

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОСТОРОННЕ МЕТАЛЛИЗИРОВАННОМ КАСАТЕЛЬНО НАМАГНИЧЕННОМ БИГИРОТРОПНОМ СЛОЕ (С ПРИМЕРОМ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК СПИНОВЫХ ВОЛН)

© 2023 г. Э. Г. Локк<sup>а</sup>, \*, С. В. Герус<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

\*E-mail: edwin@ms.ire.rssi.ru

Поступила в редакцию 28.04.2023 г.

После доработки 28.04.2023 г.

Принята к публикации 25.05.2023 г.

Без использования магнитостатического приближения решена задача о распространении электромагнитных волн в произвольном направлении в касательно намагниченном односторонне металлизированном бигиротропном слое. Показано, что в данной задаче уравнения Максвелла сводятся к дифференциальному уравнению, которому соответствует биквадратное характеристическое уравнение с четырьмя корнями  $k_{x21}$ ,  $-k_{x21}$ ,  $k_{x22}$  и  $-k_{x22}$ , описывающими распределение волны в сечении слоя. Получено дисперсионное уравнение, описывающее волны с действительными значениями  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$ . На основе этого уравнения рассчитаны характеристики спиновых волн в односторонне металлизированной ферритовой пластине (являющейся частным случаем бигиротропного слоя) для частот, лежащих выше частоты ферромагнитного резонанса. Найдено, что для этих волн величина  $k_{x21}$  может принимать как действительные, так и мнимые значения, а величина  $k_{x22}$  — только действительные. Обнаружено, что на некоторой частоте спиновая волна имеет изочастотную кривую, практически не отличающуюся от прямой линии.

DOI: 10.31857/S0033849423090152, EDN: RXSTOC

### ВВЕДЕНИЕ

Для успешного развития магноники, происходящего в последние годы [1–4], необходимо разрабатывать новые экспериментальные и теоретические методы исследования характеристик спиновых волн (СВ). Как известно, СВ с волновыми числами  $0 < k < 10^4 \text{ см}^{-1}$  обычно описывают в магнитостатическом приближении (МСП) [5], считая, что величина волнового числа СВ  $k \gg k_0 \equiv \omega/c$  ( $\omega$  — циклическая частота СВ, а  $c$  — скорость света в вакууме), и поэтому в уравнениях Максвелла можно пренебречь членами, содержащими множители  $\omega/c$ . Из-за использования уравнений магнитостатики при описании СВ эти волны часто называют магнитостатическими. Такое описание СВ уже более полувека используется при разработке различных приборов на основе СВ для спиновой электроники сверхвысокочастотного диапазона (СВЧ) [1–9].

Тем не менее иногда МСП не использовалось для описания СВ [8–25]. Так, в части работ исследовались характеристики СВ в области малых волновых чисел и свойства СВ в зависимости от параметров диэлектрических проницаемостей

сред, прилегающих к ферриту [12–14, 17]. В работе [16] было показано, что расчеты в МСП вектора Пойнтинга СВ  $\vec{P}$  по формуле  $\vec{P} = -\omega \text{Re}(i\Psi^* \vec{B})/8\pi$  не корректны и что вектор Пойнтинга следует вычислять по формуле  $\vec{P} = c \text{Re}[\vec{E}\vec{H}^*]/8\pi$ , где  $\Psi$  — магнитный потенциал,  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции, а  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  — векторы СВЧ электрического и магнитного полей. Расчеты, представленные в работах [20, 21], показали, что векторные линии магнитной индукции поверхностной СВ образуют два ряда противоположно направленных вихрей, локализованных вблизи противоположных поверхностей пластины.

Отметим, что в [12–16, 18–21] характеристики СВ исследовались лишь для случая, когда векторы групповой и фазовой скоростей СВ коллинеарны<sup>1</sup>, т.е., когда волна распространяется перпендикулярно направлению внешнего магнитного поля либо вдоль него. Лишь недавно без исполь-

<sup>1</sup> Лишь в работах [11, 17] описано распространение СВ в произвольном направлении; однако, как будет показано ниже, результаты, представленные в [11, 17], некорректны.

зования МСП было получено аналитическое описание характеристик электромагнитных волн (в том числе спиновых), распространяющихся в произвольном направлении в неограниченном бигиротропном пространстве [22–24] и в бигиротропном слое, окруженном диэлектрическими полупространствами [25]. В этих работах на примере ферритовой пластины (являющейся частным случаем бигиротропного слоя), рассчитаны различные характеристики СВ.

Цель работы – исследовать влияние граничных условий типа “идеального металла” на характеристики СВ в ферритовой пластине без использования МСП.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечный бигиротропный слой 2 толщиной  $s$ , граничащий сверху с идеально проводящим металлом 1, а снизу – с полупространством 3 изотропного диэлектрика (рис. 1). Характеризуя электромагнитные поля в средах 2 и 3, сопоставим им индексы  $j = 2$  или 3. Пусть полупространство 3 имеет скалярные относительные диэлектрическую и магнитную проницаемости  $\epsilon_3$  и  $\mu_3$ . Слой 2 намагничен до насыщения касательным однородным магнитным полем  $\vec{H}_0$ , направленным вдоль оси  $z$ . Пусть в этом слое распространяется монохроматическая электромагнитная волна с частотой  $\omega$ , изменяющаяся во времени по гармоническому закону  $\exp(i\omega t)$ . Тогда этот слой можно охарактеризовать диэлектрической и магнитной проницаемостями, описываемыми эрмитовыми тензорами второго ранга

$$\vec{\mu}_2 = \begin{vmatrix} \mu & i\nu & 0 \\ -i\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_2 = \begin{vmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Поскольку полученные ниже результаты могут быть полезны исследователям электромагнитных волн в гиротропных слоях феррита, антиферромагнетика или плазмы (которые являются частными случаями бигиротропного слоя и у которых либо тензор  $\vec{\epsilon}_2$ , либо тензор  $\vec{\mu}_2$  соответствуют выражениям (1)), то ниже математическое решение задачи представлено в общем случае – для распространения волны в бигиротропном слое. В то же время полученные формулы будут использованы для расчетов характеристик СВ в односторонне металлизированной ферритовой пластине, для которой компоненты  $\mu$  и  $\nu$  тензора  $\vec{\mu}_2$ , как известно, описываются выражениями [9]

$$\mu = 1 + \frac{\omega_M \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad \nu = \frac{\omega_M \omega}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (2)$$

где  $\omega_H = \gamma H_0$ ,  $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $\gamma$  – гиромагнитная постоянная,  $4\pi M_0$  – намагниченность насы-

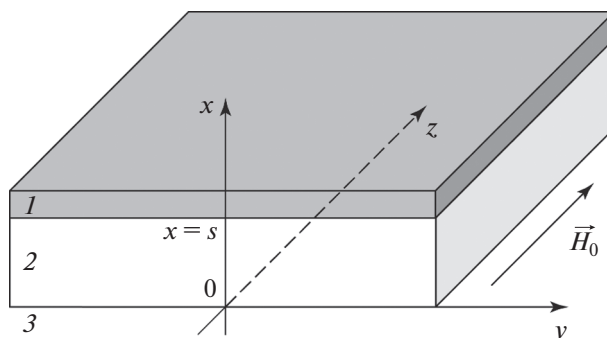


Рис. 1. Геометрия задачи: 1 – идеально проводящий металл, 2 – бигиротропный слой (например, ферритовая пластина), 3 – полупространство изотропного немагнитного диэлектрика (или вакуума).

щения феррита,  $f$  – частота электромагнитных колебаний.

Отметим, что математическое описание распространения волн в произвольном направлении на основе уравнений Максвелла является довольно громоздким, поэтому введем ряд обозначений для компактной записи полученных результатов.

Электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль слоя 2, должна удовлетворять системе уравнений Максвелла для комплексных амплитуд

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_j + i\omega \vec{B}_j / c = 0 \\ \text{div } \vec{B}_j = 0 \\ \text{rot } \vec{H}_j - i\omega \vec{D}_j / c = 0 \\ \text{div } \vec{D}_j = 0 \end{cases} \quad (3)$$

где  $\vec{E}_j$  и  $\vec{H}_j$  – амплитуды векторов напряженностей электрического и магнитного СВЧ-полей, а  $\vec{D}_j$  и  $\vec{B}_j$  – амплитуды векторов напряженностей электрической и магнитной СВЧ-индукций, связанные с  $\vec{E}_j$  и  $\vec{H}_j$  соотношениями

$$\vec{D}_j = \vec{\epsilon}_j \vec{E}_j \quad \text{и} \quad \vec{B}_j = \vec{\mu}_j \vec{H}_j. \quad (4)$$

Напомним, что в [11, 17] при решении системы (3) сразу предлагалось искать решение в виде плоской волны  $\sim \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z)$ . Считаем такой подход некорректным и будем искать решения системы (3) в виде однородной плоской волны, характеризующейся волновым вектором  $\vec{k}$  и распространяющейся в плоскости  $yz$  пластины в произвольном направлении. То есть будем считать, что зависимость волны от координаты  $x$  (нормальной к плоскости пластины) должна быть найдена в ходе решения системы уравнений (3) и что компоненты полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  ( $E_x E_y, E_z, H_x, H_y$  и

$H_z$ ) изменяются в плоскости пластины, как и во времени, по гармоническому закону

$$\begin{aligned} \overline{E}_j &= \overline{e}_j(x) \exp(-ik\vec{r}) \quad \text{или} \\ E_{xj,yj,zj} &= e_{xj,yj,zj}(x) \exp(-ik_y y - ik_z z), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \overline{H}_j &= \overline{h}_j(x) \exp(-ik\vec{r}) \quad \text{или} \\ H_{xj,yj,zj} &= h_{xj,yj,zj}(x) \exp(-ik_y y - ik_z z), \end{aligned} \quad (6)$$

где наряду с декартовой системой координат  $\{x; y; z\}$  введена соответствующая полярная система координат  $\{x; r; \varphi\}$ , в которой углы  $\varphi$  отсчитываются от оси  $y$ , а за положительное направление отсчета углов принято направление против часовой стрелки. Координаты обеих систем связаны соотношениями  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$ , а модуль  $k$  волнового вектора  $\vec{k}$  и его компоненты  $k_y$  и  $k_z$  связаны соотношениями  $k_y = k \cos \varphi$ ,  $k_z = k \sin \varphi$ , причем  $k^2 = k_y^2 + k_z^2$ .

## 2. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КАСАТЕЛЬНО НАМАГНИЧЕННОМ БИГИРОТРОПНОМ СЛОЕ

Как было показано ранее [9, 23, 24, 26], при описании распространения электромагнитных волн в бигиротропной среде из уравнений Максвелла можно исключить все магнитные и электрические компоненты СВЧ-поля кроме компонент, параллельных вектору внешнего однородного магнитного поля  $\overline{H}_0$ , т.е. свести уравнения Максвелла (3) к системе из двух дифференциальных уравнений, содержащих лишь две СВЧ-компоненты,  $E_{z2}$  и  $H_{z2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{z2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{z2}}{\partial y^2} + \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon} \frac{\partial^2 E_{z2}}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon_{zz} \mu_{\perp} E_{z2} + \\ + k_0 \mu_{zz} \left( \frac{g}{\epsilon} + \frac{v}{\mu} \right) \frac{\partial H_{z2}}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_{z2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z2}}{\partial y^2} + \frac{\mu_{zz}}{\mu} \frac{\partial^2 H_{z2}}{\partial z^2} + k_0^2 \mu_{zz} \epsilon_{\perp} H_{z2} - \\ - k_0 \epsilon_{zz} \left( \frac{g}{\epsilon} + \frac{v}{\mu} \right) \frac{\partial E_{z2}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь использованы обозначения

$$\mu_{\perp} = (\mu^2 - v^2)/\mu, \quad \epsilon_{\perp} = (\epsilon^2 - g^2)/\epsilon. \quad (9)$$

Подставляя выражения (5) и (6) в уравнения (7) и (8), получим систему из двух уравнений, содержа-

щих лишь зависящие от координаты  $x$  амплитуды  $e_{z2}$  и  $h_{z2}$  компонент  $E_{z2}$  и  $H_{z2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 e_{z2}}{\partial x^2} - F_v e_{z2} - i \mu_{zz} F_{vg} h_{z2} = 0, \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 h_{z2}}{\partial x^2} - F_g h_{z2} + i \epsilon_{zz} F_{vg} e_{z2} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где безразмерные функции  $F_v$ ,  $F_g$  и  $F_{vg}$  имеют вид

$$\begin{aligned} F_v &= \frac{k_y^2}{k_0^2} + \frac{\epsilon_{zz} k_z^2}{\epsilon k_0^2} - \frac{\epsilon_{zz}}{\mu} (\mu^2 - v^2) = \\ &= \frac{k^2}{k_0^2} \left( \cos^2 \varphi + \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon} \sin^2 \varphi \right) - \epsilon_{zz} \mu_{\perp}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_g &= \frac{k_y^2}{k_0^2} + \frac{\mu_{zz} k_z^2}{\mu k_0^2} - \frac{\mu_{zz}}{\epsilon} (\epsilon^2 - g^2) = \\ &= \frac{k^2}{k_0^2} \left( \cos^2 \varphi + \frac{\mu_{zz}}{\mu} \sin^2 \varphi \right) - \mu_{zz} \epsilon_{\perp}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$F_{vg} = \frac{k_z}{k_0} \left( \frac{g}{\epsilon} + \frac{v}{\mu} \right) = \frac{k}{k_0} \sin \varphi \left( \frac{g}{\epsilon} + \frac{v}{\mu} \right). \quad (13)$$

Поясняя использованные обозначения, отметим, что обе недиагональные компоненты  $v$  и  $g$  тензоров  $\overline{\epsilon}_2$  и  $\overline{\mu}_2$  входят только в функцию  $F_{vg}$ , тогда как в функцию  $F_v$  входит только компонента  $v$ , а в функцию  $F_g$  — только  $g$ .

Подставляя величину  $h_{z2}$  из первого уравнения системы (10) во второе, получим дифференциальное уравнение относительно амплитуды  $e_{z2}$

$$\frac{\partial^4 e_{z2}}{\partial x^4} + 2\eta \frac{\partial^2 e_{z2}}{\partial x^2} + \alpha e_{z2} = 0, \quad (14)$$

где

$$\eta = -k_0^2 (F_v + F_g)/2, \quad (15)$$

$$\alpha = k_0^4 F_v F_g - \mu_{zz} \epsilon_{zz} k_0^4 F_{vg}^2. \quad (16)$$

Уравнению (14) соответствует характеристическое уравнение

$$k_{x2}^4 + 2\eta k_{x2}^2 + \alpha = 0, \quad (17)$$

которое имеет *четыре простых* (не кратных) корни:

$$\begin{aligned} k_{x21} &= \sqrt{-\eta - \sqrt{\eta^2 - \alpha}} = \\ &= k_0 \sqrt{\frac{F_v + F_g}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(F_v - F_g)^2 + 4\mu_{zz} \epsilon_{zz} F_{vg}^2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} k_{x22} &= \sqrt{-\eta + \sqrt{\eta^2 - \alpha}} = \\ &= k_0 \sqrt{\frac{F_v + F_g}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(F_v - F_g)^2 + 4\mu_{zz} \epsilon_{zz} F_{vg}^2}}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$k_{x23} = -k_{x21}, \quad (20)$$

$$k_{x24} = -k_{x22}. \quad (21)$$

Отметим, что корни  $k_{x21} \dots k_{x24}$  уравнения (17) не могут быть комплексными числами, поскольку его дискриминант всегда больше нуля (см. [25, ф-ла (18)]), а могут принимать лишь действительные или мнимые значения.

### 3. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ВОЛНЫ ВНУТРИ СЛОЯ

По аналогии с работами [23, 25] далее получим дисперсионное уравнение и выражения для компонент СВЧ-поля для случая, когда все корни  $k_{x21} \dots k_{x24}$  являются действительными, а общее решение дифференциального уравнения (14) имеет вид<sup>2</sup>, определяющий распределение волны по оси  $x$ :

$$e_{z2} = A \exp(k_{x21}x) + B \exp(-k_{x21}x) + C \exp(k_{x22}x) + D \exp(-k_{x22}x), \quad (22)$$

что соответствует поверхностно-поверхностной волне [25]; здесь  $A, B, C$  и  $D$  – независимые коэффициенты.

Подставляя соотношения (5) и (6) в уравнения Максвелла (3), производя дифференцирование и решив полученную систему уравнений, можно выразить зависящие от  $x$  амплитуды всех СВЧ-компонент через амплитуду  $e_{z2}$  и, с учетом (22), получить выражения для всех компонент СВЧ-поля:

$$E_{x2} = \frac{i}{\epsilon F_2} \left[ \frac{k_z}{k_0} (b_0 \Sigma_0 + F_{g2} \Sigma_1 + b_2 \Sigma_2 + F_{vg} \Sigma_3) - \frac{k_y}{k_0} F_2 \Sigma_2 - g (a_0 \Sigma_0 + F_{vg} \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 + F_{v2} \Sigma_3) \right] \times \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (23)$$

$$H_{x2} = \frac{1}{\mu F_2} \left[ \frac{k_y}{k_0} F_2 \Sigma_0 - \frac{k_z}{k_0} (a_0 \Sigma_0 + F_{vg} \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 + F_{v2} \Sigma_3) + v (b_0 \Sigma_0 + F_{g2} \Sigma_1 + b_2 \Sigma_2 + F_{vg} \Sigma_3) \right] \times \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (24)$$

$$E_{y2} = \frac{1}{F_2} [a_0 \Sigma_0 + F_{vg} \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 + F_{v2} \Sigma_3] \times \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (25)$$

$$H_{y2} = \frac{i}{F_2} [b_0 \Sigma_0 + F_{g2} \Sigma_1 + b_2 \Sigma_2 + F_{vg} \Sigma_3] \times \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (26)$$

$$E_{z2} = \Sigma_0(x) \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (27)$$

$$H_{z2} = i \Sigma_2(x) \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (28)$$

где зависящие от  $x$  безразмерные функции  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  и  $\Sigma_3$  имеют вид

$$\Sigma_0(x) = A \exp(k_{x21}x) + B \exp(-k_{x21}x) + C \exp(k_{x22}x) + D \exp(-k_{x22}x), \quad (29)$$

$$\Sigma_1(x) = \frac{k_{x21}}{k_0} (A \exp(k_{x21}x) - B \exp(-k_{x21}x)) + \frac{k_{x22}}{k_0} (C \exp(k_{x22}x) - D \exp(-k_{x22}x)), \quad (30)$$

$$\Sigma_2(x) = \beta_1 (A \exp(k_{x21}x) + B \exp(-k_{x21}x)) + \beta_2 (C \exp(k_{x22}x) + D \exp(-k_{x22}x)), \quad (31)$$

$$\Sigma_3(x) = \frac{k_{x21}}{k_0} \beta_1 (A \exp(k_{x21}x) - B \exp(-k_{x21}x)) + \frac{k_{x22}}{k_0} \beta_2 (C \exp(k_{x22}x) - D \exp(-k_{x22}x)). \quad (32)$$

Безразмерные величины, входящие в (23)–(32), определяют следующие выражения

$$F_2 = F_{v2} F_{g2} - F_{vg}^2, \quad (33)$$

$$F_{v2} = \frac{k_z^2}{\epsilon k_0^2} - \mu_{\perp}, \quad (34)$$

$$F_{g2} = \frac{k_z^2}{\mu k_0^2} - \epsilon_{\perp}, \quad (35)$$

$$a_0 = \frac{k_y k_z}{\mu k_0^2} F_{v2} - \frac{v k_y}{\mu k_0} F_{vg}, \quad (36)$$

$$a_2 = \frac{k_y k_z}{\epsilon k_0^2} F_{vg} - \frac{g k_y}{\epsilon k_0} F_{v2}, \quad (37)$$

$$b_0 = \frac{k_y k_z}{\mu k_0^2} F_{vg} - \frac{v k_y}{\mu k_0} F_{g2}, \quad (38)$$

$$b_2 = \frac{k_y k_z}{\epsilon k_0^2} F_{g2} - \frac{g k_y}{\epsilon k_0} F_{vg}, \quad (39)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\mu_{zz} F_{vg}} \left( F_v - \frac{k_{x21}^2}{k_0^2} \right), \quad (40)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\mu_{zz} F_{vg}} \left( F_v - \frac{k_{x22}^2}{k_0^2} \right). \quad (41)$$

Поясняя введенные обозначения, отметим, что цифровой индекс при величинах  $\Sigma$  соответствует максимальной степени  $x$ -компонент волновых чисел  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  в множителях при экспонентах в выражениях (29)–(32) (с учетом того, что величины  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  входят еще и в соотношения (40) и (41)).

<sup>2</sup> Другие формы записи решения дифференциального уравнения (14) рассмотрены в [25].

#### 4. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ВОЛНЫ ВНЕ СЛОЯ

По аналогии с работой [25] выражения для СВЧ-компонент электромагнитного поля СВ и в среде  $Z$  имеют вид

$$E_{x3} = \frac{i}{q_3} (Lk_y k_0 \mu_3 + Kk_z k_{x3}) \times \exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \quad (42)$$

$$H_{x3} = -\frac{1}{q_3} (Lk_z k_{x3} + Kk_y k_0 \epsilon_3) \times \exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \quad (43)$$

$$E_{y3} = \frac{1}{q_3} (Kk_y k_z + Lk_{x3} k_0 \mu_3) \times \exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \quad (44)$$

$$H_{y3} = \frac{i}{q_3} (Lk_y k_z + Kk_{x3} k_0 \epsilon_3) \times \exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \quad (45)$$

$$E_{z3} = K \exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \quad (46)$$

$$H_{z3} = iL \exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \quad (47)$$

где  $L$  и  $K$  – независимые коэффициенты, а  $q_3$  описывает выражение

$$q_3^2 = k_z^2 - k_0^2 \epsilon_3 \mu_3. \quad (48)$$

Очевидно, что для полупространства  $Z$  также справедливо соотношение

$$k_{x3}^2 = k_z^2 + k_y^2 - k_0^2 \epsilon_3 \mu_3. \quad (49)$$

#### 5. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН В БИГИРОТРОПНОМ СЛОЕ, ГРАНИЧАЩЕМ С ИДЕАЛЬНЫМ МЕТАЛЛОМ

Приступим теперь к выводу дисперсионного уравнения, описывающего распространение электромагнитных волн в бигиротропном слое, граничащем с идеально проводящим металлом (рис. 1). Используя граничные условия непрерывности тангенциальных компонент  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  и  $H_z$  при  $x = 0$  и граничные условия на поверхности металла ( $E_{y2} = 0$  и  $E_{z2} = 0$  при  $x = s$ ) с учетом выражений (25)–(28) и (44)–(47) для этих компонент, получим систему из шести уравнений для коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $K$ ,  $L$  (напомним, что коэф-

фициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  входят в выражения (29)–(32) для величин  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , и  $\Sigma_3$ ):

$$\begin{aligned} \Sigma_0(s) = 0, \quad a_0 \Sigma_0(s) + F_{vg} \Sigma_1(s) + a_2 \Sigma_2(s) + \\ + F_{v2} \Sigma_3(s) = 0, \quad K = \Sigma_0(0), \quad Kk_y k_z + Lk_{x3} k_0 \mu_3 = \\ = q_3^2 [a_0 \Sigma_0(0) + F_{vg} \Sigma_1(0) + a_2 \Sigma_2(0) + F_{v2} \Sigma_3(0)] / F_2, \quad (50) \\ L = \Sigma_2(0), \quad Lk_y k_z + Kk_{x3} k_0 \epsilon_3 = \\ = q_3^2 [b_0 \Sigma_0(0) + F_{g2} \Sigma_1(0) + b_2 \Sigma_2(0) + F_{vg} \Sigma_3(0)] / F_2. \end{aligned}$$

Исключая величины  $K$  и  $L$  из системы (50), подставляя первое уравнение во второе и группируя слагаемые с одинаковыми величинами  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$ , получим систему из четырех уравнений для коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_0(s) = 0, \quad F_{vg} \Sigma_1(s) + a_2 \Sigma_2(s) + F_{v2} \Sigma_3(s) = 0, \\ \left( a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 \right) \Sigma_0(0) + F_{vg} \Sigma_1(0) + \\ + \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 \right) \Sigma_2(0) + F_{v2} \Sigma_3(0) = 0, \quad (51) \\ \left( b_0 - \frac{\epsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 \right) \Sigma_0(0) + F_{g2} \Sigma_1(0) + \\ + \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 \right) \Sigma_2(0) + F_{vg} \Sigma_3(0) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в систему (51) выражения (29)–(32) и приводя подобные при коэффициентах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} d_{11}A + d_{12}B + d_{13}C + d_{14}D = 0, \\ d_{21}A + d_{22}B + d_{23}C + d_{24}D = 0, \\ d_{31}A + d_{32}B + d_{33}C + d_{34}D = 0, \\ d_{41}A + d_{42}B + d_{43}C + d_{44}D = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

где элементы  $d_{11} \dots d_{44}$  системы уравнений имеют вид

$$d_{11} = \exp(k_{x21}s), \quad (53)$$

$$d_{12} = \exp(-k_{x21}s), \quad (54)$$

$$d_{13} = \exp(k_{x22}s), \quad (55)$$

$$d_{14} = \exp(-k_{x22}s), \quad (56)$$

$$d_{21} = \left( a_2 \beta_1 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} + \frac{k_{x21}}{k_0} \beta_1 F_{v2} \right) \exp(k_{x21}s), \quad (57)$$

$$d_{22} = \left( a_2 \beta_1 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} - \frac{k_{x21}}{k_0} \beta_1 F_{v2} \right) \exp(-k_{x21}s), \quad (58)$$

$$d_{23} = \left( a_2 \beta_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} + \frac{k_{x22}}{k_0} \beta_2 F_{v2} \right) \exp(k_{x22}s), \quad (59)$$

$$d_{24} = \left( a_2 \beta_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} - \frac{k_{x22}}{k_0} \beta_2 F_{v2} \right) \exp(-k_{x22}s), \quad (60)$$

$$d_{31} = a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} + \beta_1 \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{v2} \right), \quad (61)$$

$$d_{32} = a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} + \beta_1 \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{v2} \right), \quad (62)$$

$$d_{33} = a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} + \beta_2 \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{v2} \right), \quad (63)$$

$$d_{34} = a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} + \beta_2 \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{v2} \right), \quad (64)$$

$$d_{41} = b_0 - \frac{\epsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{g2} + \beta_1 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} \right), \quad (65)$$

$$d_{42} = b_0 - \frac{\epsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{g2} + \beta_1 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} \right), \quad (66)$$

$$d_{43} = b_0 - \frac{\epsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{g2} + \beta_2 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} \right), \quad (67)$$

$$d_{44} = b_0 - \frac{\epsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{g2} + \beta_2 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} \right). \quad (68)$$

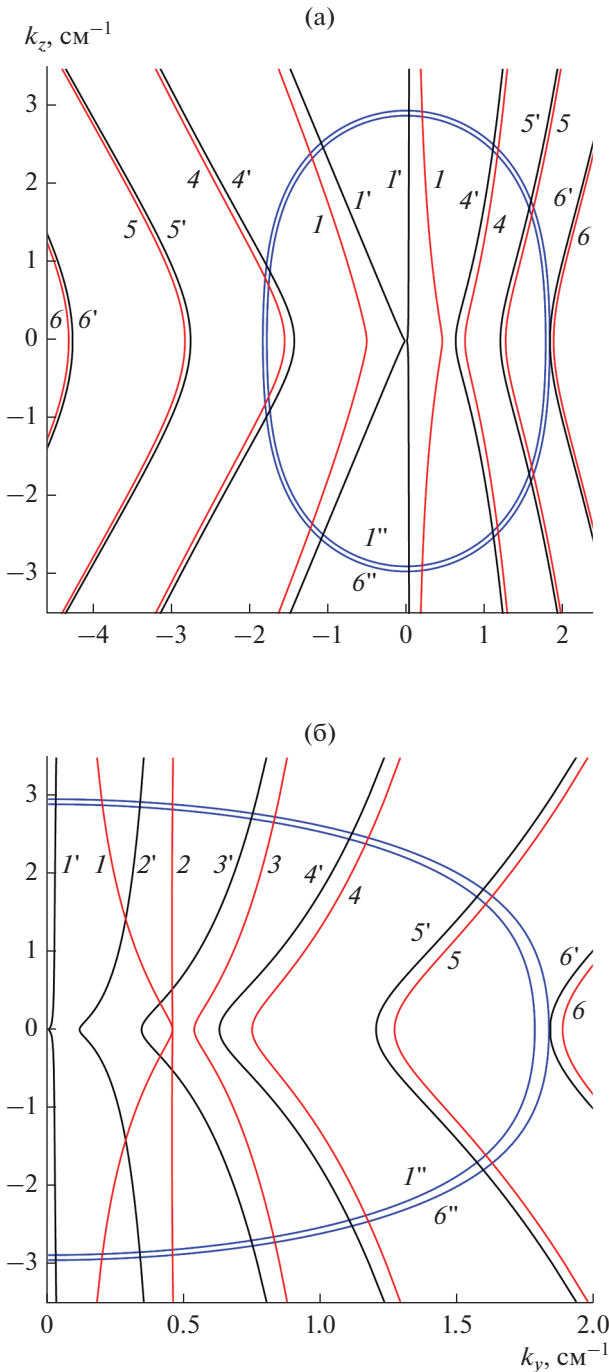
Итак, дисперсионное уравнение для электромагнитной волны, имеющей распределение вида (22) по толщине односторонне металлизированного бигиротропного слоя, представляет собой определитель четвертого порядка системы (52) с элементами  $d_{11} \dots d_{44}$ , определяемыми выражениями (53)–(68).

### 6. ХАРАКТЕРИСТИКИ СПИНОВЫХ ВОЛН В ФЕРРИТОВОЙ ПЛАСТИНЕ, ГРАНИЧАЩЕЙ С ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМ МЕТАЛЛОМ

Рассмотрим в качестве примера характеристики СВ в ферритовой пластине (являющейся частным случаем бигиротропного слоя), одна из поверхностей которой граничит с идеальным металлом (см. рис. 1). Будем считать диэлектрическую проницаемость пластины  $\epsilon_2$  скалярной величиной, полагая в представленных выше формулах  $\epsilon = \epsilon_{zz} = \epsilon_2$  и  $g = 0$ . На рис. 2 представлены изочастотные зависимости СВ для различных частот, причем кривые  $I$ – $3'$  рассчитаны для поверхностной СВ с использованием МСП, а кривые  $I$ – $3$  рассчитаны на основе полученного точного дисперсионного уравнения. Расчеты проводили при следующих параметрах:  $H_0 = 300$  Э,  $s = 40$  мкм,  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $\epsilon_2 = 15$  (что соответствует железиттриевому гранату) и  $\epsilon_3 = \mu_3 = 1$  (что соответствует вакууму).

Как видно из рис. 2а, изочастотные зависимости волн, имеющих положительные и отрицательные значения  $k_y$ , сильно различаются (как при описании волн в МСП, так и без него), что связано с несимметричностью структуры – металлизацией одной из поверхностей феррита (см. рис. 1). Кроме того, соответствующие кривые, рассчитанные с использованием МСП и без него, также заметно отличаются как количественно, так и качественно. Так, на рис. 2, кривая  $I$  для частоты  $f_1 = 2198$  МГц, чуть превышающей частоту ферромагнитного резонанса (ФМР) пластины  $f_{\perp} = \omega_{\perp}/2\pi = \sqrt{\omega_H^2 + \omega_H \omega_M}/2\pi = 2197.7$  МГц, выгнута в другую сторону при  $k_y > 0$  по сравнению с аналогичной кривой  $I'$ , рассчитанной в МСП. Однако кривая  $3$  для  $f_3 = 2210$  МГц и  $k_y > 0$  уже изогнута так же, как и соответствующая кривая  $3'$  (см. рис. 2б). Следовательно, для одной из промежуточных частот изочастотная кривая будет представлять собой практически прямую линию, что и подтвердили расчеты для частоты  $f_2 = 2202$  МГц (см. рис. 2б, кривая 2). Очевидно, что для прямой линии, параллельной оси  $k_z$ , угол  $\psi$ , описывающий ориентацию вектора групповой скорости  $\vec{V}$ , направлен вдоль оси  $y$ , и, значит, на частоте  $f_2 = 2202$  МГц вдоль оси  $y$  будут распространяться СВ со всеми волновыми векторами, у которых  $k_y > 0$ !

Таким образом, рис. 2 показывает, что изочастотные кривые, рассчитанные с МСП и без него заметно отличаются друг от друга лишь в области малых значений волнового числа ( $|k| \sim 3$  см<sup>-1</sup>), т.е. на частотах, близких к величине  $f_{\perp}$ . Кроме того, важным отличием является то, что при использовании МСП все СВ являются поверхностными, т.е. распределение СВ внутри ферритовой



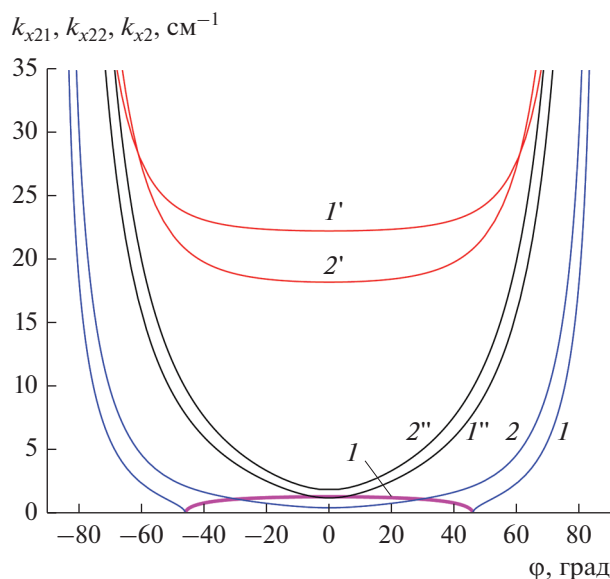
**Рис. 2.** Изочастотные зависимости СВ в касательно намагниченной ферритовой пластине для частот 2198 (1 и 1'), 2202 (2 и 2'), 2210 (3 и 3'), 2220 (4 и 4'), 2240 (5 и 5') и 2262 МГц (6 и 6'); а – общий вид, б – вид в полуплоскости  $k_y > 0$  (масштаб по оси абсцисс специально увеличен); кривые I'–б' рассчитаны в магнитостатическом приближении, кривые I–б – без него; показаны граничные эллипсоиды I'' и б'' для частот 2198 и 2262 МГц соответственно (эллипсоид I'' отделяет на кривой I участок с объемно-поверхностным и участки с поверхностно-поверхностным распределением волны).

пластины описывает *одно* волновое число  $k_{x2ms}$ , в то время как при описании СВ без МСП распределение СВ внутри ферритовой пластины описывает *два* волновых числа,  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$ , причем в данном случае  $k_{x22}$  всегда принимает действительные значения, а  $k_{x21}$  может принимать как действительные, так и мнимые значения (подробнее о возможных значениях величин  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  и возможных типах СВ в ферритовой пластине и структурах на ее основе см. [25, разд. 4]). На рис. 2 граничные кривые – эллипсоиды I'' и б'' – являются пересечением поверхности  $\alpha = 0$ , описываемой формулой (16), и плоскостью  $f = 2198$  и 2262 МГц. Эллипсоид I'', пересекая изочастотную зависимость I, делит ее на участки, лежащие внутри эллипсоида I'' и соответствующие объемно-поверхностному распределению волны, и участки, лежащие вне эллипсоида I'' и соответствующие поверхностно-поверхностному распределению волны (граничные эллипсоиды 2''...5'' для остальных частот лежат между эллипсоидами I'' и б'' и поэтому на рис. 2 не показаны). Эллипсоид б'' не пересекает соответствующую изочастотную зависимость б, поэтому все волны на этой частоте имеют поверхностно-поверхностное распределение по толщине пластины в соответствии с формулой (22).

Однако, если посмотреть, как вдоль изочастотных зависимостей изменяются волновые числа  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$ , характеризующие распределение СВЧ поля СВ по толщине ферритовой пластины, и сравнить это изменение с аналогичным изменением волнового числа  $k_{x2ms}$ , рассчитанного в МСП, то увидим значительные различия (см. рис. 3). Так, при углах  $\varphi$ , близких к углам отсечки волнового вектора, зависимости  $k_{x2ms}(\varphi)$  проходят вблизи кривых  $k_{x22}(\varphi)$ , а при  $\varphi = 0$  магнитостатические зависимости  $k_{x2ms}(\varphi)$  проходят вблизи кривых  $k_{x21}(\varphi)$ , причем разница в значениях  $k_{x22}(\varphi = 0)$  и  $k_{x21}(\varphi = 0)$  существенно зависит от частоты, меняясь от  $\sim 260 \text{ см}^{-1}$  при  $f = 2198 \text{ МГц}$  до  $\sim 15 \text{ см}^{-1}$  при  $f = 2262 \text{ МГц}$  (для частоты 2198 МГц зависимости  $k_{x21}(\varphi)$ ,  $k_{x22}(\varphi)$  и  $k_{x2ms}(\varphi)$  на рис. 3 не показаны).

Следует отметить, что при  $\varphi \sim 0$  величина  $k_{x21}$  (вблизи которой проходят магнитостатические зависимости  $k_{x2ms}(\varphi)$ ) реально не описывает распределение амплитуд СВЧ-поля СВ по толщине ферритовой пластины, поскольку, как видно из рис. 4, коэффициенты A и B (соответствующие волновому числу  $k_{x21}$ ) равны нулю при  $\varphi = 0$  и  $k_z = 0$ , т.е. в соответствии с формулами (23)–(32) основной вклад в это распределение при  $\varphi \sim 0$  вносят коэффициенты C и D и соответствующее им волновое число  $k_{x22}$ . Следовательно, в магнитостатическом приближении описание распределения СВ по толщине пластины с использованием МСП не-



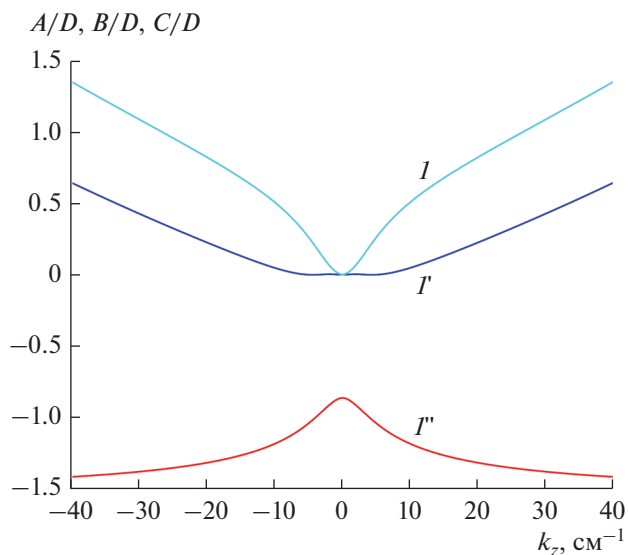


**Рис. 3.** Зависимости волновых чисел  $k_{x21}$  (кривые 1 и 2),  $k_{x22}$  (кривые 1' и 2') и  $k_{x2ms}$  (кривые 1'' и 2'') от угла  $\phi$ , задающего ориентацию волнового вектора, для частот 2240 (1, 1', 1'') и 2262 МГц (2, 2', 2''); эти зависимости соответствуют изменению величин  $k_{x21}$ ,  $k_{x22}$  и  $k_{x2ms}$  вдоль изочастотных кривых 5 и 6, расположенных в полуплоскости  $k_y > 0$  на рис. 2). На части кривой 1, подобной половинке эллипсоида (показана жирной линией),  $k_{x21}$  принимает мнимые значения, соответствующие объемно-поверхностной волне (для этой части кривой 1 по оси ординат показана величина  $|k_{x21}|$ ).

корректно для значительной части частотного интервала СВ, лежащего выше частоты ФМР  $f_{\perp}$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически, без использования магнито-статического приближения впервые решена общая задача о распространении электромагнитных волн в произвольном направлении в касательно намагниченном односторонне металлизированном бигиротропном слое, у которого диэлектрическая и магнитная проницаемости описываются эрмитовыми тензорами второго ранга. Показано, что, представляя решение уравнений Максвелла в виде распространяющейся в плоскости слоя волны вида  $\exp(-ik_y y - ik_z z)$  и оставляя произвольной зависимость волны от координаты  $x$ , нормальной плоскости слоя, можно привести уравнения Максвелла к линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое содержит лишь зависящую от  $x$  амплитуду электрического СВЧ-поля, параллельного вектору



**Рис. 4.** Зависимости отношений коэффициентов  $A/D$  (кривая 1),  $B/D$  (кривая 1') и  $C/D$  (кривая 1'') от волнового числа  $k_z$  для частоты 2262 МГц.

постоянного однородного магнитного поля  $\vec{H}_0$ . Установлено, что соответствующее биквадратное характеристическое уравнение, определяющее волновые числа распределения волны в поперечном сечении слоя, имеет четыре простых (не кратных) корня  $k_{x21}$ ,  $k_{x22}$ ,  $k_{x23} = -k_{x21}$  и  $k_{x24} = -k_{x22}$ , которые могут принимать только действительные или только мнимые значения. Для случая, когда величины  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  являются действительными числами, получено дисперсионное уравнение, описывающее распространение электромагнитных волн в односторонне металлизированном бигиротропном слое.

На основе построенной теории исследованы изочастотные зависимости и различные характеристики СВ в односторонне металлизированной ферритовой пластине (являющейся частным случаем бигиротропного слоя) для частот, лежащих выше частоты ферромагнитного резонанса пластины. Показано, что для этих волн величина  $k_{x21}$  может принимать как действительные, так и мнимые значения, а величина  $k_{x22}$  — только действительные. Обнаружено, что на некоторой частоте СВ имеет изочастотную кривую, практически не отличающуюся от прямой линии.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Topics in Applied Physics. V. 125. Magnonics: From Fundamentals to Applications / Ed. S.O. Demokritov, A.N. Slavin. Berlin: Springer-Verlag, 2013.
2. Никитов С.А., Калябин Д.В., Лисенков И.В. и др. // Успехи физ. наук. 2015. Т. 185. № 10. С. 1099.
3. Никитов С.А., Сафин А.Р., Калябин Д.В. и др. // Успехи физ. наук. 2020. Т. 190. № 10. С. 1009.
4. Pirro P., Vasyuchka V.I., Serga A.A., Hillebrands B. // Nat. Rev. Mater. 2021. V. 6. P. 1114.
5. Damon R.W., Eshbach J.R. // J. Phys. Chem. Sol. 1961. V. 19. № 3/4. P. 308.
6. Ваннэ Г.М. СВЧ устройства на магнитостатических волнах. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1984. Вып. 8. 80 с.
7. Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1993.
8. Данилов В.В., Зависляк И.В., Балинский М.Г. Спин-волновая электродинамика. Киев: Либідь, 1991.
9. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994.
10. Вендик О.Г., Калиникос Б.А., Митева С.И. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1981. Т. 24. № 9. С. 52.
11. Ruppri R. // J. Appl. Phys. 1987. V. 62. № 1. P. 11.
12. Вашковский А.В., Локк Э.Г. // РЭ. 2001. Т. 46. № 6. С. 729.
13. Вашковский А.В., Локк Э.Г. // РЭ. 2001. Т. 46. № 10. С. 1257.
14. Вашковский А.В., Локк Э.Г. // РЭ. 2002. Т. 47. № 1. С. 97.
15. Локк Э.Г. // РЭ. 2003. Т. 48. № 12. С. 1484.
16. Вашковский А.В., Локк Э.Г. // Успехи физ. наук. 2011. Т. 181. № 3. С. 293.
17. Вяткина С.А., Бабичев Р.К., Иванов В.Н. // Электромагнитные волны и электромагнитные системы. 2011. Т. 16. № 10. С. 64.
18. Вашковский А.В., Локк Э.Г. // РЭ. 2012. Т. 57. № 5. С. 541.
19. Локк Э.Г. // РЭ. 2014. Т. 59. № 7. С. 711.
20. Локк Э.Г. // РЭ. 2016. Т. 61. № 1. С. 35.
21. Локк Э.Г., Вашковский А.В. // РЭ. 2016. Т. 61. № 8. С. 746.
22. Локк Э.Г. // РЭ. 2017. Т. 62. № 3. С. 259.
23. Локк Э.Г., Луговской А.В., Герус С.В. // РЭ. 2021. Т. 66. № 7. С. 662.
24. Локк Э.Г., Луговской А.В., Герус С.В., Анненков А.Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 11. С. 1546.
25. Lock E.H., Gerus S.V. // arXiv.org/abs/2303.08800.
26. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Физматлит, 1960.