

УДК 514.87+514.112.4

## ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛОВ ИЗ ЗВЕЗД: ИНФЛЯЦИОННЫЙ И ДЕФЛЯЦИОННЫЙ ПОДХОДЫ

© 2019 г. А. А. Поляков\*

*Южно-Уральский государственный университет, 454080 Россия, Челябинск, пр. Ленина, 7*

*\*e-mail: poliakovaa@susu.ru*

Поступила в редакцию 07.07.2018

Рассматриваются инфляционный и дефляционный подходы к построению фракталов из правильных пятиконечных звезд. Предложены два вида описания данных подходов – абсолютный и относительный. Относительное описание позволяет сформулировать простую связь между этими подходами. Дефляционный подход: на каждом этапе построения фрактала правильные пятиконечные звезды одинакового размера и ориентации располагаются так, что их центры совпадают с вершинами многоугольников предыдущего шага. Размеры этих звезд на каждом шаге могут уменьшаться пропорционально целой степени золотого сечения. Инфляционный подход: предфрактал предыдущего шага размножается и полученные фигуры располагаются так, что их центры совпадают с вершинами правильной пятиконечной звезды, возрастающей в размере.

*Ключевые слова:* фракталы, пятиконечные звезды, квазипериодическая решетка.

DOI: 10.1134/S0235010619010158

### ВВЕДЕНИЕ

В 1984 г. Д. Шехтман опубликовал статью, в которой впервые были описаны икосаэдрические квазикристаллы [1]. Большинство открытых к настоящему времени квазикристаллов являются высокотемпературными фазами, они не стабильны при комнатных температурах. Их структура характеризуется квазипериодичностью, они упорядочены, но не периодичны. Примером двумерной квазипериодической решетки с пентагональной симметрией является мозаика Пенроуза [2]. Среди известных сейчас квазикристаллов заметную долю занимают декагональные квазикристаллы, при анализе структуры которых часто используют мозаику Пенроуза [3]. Изучение строения мозаики Пенроуза привело к обнаружению кластеров правильных пятиконечных звезд [4]. Позже было высказано предположение, что звезды в мозаике Пенроуза имеют фрактальную структуру [5], предложен вариант фракталов из звезд, которые позволяют повторить строение мозаики Пенроуза [6].

При описании классических фракталов используются два понятия – инициатор и генератор [7]. Инициатор – это фигура, которая трансформируется на каждом шаге, генератор показывает метод трансформации. Сходный подход используется при построении мозаики Пенроуза методом дефляции [8]. Дефляция ведет к бесконечному росту числа элементов, который сопровождается уменьшением их размеров. Мозаика Пенроуза может быть построена многими методами. Один из таких методов – метод инфляции – позволяет получать структуру из элементов тех же размеров, при этом структура растет бесконечно. По аналогии с ними были предложены два подхода к конструированию фракталов из пятиконечных звезд: инфляционный и дефляционный [6].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

*Дефляционный метод построения фракталов из пятиконечных звезд*

В качестве строительных элементов на каждом этапе построения фрактала используются правильные пятиконечные звезды, которые характеризуются размерным числом  $N_k$  и ориентацией  $c_k$ . Ориентация звезд может быть двух типов, которые обозначены буквами “w” и “b”. Эти ориентации связаны между собой операцией инверсии относительно точки.

Размеры строительных элементов – правильных пятиконечных звезд на каждом этапе могут быть описаны выражением

$$a_k = a_0 \tau^{-N_k},$$

где  $a_0$  – размер исходной звезды,  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$  – “золотое сечение”,  $N_k$  – неотрицательное целое число.

Звезды, имеющие ориентацию “w” или “b”, размножаются и располагаются так, что их центры совпадают с вершинами звезд предыдущего шага. Точки предыдущего шага удаляются. Совпадающие вершины звезд учитываются один раз. Фрактал описывается рядом размерных чисел и ориентаций

$${}^{da} N_0 c_0 N_1 c_1 N_2 c_2 \dots N_k c_k \dots$$

Заметим, что ряд размерных чисел выбирается неубывающим.

*Инфляционный метод построения фракталов из пятиконечных звезд*

При построении фрактала этим методом, размер минимальных звезд не изменяется и остается равным  $a_0$ . Ориентация минимальных  $c_0$  звезд также не изменяется. Предложено понятие *обобщенной* звезды. Это правильная пятиконечная звезда размера

$$a_k = a_0 \tau^{+N_k},$$

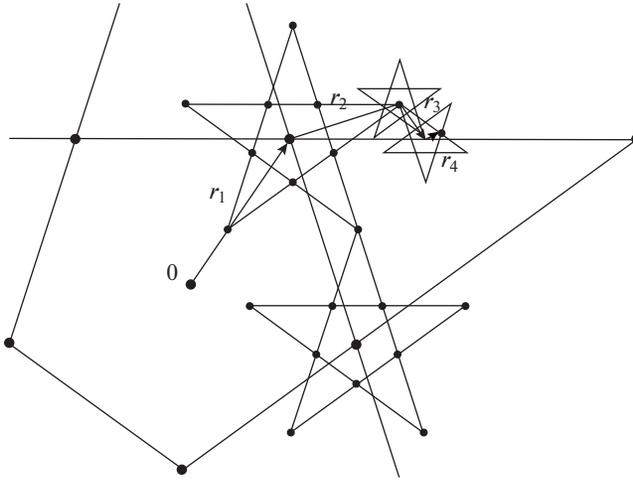
где  $N_k$  – неотрицательное целое число, которое также назовем размерным числом, ряд чисел также  $N_k$  образует неубывающую последовательность. Обобщенная звезда не отображается. При построении предфрактала, кластер звезд размера  $a_0$  (предфрактал предыдущего шага) размножается и располагается так, что центры кластеров совпадают с 10 вершинами обобщенной звезды. Совпадающие вершины минимальных звезд учитываются один раз. Обобщенная звезда на каждом этапе построения характеризуется ориентацией  $c_k$ . Эта ориентация совпадает или противоположна ориентации звезд, из которых построен фрактал. Полученный фрактал также может быть описан рядом размерных чисел и ориентаций

$${}^{ia} N_0 c_0 N_1 c_1 N_2 c_2 \dots N_k c_k \dots$$

Здесь  $N_0, c_0$  относятся к минимальной звезде;  $N_i, c_i$  ( $i \geq 1$ ) – характеристики обобщенной звезды. Этот подход отличается от дефляционного тем, что фрактал увеличивается, но размер строительных элементов не изменяется.

*Связь между инфляционным и дефляционным подходами*

Можно точно совместить полученные множества, если рассматривать ограниченное число шагов построения фракталов, то есть можно показать совпадение полученных предфракталов порядка  $k$ . Для этого необходимо совпадение размера и ориентации минимальных звезд. Это значит, что звезды начального шага инфляционного описания должны совпадать со звездами конечного шага дефляционного подхода.



**Рис. 1.** Координаты точки четвертого предфрактала в дефляционном описании: получены суммированием четырех векторов, соединяющих центр и вершину минимальной звезды каждого шага.

С целью сравнения методов построения, каждый подход можно описать двумя способами: *абсолютным* и *относительным*. Подходы, описанные выше, назовем *абсолютными*. В *относительном* описании, в качестве размерного числа, используется разность:

$$N_k = {}^a N_k - {}^a N_{k-1},$$

где индекс  $a$  обозначает абсолютное описание.

Размер звезды вычисляется следующим образом:

$$a_k = a_{k-1} \tau^{\pm N_k},$$

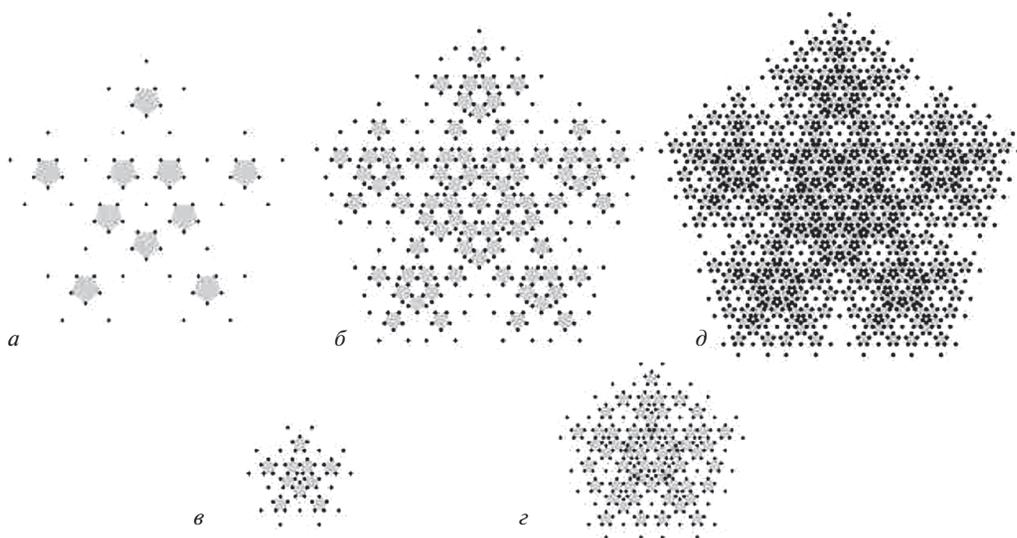
здесь знак минус соответствует дефляционному описанию, а плюс — инфляционному.

Ориентацию звезды  $c_i$  в относительном описании обозначим символом “ $w$ ”, если совпадают ориентации звезд  $i$  и  $i - 1$  шагов в абсолютном описании, иначе — символом “ $b$ ”.

В чем польза от относительной записи? Такая запись позволяет выделить степень самоподобия фракталов. При бесконечном повторении характеристик  $N_i$  и  $c_i$  будут получены наиболее самоподобные фракталы, при случайных  $N_i$  и  $c_i$  — наименее самоподобные.

Каким образом можно сравнить инфляционный и дефляционный подходы? Точки фрактала (вершины звезд минимального размера) появляются в результате суммирования векторов, соединяющих центр и вершину звезды каждого шага построения (см. рис. 1). Можно показать, что переход от инфляционного к дефляционному подходу и обратно обозначает просто изменение порядка суммирования на противоположный:

$$\mathbf{R}_k = \sum_{i=0}^K \mathbf{r}_i = \sum_{i=K}^0 \mathbf{r}_i.$$



**Рис. 2.** Построение предфрактала  ${}^d0w2w1w1b$  дефляционным методом:  $a - {}^d0w2w$ ,  $б - {}^d0w2w1w$ ,  $д - {}^d0w2w1w1b$ . Построение предфрактала  ${}^d0w2w1w1b$  инфляционным методом:  $в - {}^i0b1b$ ,  $з - {}^i0b1b1w$ ,  $д - {}^i0b1b1w2w$ .

Пусть число шагов ограничено числом  $K$  (мы рассматриваем предфрактал порядка  $K$ ), тогда

$${}^iN_j = {}^dN_{K-j+1},$$

$${}^ic_j = {}^dc_{K-j+1}.$$

Здесь индекс  $j$  изменяется в пределах  $1 \leq j \leq K$ , индекс  $i$  обозначает относительное инфляционное описание, а индекс  $d$  – относительное дефляционное описание фрактала. Размерные числа и ориентация нулевого шага остаются неопределенными при относительном описании, их можно выбрать совпадающими с таковыми для абсолютного описания.

В случае собственно фрактала, то есть бесконечного множества точек, такие соотношения не могут быть записаны, однако, если, например, взять фрактал с постоянным размерным числом и ориентацией в относительной записи, то можно говорить о подобии таких фракталов.

На рис. 2 показан предфрактал  ${}^d0w2w1w1b$ , полученный дефляционным (шаги  $a, б, д$ ) и инфляционным методом (шаги  $в, з, д$ ). В обоих случаях выбрано относительное описание фракталов.

### ВЫВОДЫ

1. Рассмотрены два подхода к построению фракталов из звезд, один из которых позволяет получить структуры с уменьшающимися элементами. Второй, инфляционный подход позволяет строить растущие структуры с элементами постоянного размера.

2. Рассмотрены два пути описания таких фракталов: абсолютный и относительный. В относительном описании подчеркиваются свойства структуры.

3. Показана простая связь между характеристиками относительного инфляционного и относительного дефляционного подходов: ряды характеристик фрактала записываются в противоположном направлении.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shechtman D. Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry // *Phys. Rev. Lett.* 1984. **53**. № 20. P. 1951–1953.
2. Penrose R. Pentaplexity: A Class of Nonperiodic Tilings of the Plane // *Eureka*. 1978. **39**. P. 16–22.
3. Kuczera P. High-temperature structural study of decagonal Al–Cu–Rh // *Acta Crystallogr. B*. 2014. **70**. P. 306–314.
4. Polyakov A. A. Presentation of Penrose tiling as set of overlapping pentagonal stars // *J. of Physics: Conference Series*. 008. **98**. 012025.
5. Polyakov A. A. Fractal structures of regular pentagonal stars in Penrose tiling // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2012. № 8. P. 719–722.
6. Polyakov A. A. Constructing of Penrose tiling by means of the fractal of five-pointed stars // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2016. № 2. P. 148–150.
7. Mandelbrot B. *The fractal geometry of nature*. 2010, 468 p.
8. Henley C. L. Sphere packing and local environments in Penrose tiling // *Phys. Rev. B*. 1986. **34**. № 2. P. 797–816.

### The Fractals of Five-Pointed Stars: Deflationary and Inflationary Approaches

*A. A. Polyakov*

*South Ural State University, 454080 Russia, Chelyabinsk, Lenin ave., 76*

Inflationary and deflationary approaches to the constructing fractals from regular five-pointed stars are considered. Two types of descriptions of these approaches are proposed: absolute and relative. The relative description allows to formulate a simple connection between these approaches. Deflationary approach: at each stage of building a fractal, regular five-pointed stars of the same size and orientation are arranged so that their centres coincide with the vertices of the polygons of the previous step. The size of these stars at each step can be reduced in proportion to the integer degree of the golden mean; the orientation may coincide or be opposite to the orientation of the stars of the previous step. Inflationary approach: the prefractal of the previous step replicates, and the resulting figures are arranged so that their centres coincide with the vertices of a regular five-pointed star, increasing in size.

*Keywords:* fractals, quasiperiodic lattice, quasicrystals

#### REFERENCES

1. Shechtman D. Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry // *Phys. Rev. Lett.* 1984. **53**. № 20. P. 1951–1953.
2. Penrose R. Pentaplexity: A Class of Nonperiodic Tilings of the Plane // *Eureka*. 1978. **39**. P. 16–22.
3. Kuczera P. High-temperature structural study of decagonal Al–Cu–Rh // *Acta Crystallogr. B*. 2014. **70**. P. 306–314.
4. Polyakov A.A. Presentation of Penrose tiling as set of overlapping pentagonal stars // *J. of Physics: Conference Series*. 008. **98**. 012025.
5. Polyakov A.A. Fractal structures of regular pentagonal stars in Penrose tiling // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2012. № 8. P. 719–722.
6. Polyakov A.A. Constructing of Penrose tiling by means of the fractal of five-pointed stars // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2016. № 2. P. 148–150.
7. Mandelbrot B. *The fractal geometry of nature*. 2010, 468 p.
8. Henley C.L. Sphere packing and local environments in Penrose tiling // *Phys. Rev. B*. 1986. **34**. № 2. P. 797–816.