствии с формулой (3) вычисление двумерного БПФ будет иметь существенную особенность, отличающую выполняемое здесь двумерное БПФ от преобразования, традиционно используемого в задачах частотного анализа изображений [21]. Так, по индексу n_1 , вдоль каждой строки над элементами в столбцах матрицы \mathbf{Kw} , должно проводиться прямое БПФ, а по индексу n_2 , вдоль каждого столбца над элементами в строках матрицы \mathbf{Kw} , – обратное БПФ. Порядок применения операций из этой пары операций может быть любым, поскольку такая пара операций коммутативна. Использование типичных для большинства математических пакетов имен функций *FFT* и *IFFT* соответственно для прямого и обратного БПФ позволяет формально записать матрицу \mathbf{S} биспектральных оценок в виде

$$\mathbf{S} = \text{IFFT}(\text{FFT}(\mathbf{Kw}, 1), 2), \quad (8)$$

где вторыми аргументами указаны номера размерностей, вдоль которых проводится БПФ.

Независимо от того, какой множитель мог быть введен в функции прямого и обратного БПФ, применение такой пары преобразований компенсирует

его, приводя к формальному выражению двойной суммы:

$$S[m_1, m_2] = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} Kw[n_1, n_2] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} m_1 n_1\right) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} m_2 n_2\right), \quad (9)$$

где m_1 и m_2 – индексы отсчетов осей частот $f_1 = m_1/T_x$ и $f_2 = m_2/T_x$.

2.5. Приведение к единицам измерения спектральной корреляционной функции

Цель выполнения данной операции состоит в задании физического смысла вычисленным элементам матрицы \mathbf{S} . Это позволяет выполнять корректное сравнение результатов работы рассматриваемого метода, во-первых, с характеристиками СКФ аналитической модели ЦССП и, во-вторых, с оценками, полученными при других параметрах (длительности реализации, оконной функции) или при использовании альтернативных методов оценивания СКФ. Элементы матрицы оценок \mathbf{S} можно интерпретировать как значения оценки двухчастотной спектральной корреляционной плотности (СКП) [22], вычисленные в узлах прямоугольной сетки:

$$\hat{S}(f_1, f_2) \Big|_{f_1=\frac{m_1}{T_x}, f_2=\frac{m_2}{T_x}} = T_s^2 S[m_1, m_2] = T_s^2 [\mathbf{S}]_{m_1+1, m_2+1}, \quad (10)$$

где умножение элементов матрицы \mathbf{S} на квадрат T_s соответствует замене в (3) двойного интегрирования на сумму.

Оценка СКП как функция частоты f и циклической частоты α может быть получена с использованием связи вероятностных характеристик:

$$\hat{\mathcal{G}}(\alpha, f) = S(f + \alpha/2, f - \alpha/2). \quad (11)$$

Для перехода к оценке СКФ, получаемой по конечной реализации, оценку СКП следует разделить на длительность реализации T_x :

$$\hat{\mathcal{G}}^{(\alpha)}(f) \approx \frac{1}{T_x} \hat{\mathcal{G}}(\alpha, f), \quad (12)$$

что аналогично связи оценок коэффициентов ряда Фурье с использованием значений спектральной плотности конечного по длительности сигнала.

2.6. Трансляция матрицы оценки

Данная операция состоит в переносе начала координат $(0, 0)$ двухчастотной плоскости (α, f) в центр матрицы \mathbf{S} . Формально это означает сопоставление началу координат элемента матрицы с индексами $(N/2, N/2)$, если N – четное, и с индексами $((N + 1)/2, (N + 1)/2)$, если N – нечетное. Фактически для выполнения такой операции во многих математических пакетах предусмотрена специальная функция *FFTSHIFT*, выполняющая перестановку двух половин вектора при его расщеплении пополам по центральному элементу. Требуемого результата можно добиться двойным применением функции *FFTSHIFT* к матрице \mathbf{S} , по строкам и по столбцам:

$$\mathbf{S}_0 = \text{FFTSHIFT}(\text{FFTSHIFT}(\mathbf{S}, 2), 1). \quad (13)$$

2.7. Визуализация с помощью ромбовидной диаграммы

В качестве заключительной операции элементы матрицы \mathbf{S}_0 могут быть расположены на двухчастотной плоскости, заполняя область главного носителя Rh_0 , имеющего форму ромба. На рис. 3 рассмотрено построение ромбовидной диаграммы для случая, когда размер матрицы N четный; для примера выбрано $N = 10$. При этом угловые элементы матрицы СКФ размещаются асимметрично, со смещением влево и вниз на один элемент. Так, в этом случае элемент $[\mathbf{S}_0]_{1,1}$ будет соответствовать узлу сетки $(0, -F_s/2)$, а зеркальный узел сетки с координатами $(0, F_s/2)$ будут относиться уже к соседней копии СКФ [23].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Для демонстрации работы алгоритма, построенного на основе двумерного преобразования Фурье, рассмотрим задачу анализа характеристик аддитивной смеси $z(t) = x(t) + y(t)$. Полезный сиг-

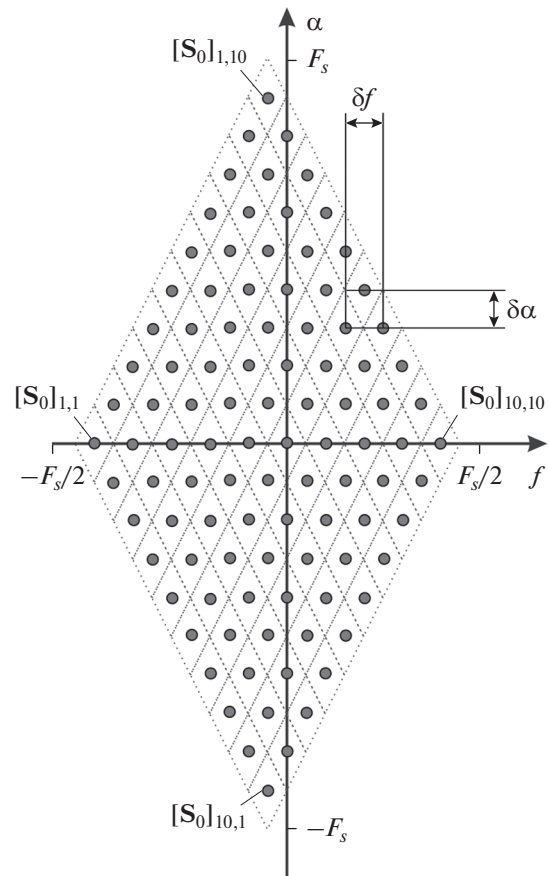


Рис. 3. Сетка узлов главного носителя СКФ при четных N .

нал $x(t)$ – реализация ЦССП, заданного в соответствии с моделью

$$x(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \text{rect}\left(\frac{t - nT}{\Delta}\right), \quad (14)$$

где A обозначает амплитуду, T – период повторения импульсов, Δ – длительность каждого импульса, M – количество импульсов, $\{C_n\}$ – случайный цифровой сигнал, моделируемый как последовательность независимых случайных величин с распределением Радемахера [24]. Шум $y(t)$ описывает реализацию стационарного в широком смысле гауссовского процесса, с некоторой спектральной плотностью мощности (СПМ) $S_y(f)$.

Выберем следующие параметры ЦССП: $A = 1$ В, $T = 10$ мкс, $\Delta = T/2 = 5$ мкс. СПМ $S_y(f)$ выберем намеренно такой, чтобы она перекрывала СПМ ЦССП $x(t)$. Для этого пропустим белый гауссовский шум через формирующий фильтр нижних частот Баттерворта 4-го порядка с частотой среза $F_c = 3/\Delta$. Длительность обрабатываемой реализации цифрового сигнала $z[n] = z(nT_s)$ составляет $N = 2^{12} = 4096$, период дискретизации $T_s = \Delta/16$, что обеспечивает полную длительность $T_z = NT_s$.

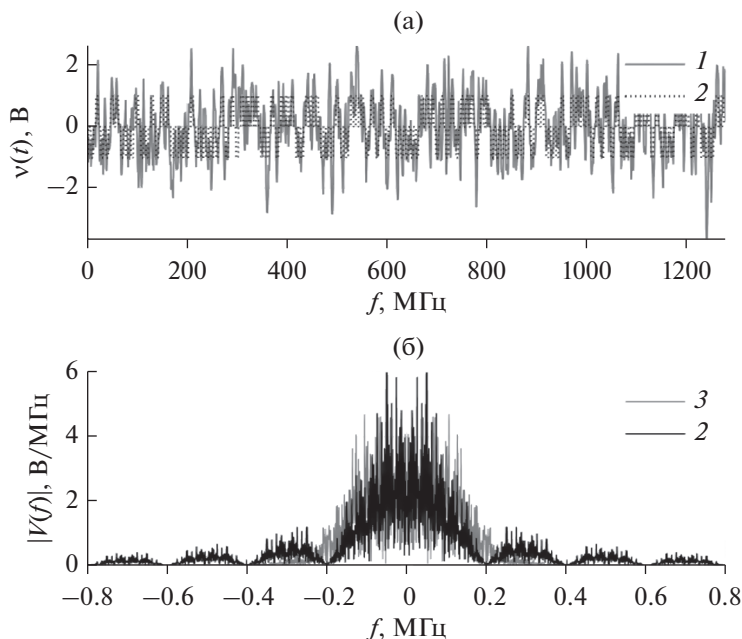


Рис. 4. Типичная реализация аддитивной смеси ЦССП и стационарного шума (а) и его амплитудный спектр (б): 1 – смесь ЦССП и шума, 2 – ЦССП, 3 – шум.

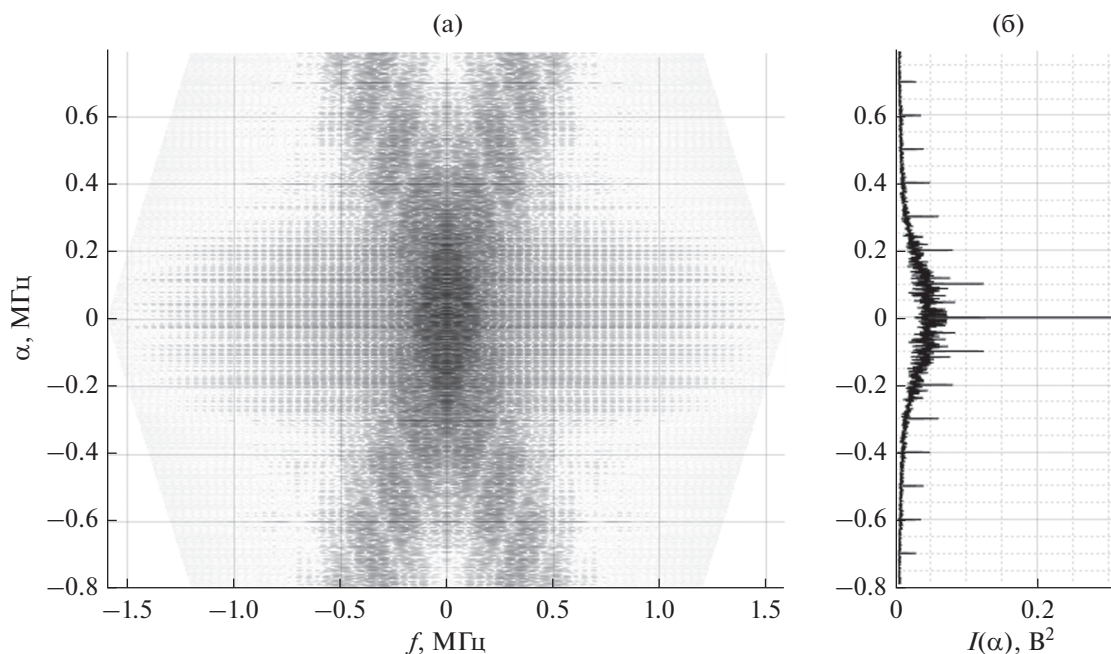


Рис. 5. Диаграмма модуля СКФ на двухчастотной плоскости (а) и ее интегральная характеристика (б).

На рис. 4 представлены графики типичной реализации смеси СП $z(t)$ при отношении сигнал/шум ОСШ = 0 дБ и реализации исследуемого ЦССП $x(t)$ без шума. Визуальный анализ не позволяет выявить процесс $x(t)$ на фоне шума.

В качестве оконной функции, формирующей матрицу (7), используется прямоугольный импульс $w[n, m] = \text{rect}((n - m)T_s / \Delta w)$, с шириной окна $\Delta w = 5\tau$.

На рис. 5 представлена диаграмма оценки модуля СКФ на плоскости “частота–циклическая частота” совместно с интегральной характеристикой псевдомощности [25], позволяющей идентифицировать характерные циклические частоты, на которых сформированы пики, визуально возвышающиеся над некоторой окрестностью интегральной кривой. Как и ожидалось, циклические частоты, на которых расположены

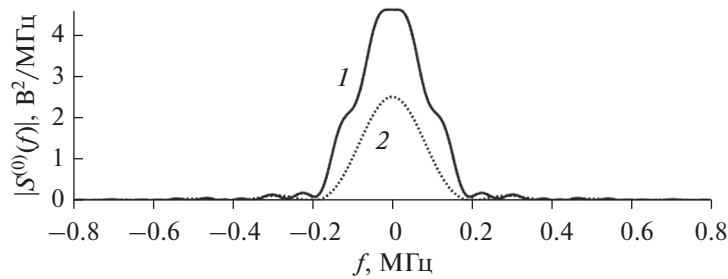


Рис. 6. Оценка СПМ, или компоненты СКФ на нулевой циклической частоте: 1 – оценка, 2 – модель.

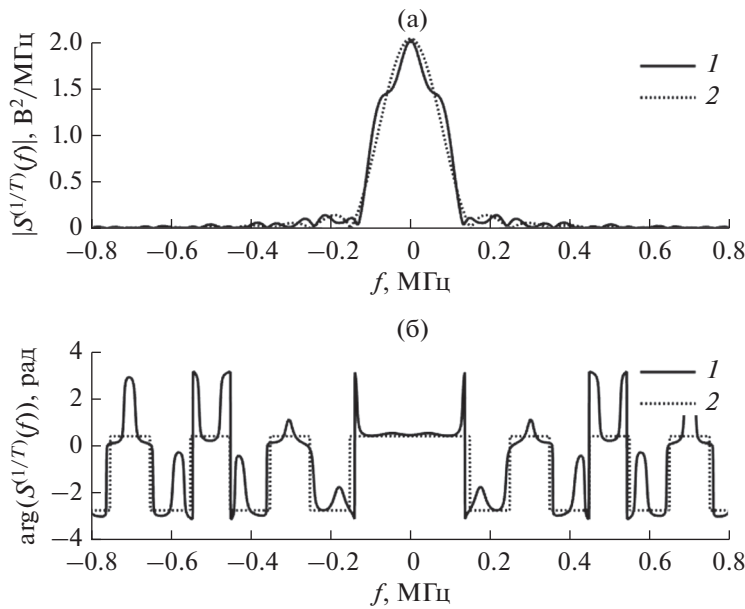


Рис. 7. Оценка модуля (а) и аргумента (б) компоненты СКФ на циклической частоте $1/T$: 1 – оценка, 2 – модель.

наблюдаемые пики, кратны частоте $1/T = 0.1$ МГц.

На рис. 6 представлена оценка СПМ ЦССП, или компоненты его СКФ на нулевой циклической частоте, полученная по его реализации, в сравнении с моделью СПМ ЦССП. Поскольку СПМ является неотрицательной вещественной функцией, то для ее визуализации достаточно единственного графика. На графике видно, что оценка СПМ ЦССП по его реализации существенно отличается от ее вероятностной модели, что объясняется значительным уровнем шума (ОСШ = 0 дБ), который полностью перекрывает в частотной области полезный ЦССП $x(t)$.

На рис. 7 представлена оценка компоненты СКФ ЦССП на циклической частоте $1/T$ в сравнении с характеристикой, построенной по аналитической формуле, известной для используемой модели ЦССП [26]. СПМ в отличие от СКФ на ненулевой частоте представляет комплекснозначную функцию, поэтому для ее изображения

требуется пара графиков, представляющих её модуль и аргумент. Аналогично на рис. 8 и 9 представлены оценки компоненты СКФ ЦССП на циклических частотах, равных соответственно $2/T$ и $3/T$, и для сравнения – их вероятностные модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты работы предложенного алгоритма показывают высокую степень достоверности оценок СКФ компонент, соответствующих характерным циклическим частотам ЦССП. Абсолютные значения кривых оценок близки к модельным, а различия в фазовых характеристиках объясняются сглаживанием скачков фазы и особенностью расчета аргумента комплексного числа, приводящим его значение в диапазон $(-\pi, \pi]$. Различие между модельными и оценочными характеристиками объясняется конечностью обрабатываемых выборок наблюдаемого случайного

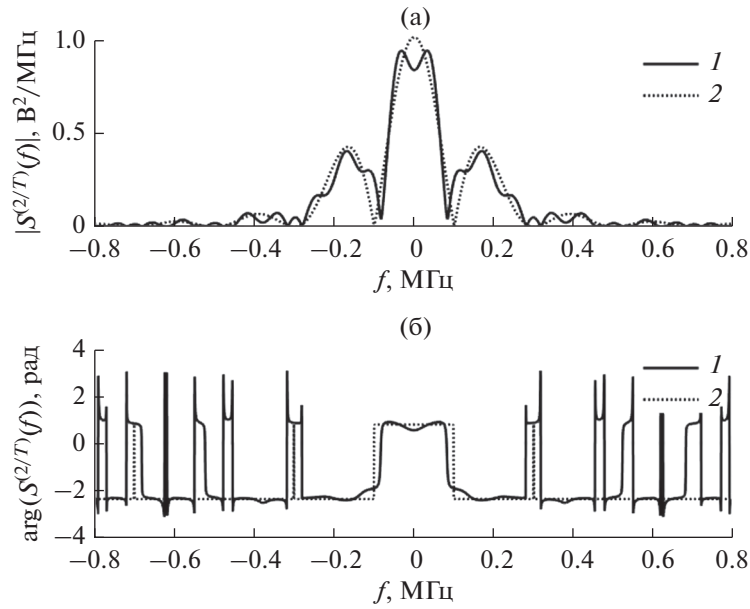


Рис. 8. Оценка модуля (а) и аргумента (б) компоненты СКФ на циклической частоте $2/T$: 1 – оценка, 2 – модель.

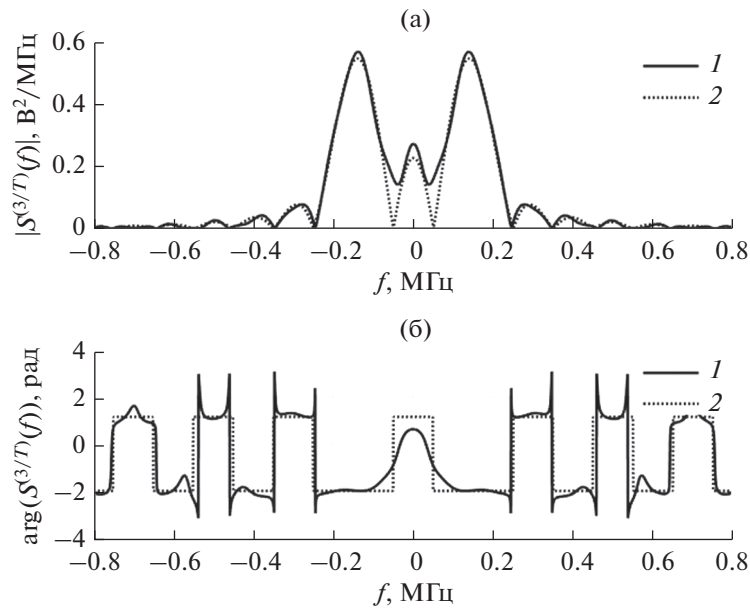


Рис. 9. Оценка модуля (а) и аргумента (б) компоненты СКФ на циклической частоте $3/T$: 1 – оценка, 2 – модель.

процесса, а также присутствием шума, мощность которого сопоставима с мощностью исследуемого ЦССП. В отличие от СПМ характеристики, соответствующие ненулевым циклическим частотам, подвержены существенно меньшим искажениям,

Общее число операций вещественного умножения $C_{умн}$ и сложения $C_{сл}$ требуемых для выполнения алгоритма на основе метода двойного БПФ, можно приблизительно оценить по формулам

$$C_{умн} \approx N^2 \left(\frac{1}{8} + 8 \log_2 N \right), \quad (15)$$

$$C_{сл} \approx 8N^2 \log_2 N. \quad (16)$$

Для сохранения результирующей матрицы \mathbf{S} необходимо задействовать $2N^2$ ячеек памяти. Так, при обработке реализации сигнала длиной 8192 ($=2^{13}$) отсчетов, записанных в формате с плавающей запятой одинарной точности (4 байта на одно действительное значение), для хранения только одной матрицы \mathbf{SM} , накапливающей оценки комплексной двумерной спектральной характеристики, потребуется 512 МБайт машинной памяти.

Автор считает важным отметить, что впервые возможность использования подобного подхода к оцениванию биспектральных характеристик ЦССП была затронута в работе [27], в результате обобщения результатов, полученных ранее [28] для стационарных СП. Однако, развивая математическую теорию асимптотической нормальности ошибок оценивания, позднее, в работе [29], было получено заключение, что для конечной реализации, состоящей из N отсчетов, в самом общем случае, при отсутствии каких-либо априорных знаний о модели исследуемого процесса, необходимо выбирать эффективную длительность окна порядка $N^{1/5}$. Такое жесткое ограничение в теории должно существенно сузить область применения предложенного алгоритма оценки, поскольку ширина элемента разрешения Δf по частоте f обратно пропорциональна эффективной длительности оконной функции (4). Однако на практике длительность оконной функции может быть выбрана заметно больше, вплоть до величин порядка $N^{1/2}$, что позволяет достигать приемлемого разрешения по частоте, хотя и приводит к незначительному увеличению дисперсии оценки, или некоторому снижению ее эффективности.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFF-2023-0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner W.A. Statistical Spectral Analysis: A Non-probabilistic Theory. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1988.
2. Gardner W.A. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing. N.Y.: IEEE Press, 1994.
3. Napolitano A. Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. L.: Acad. Press., 2019.
<https://doi.org/10.1016/C2017-0-04240-4>
4. Gardner W.A., Napolitano A., Paura L. // Signal Processing. 2006. V. 86. P. 639.
<https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2005.06.016>
5. Napolitano A. // Signal Processing. 2016. V. 120. P. 385.
<https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.09.011>
6. Efimov E. // Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow. 15–17 Mar. 2022. N.Y.: IEEE, 2022. Article No. 9744308
<https://doi.org/10.1109/IEEECONF53456.2022.9744308>
7. Shevgunov T. // Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow. 15–17 Mar. 2022. N.Y.: IEEE, 2022. Article No. 9744365.
<https://doi.org/10.1109/IEEECONF53456.2022.9744365>
8. Guschina O. // Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow. 15–17 Mar. 2022. N.Y.: IEEE, 2022. Article No. 9744264
<https://doi.org/10.1109/IEEECONF53456.2022.9744264>
9. Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я., Кузнецов Ю.В. // Труды МАИ № 97. М.: МАИ, 2017. С. 14. <http://trudy-mai.ru/published.php?ID=87294>.
10. Shevgunov T., Efimov E., Zhukov D. // Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT). 2018. P. 1.
<https://doi.org/10.1109/MWENT.2018.8337271>
11. Roberts R.S., Brown W.A., Loomis H.H. // IEEE Signal Processing Magazine. 1991. V. 8. P. 38.
<https://doi.org/10.1109/79.81008>
12. Brown W.A., Loomis H.H. // IEEE Trans. 1993. V. SP-41. № 2. P. 703.
<https://doi.org/10.1109/78.193211>
13. Antoni J. // Mechanical Systems and Signal Processing. 2007. V. 21. № 2. P. 597.
<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2006.08.007>
14. Antoni J., Xin G., Hamzaoui N. // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. V. 92. P. 248.
<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.01.011>
15. Shevgunov T., Efimov E. // Signal Processing Symp. (SPSymo). Krakow. 2019. P. 216.
<https://doi.org/10.1109/SPS.2019.8881963>
16. Шевгунов Т.Я., Гущина О.А. // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2021. Т. 15. № 11. С. 54.
<https://doi.org/10.36724/2072-8735-2021-15-11-54-60>
17. Harris F.J. // Proc. IEEE. 1978. V. 66. P. 51.
<https://doi.org/10.1109/PROC.1978.10837>
18. Geckinli N., Yavuz D. // IEEE Trans. 1978. V. ASSP-26. № 6. P. 501.
<https://doi.org/10.1109/TASSP.1978.1163153>
19. Mahyari A.G. // Intern. J. Electronics. 2010. V. 97. P. 1311.
<https://doi.org/10.1080/00207217.2010.488908>
20. Шевгунов Т.Я. // Радиотехника. 2019. № 3. С. 33.
<https://doi.org/10.18127/j00338486-201903-05>
21. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2012.
22. Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я. // Электросвязь. 2016. № 11. С. 65.
23. Shevgunov T., Efimov E., Guschina O. // Sensors. 2023. V. 23. № 1. P. 215.
<https://doi.org/10.3390/s23010215>
24. Hitzzenko P., Kwapien S. // Probability in Banach Spaces, 9. Progress in Probability. 1994. V. 35. P. 31.
https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0253-0_2
25. Shevgunov T., Efimov E., Kirdyashkin V., Kravchenko T. // Adv. Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library. 2020. V. 184. P. 75.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_6
26. Shevgunov T. // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1163. P. 012037.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1163/1/012037>
27. Lenart L. // Probability and Mathematical Statistics. 2008. V. 28. № 2. P. 305.
28. Priestley M.B. Spectral Analysis and Time Series. V. 1. Univariate ser. L.: Acad. Press, 1981.
29. Lenart L. // Bernoulli. 2011. V. 17. № 1. P. 290.
<https://doi.org/10.3150/10-BEJ269>