
УДК 536.421.4

К ОТБОРУ УСТОЙЧИВОЙ МОДЫ РОСТА ДЕНДРИТНОГО КРИСТАЛЛА В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

© 2021 г. Л. В. Торопова^{а, *}, Д. В. Александров^а, П. К. Галенко^а

^аУральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

*e-mail: dmitri.alexandrov@urfu.ru

Поступила в редакцию 25.10.2019 г.

После доработки 21.05.2020 г.

Принята к публикации 17.07.2020 г.

Проведено теоретическое исследование квазистационарного процесса устойчивого роста анизотропного дендрита в условиях конвективного тепло- и массопереноса в расплаве. На основе теории морфологической устойчивости и теории микроскопической разрешимости выведено отборное соотношение для скорости роста вершины дендрита и ее диаметра в случае конвективного тепло-массопереноса, определяющее устойчивый рост дендритного кристалла с симметрией n -ого порядка. Выполнен сравнительный анализ полученного отборного соотношения с теоретической моделью при кондуктивных граничных условиях и экспериментальными данными по кинетике роста дендритов в сплаве $Ti_{45}Al_{55}$.

Ключевые слова: дендриты, тепло-массоперенос, критерий отбора, фазовые переходы, конвекция

DOI: 10.31857/S0235010621040095

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что процессы фазового превращения из жидкого (расплавленного) состояния материала в его твердое состояние определяют свойства и микроструктуру получаемых веществ, а также характеризуют сам процесс перехода, его продолжительность и стадии протекания [1–12]. Дендритный рост из расплавленного переохлажденного состояния вещества является одним из часто встречающихся типов фазовых превращений, протекающих в различных областях науки: от физики конденсированного состояния и материаловедения до процессов получения различных соединений в химической промышленности. Это обуславливает практическую важность изучения различных механизмов роста дендритных кристаллов в переохлажденных расплавах и пересыщенных растворах.

Изучением механизмов устойчивого роста дендритных кристаллов в чистых и бинарных расплавах занимаются уже несколько десятилетий. Одной из важных задач, решенных за это время, стала теория отбора устойчивого режима роста вершины изолированного дендрита в условиях кондуктивного механизма тепло- и массопереноса [13–23], развитая для небольших и умеренных переохлаждений (скоростей роста дендритных кристаллов). Затем эта теория была обобщена на случай быстрого дендритного роста в бинарных расплавах при больших переохлаждениях [24–26]. Однако, обтекание жидкостью дендритных кристаллов может быть настолько интенсивным, что механизм тепло-массопереноса станет конвективным [27–29]. Исследованию влияния этого механизма на устойчивый рост дендритных кристаллов посвящена настоящая работа. А именно, в ней проводится исследование устойчивой моды дендритного

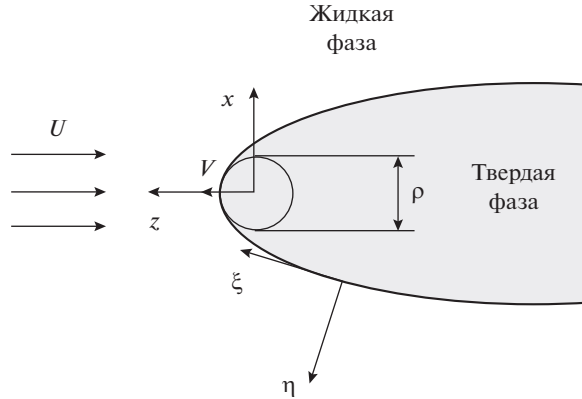


Рис. 1. Схема растущего дендритного кристалла во встречном потоке жидкости.

роста при различных кристаллических симметриях и реализации конвективного механизма тепломассопереноса вблизи поверхности растущего дендрита с симметрией n -ого порядка.

МОДЕЛЬ РОСТА КРИСТАЛЛА

Рассмотрим процесс роста изолированного дендрита в потоке жидкости, который описывается нелинейной тепло-концентрационной задачей Стефана с подвижной границей фазового перехода [30]. Температура жидкой и твердой фаз T и распределение примеси в бинарной системе описываются уравнениями теплопроводности и диффузии, которые записываются в системе координат, движущейся с постоянной скоростью. В этой системе координат дендрит находится в состоянии покоя (рис. 1)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \nabla)T = D_T \nabla^2 T, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + (w \cdot \nabla)C = D_C \nabla^2 C, \quad (1)$$

где D_T — коэффициент теплопроводности, C — концентрация примеси, D_C — коэффициент диффузии примеси, а \vec{w} — скорость, связанная с пересадкой в подвижную систему отсчета растущего кристалла.

Далее учитываем, что температурное поле на границе фазового перехода (на поверхности дендрита) непрерывно и удовлетворяет соотношению Гиббса–Томсона

$$T = T_l = T_s = T_0 - \frac{Qd(\theta)}{c_p R} - \tilde{\beta}(\theta)\vec{v} \cdot \vec{n}, \quad (2)$$

где нижние индексы l и s обозначают температуру с жидкой и твердой стороны границы дендрита, соответственно, T_0 — температура кристаллизации чистого расплава (без примеси), Q — скрытая теплота, выделяемая на единицу объема твердого тела, c_p — удельная теплота, $1/R$ — локальная кривизна фронта, \vec{v} — скорость межфазной поверхности, \vec{n} — единичный вектор к поверхности дендрита, $d(\theta)$ и $\tilde{\beta}(\theta)$ — анизотропная капиллярная длина и анизотропный кинетический коэффициент роста, представленные как [29]

$$d(\theta) = d_0 \{1 - \alpha_d \cos[4(\theta - \theta_d)]\}, \quad (3)$$

$$\tilde{\beta}(\theta) = \beta_0 T_Q \{1 - \alpha_\beta \cos[4(\theta - \theta_\beta)]\}, \quad (4)$$

где $T_Q = Q/c_p$, θ – угол между нормалью к границе дендрита и его направлением роста, d_0 и β_0 являются капиллярной и кинетической константами, $\alpha_d \ll 1$ и $\alpha_\beta \ll 1$ – параметры анизотропии, а θ_d и θ_β – углы между направлением роста и направлениями минимальных функций $d(\theta)$ и $\beta(\theta)$.

При существенном конвективном перемешивании расплава вблизи поверхности дендрита скорость его движения зависит от конвективного потока тепла и массы в жидкой фазе. В этом случае граничные условия баланса тепла и массы могут быть записаны, как [22, 28, 31–34]

$$\frac{T_Q}{D_T} \vec{v} \cdot \vec{n} = \nabla T_s \cdot \vec{n} + \frac{\alpha_h \rho_l c_l u_*}{k_s} (T_i - T_\infty), \quad (1 - k_0) C_i \vec{v} \cdot \vec{n} = \alpha_m u_* (C_i - C_\infty), \quad (5)$$

где индекс i обозначает температуру растворенного вещества на границе дендрита, α_h и α_m являются конвективными коэффициентами тепла и массы, ρ_l и c_l – плотность и удельная теплоемкость жидкой фазы, k_s – коэффициент теплопроводности твердой фазы, T_∞ и C_∞ – температура и концентрация вдали от дендрита, а u_* – скорость трения жидкости о межфазную поверхность.

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФОРМ

Примем, что дендрит параболической формы растет с постоянной скоростью V вдоль пространственной оси z . Двумерный рост можно описать с помощью специальных параболических координат ξ и η , которые связаны с декартовыми координатами x и z соотношениями (рис. 1)

$$\begin{aligned} x &= \rho \sqrt{\xi \eta}, \\ 2D: \quad z &= \frac{\rho}{2} (\eta - \xi). \end{aligned} \quad (6)$$

В случае трехмерной геометрии рост кристалла описывается параболоидальными координатами ξ , η , и ϕ , связанными с декартовыми координатами x , y и z соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \rho \sqrt{\xi \eta} \cos \phi, \\ 3D: \quad y &= \rho \sqrt{\xi \eta} \sin \phi, \\ z &= \frac{\rho}{2} (\eta - \xi). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\rho/2$ представляет радиус вершины дендрита, а межфазная граница находится при $\eta = 1$.

Пройтнегрируем уравнения (1) в координатах (6) и (7). Принимая во внимание граничные условия (5). В результате получим следующие решения задачи в жидкой фазе, зависящие только от η

$$T(\eta) = T_i + (T_\infty - T_i) \frac{I_T(\eta)}{I_T(\infty)}, \quad C(\eta) = C_i + (C_\infty - C_i) \frac{I_C(\eta)}{I_C(\infty)}, \quad (8)$$

где

$$I_T(\eta) = \int_1^\eta \frac{\exp(-P_s \eta')}{\eta'^j} d\eta', \quad I_C(\eta) = \int_1^\eta \frac{\exp(-P_C \eta')}{\eta'^j} d\eta', \quad (9)$$

$P_g = \rho V / (2D_T)$ представляет собой число Пекле, $j = 1/2$ и $j = 1$ в случае двумерного и трехмерного роста соответственно, и

$$T_i = T_\infty + \frac{T_Q V k_s}{\alpha_m \rho_l c_l u_* D_T}, \quad C_i = \frac{\alpha_m u_* C_\infty}{\alpha_m u_* - (1 - k_0) V}. \quad (10)$$

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

При достаточно малых анизотропиях поверхностного натяжения аналитические решения, описывающие рост дендрита с постоянной скоростью, могут быть найдены в окрестности классических решений параболического дендрита Иванцова [35–37]. Для этого необходимо использовать условие микроскопической разрешимости, представляющее собой интегральное выражение для определения устойчивого режима дендритного роста с заданной симметрией кристаллической решетки, которая учитывает анизотропию преимущественного направления роста кристалла. Это условие принимает следующий вид [14–16]

$$\int_{-\infty}^{\infty} G[X_0(l)] Y_m(l) dl = 0, \quad Y_m(l) = \exp \left[i \int_0^l k_m(l_1) dl_1 \right], \quad (11)$$

где G – оператор кривизны, $k_m(l)$ – маргинальная мода волнового числа дисперсионного уравнения для возмущений, i – мнимая единица и $X_0(l)$ – континуум решений, ведущих к $k_m(l)$.

Найдем критическое значение волнового числа k_m , воспользовавшись результатами анализа линейной устойчивости в соответствии с теорией работ [13, 16, 30, 38].

Введем локальные декартовы координаты x_c и y_c , связанные с дендритом, которые соответственно обозначают тангенциальную и нормальную оси к межфазной поверхности в точке, где вектор нормали к поверхности образует угол θ с осью роста.

Уравнение для температурных $T' = T - \bar{T}$ и $C' = C - \bar{C}$ концентрационных возмущений, которые следует из (1) и (2), принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x_c} + \bar{v} \frac{\partial T'}{\partial y_c} + v' \frac{d\bar{T}}{dy_c} &= D_T \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x_c^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y_c^2} \right), \\ \frac{\partial C'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial C'}{\partial x_c} + \bar{v} \frac{\partial C'}{\partial y_c} + v' \frac{d\bar{C}}{dy_c} &= D_C \left(\frac{\partial^2 C'}{\partial x_c^2} + \frac{\partial^2 C'}{\partial y_c^2} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\bar{u} = -V \sin \theta$, $\bar{v} = -V \cos \theta$ [16, 30].

В соответствии с теорией, которая была сформулирована в работах [16, 30], для дендритного роста в ламинарном вынужденном потоке, возмущения полей температуры T' и концентрации C' на поверхности дендрита ξ' можно найти в виде

$$\begin{aligned} T_l' &= (T_{l0} + T_{l1} y_c + T_{l2} y_c^2) E(t, x_c, y_c), \quad T_s' = (T_{s0} + T_{s1} y_c + T_{s2} y_c^2) E(t, x_c, y_c), \\ C' &= (C_0 + C_1 y_c + C_2 y_c^2) E(t, x_c, y_c), \quad \xi' = \Sigma \exp(\omega t + i k x_c), \end{aligned} \quad (13)$$

где $E(t, x_c, y_c) = \exp(\omega t + i k x_c - \varepsilon k y_c)$, ω и k – частота и волновое число возмущений, параметр ε имеет тот же знак, что и действительная часть k , $\partial \xi' / \partial t = -v'$, индексы l и s обозначают решения в жидкой и твердой фазах. Здесь T_{lj} , T_{sj} , C_j и Σ представляют собой амплитуды возмущений ($j = 0, 1, 2$).

Подставим теперь (13) в (12) и свяжем коэффициенты амплитуд соотношениями

$$\begin{aligned} T_{l,s2} &= \frac{\omega \Sigma}{4D_T} \frac{d\bar{T}_{l,s}}{dy_c}, \quad T_{l,s1} = \frac{3\omega \Sigma}{4\epsilon k D_T} \frac{d\bar{T}_{l,s}}{dy_c} - \frac{[\omega + Vk(\epsilon \cos \theta - i \sin \theta)] T_{l,s0}}{2\epsilon k D_T}, \\ C_2 &= \frac{\omega \Sigma}{4D_C} \frac{d\bar{C}}{dy_c}, \quad C_1 = \frac{3\omega \Sigma}{4\epsilon k D_C} \frac{d\bar{C}}{dy_c} - \frac{[\omega + Vk(\epsilon \cos \theta - i \sin \theta)] C_0}{2\epsilon k D_C}. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что решение (14) переходит к соответствующему выражению в [30, 39] в предельном случае нулевой скорости ламинарного течения, исследованного в [30, 39]. Производные $d\bar{T}_l/dy_c = h_1$ и $d\bar{C}/dy_c = h_2$ на поверхности дендрита, входящие в (14), можно найти из стационарных решений (8)–(10). В этом случае они принимают следующий вид

$$h_1 = -\frac{2T_0 V k_s \exp(-P_g)}{\rho \alpha_{h\rho} c_i \mu_* D_T I_T(\infty)}, \quad h_2 = -\frac{2(1-k_0) V C_\infty \exp(-P_C)}{\rho [\alpha_m \mu_* - (1-k_0)V] J_C(\infty)}. \quad (15)$$

Теперь, возмущая граничные условия (2) и (5), приходим к следующим условиям для температурных и концентрационных возмущений на поверхности дендрита (при $y_c = 0$)

$$T_l' = -(h_1 + mh_2)\xi' - mC' - dT_Q \frac{\partial^2 \xi'}{\partial y_c^2} + \tilde{\beta} \frac{\partial \xi'}{\partial t}, \quad (16)$$

$$T_s' = mh_2 \xi' + mC' + dT_Q \frac{\partial^2 \xi'}{\partial y_c^2} - \tilde{\beta} \frac{\partial \xi'}{\partial t}, \quad \frac{T_Q}{D_T} \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{\partial T_s'}{\partial y_c} - 2bh_1 \xi' - 2bT_l', \quad (17)$$

$$\frac{1-k_0}{\alpha_m \mu_*} \left(V \cos \theta C' + V \cos \theta h_2 \xi' + C_i \frac{\partial \xi'}{\partial t} \right) + C' + h_2 \xi' = 0, \quad (18)$$

где $b = \alpha_h \rho c_i \mu_* / (2k_s)$.

Подстановка возмущений (13) в граничные условия (16)–(18) приводит к трем уравнениям для амплитуд возмущений T_{l0} , T_{s0} , C_0 и Σ . Далее, приравняв детерминант этой системы к нулю, получим дисперсионное уравнение для функции $\omega(k)$.

Рассмотрим систему координат, движущуюся в направлении нормали к межфазной границе дендрита со скоростью $V \cos \theta$. Вследствие вращательной симметрии системы возмущение с волновым числом k возрастает со скоростью $\omega(k)$. Однако если начало системы координат движется вдоль оси z с постоянной скоростью V , то скорость роста возмущения принимает вид $\omega(k) - iVk \sin \theta$ вследствие наличия тангенциальной скорости в новой системе координат $V \sin \theta$ [16]. Поэтому, делая замену $\omega(k)$ на $-iVk \sin \theta$ на кривой нейтральной устойчивости (где ω обращается в нуль) и полагая $\epsilon = -1$, а также заменяя i на $-i$ [3, 16, 30, 38], получим следующее уравнение для маргинальной моды волнового числа $k = k_m$

$$k^2 + \left(2b - \frac{i\tilde{\beta} V \sin \theta}{d} - \frac{iB \sin \theta}{dA} \right) k - \frac{2bi\tilde{\beta} V \sin \theta}{d} - \frac{iV \sin \theta}{D_T d} - \frac{2biB \sin \theta}{dA} = 0, \quad (19)$$

где

$$A = 1 + \frac{(1-k_0)V \cos \theta}{\alpha_m \mu_*}, \quad B = \frac{(1-k_0)mC_i V}{\alpha_m \mu_* T_Q}, \quad \tilde{\beta}(\theta) = \frac{\tilde{\beta}(\theta)}{T_Q}.$$

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОГО РОСТА ВЕРШИНЫ ДЕНДРИТА

Критерий отбора для термически контролируемого роста в однокомпонентной системе

Из уравнения (19) находим следующее выражение для волнового числа

$$k = -b\sqrt{1 + \frac{iqV \sin \theta}{bd}} - b + \frac{i\beta V \sin \theta}{2d}, \tag{20}$$

где $\alpha_\beta \ll 1$; скорость роста V по порядку величины не превосходит 10 м/с и $q = \beta_0 + 1/(bD_T)$.

Далее подставляем k из (20) в условие разрешимости (11) при малых параметрах анизотропии ($\alpha_d \ll 1$ и $\alpha_\beta \ll 1$) и нулевом угле между направлением роста и минимумом поверхностной энергии ($\theta_d = 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi G[X_0(\eta(\varphi))] \exp \left\{ \int_{1/\sqrt{2\alpha_d}}^{\varphi} \left[\frac{2^{3/n} \rho^2 b q V \alpha_d^{5/n} A^{5/n} (\varphi^{(n+1)/2} - \tilde{\tau} \varphi^{n/2} - 1)}{d_0(1 - \varphi^{n/2})} + \frac{\rho A_n^{2/n}}{2^{(3n+4)/4}} \sqrt{\alpha_d} \alpha_d^{(n-4)/2n} d_0 \left(2^{(3n+7)/4} \alpha_d^{(n+1)/2n} A_n^{1/n} b d_0 \sqrt{\varphi} + 2^{3n/4} \beta_0 V \alpha_\beta \right) \right] d\varphi' \right\}, \tag{21}$$

где введены следующие обозначения (см. также [14, 16, 19, 30])

$$\tilde{\tau} = \tau A_n^{1/n} \alpha_d^{\frac{(n-1)(n-4)}{4n}}, \quad \tau = \frac{2^{3/4} \alpha_d^{(5-n)/4} b d_0}{qV}.$$

Отборное соотношение (21) может быть вычислено в соответствии с предыдущей теорией, развитой в работах [14, 16, 19, 30, 38]. Необходимо отметить два главных вклада в этот интеграл: вклад от петли и вклад от стационарных фазовых точек.

Первый вклад может быть рассчитан между расстоянием $\sim \tau^{2/3}$ (расстояние между стационарными фазовыми точками) на пересечении резкой траектории спуска и вещественной оси и $\phi^1 \sim 1$. Это условие приводит к осциллирующему фактору экспоненциально малой величины интеграла

$$\cos \left[A_1 \sqrt{\frac{\rho^2 \alpha_d^{5/n} A_n^{5/n} D_T b q V}{d_0}} \left(1 + B_1 \tilde{\tau}^{\frac{n+5}{2(n-1)}} \right) + \frac{2a_1}{3} \tilde{\tau}^{\frac{3}{n-1}} + a_2 \tilde{\tau}^{\frac{2}{n-1}} \right], \tag{22}$$

$$a_1 = 2^{5/4} A_n^{3/n} \alpha_d^{3/n} \rho b, \quad a_2 = \frac{\alpha_\beta A_n^{2/n} \rho \beta_0 V}{\sqrt{2d_0} \alpha_d^{n-2}}.$$

Вклад от стационарных фазовых точек имеет следующую осциллирующую часть

$$\cos \left[A_2 \sqrt{\frac{\rho^2 \alpha_d^{5/n} A_n^{5/n} D_T b q V}{d_0}} \left(1 + B_2 \tilde{\tau}^{\frac{n+5}{2(n-1)}} \right) + \frac{2a_1}{3} \left(1 - \tilde{\tau}^{\frac{3}{n-1}} \right) + a_2 \left(1 - \tilde{\tau}^{\frac{2}{n-1}} \right) \right]. \tag{23}$$

Здесь A_1, A_2, B_1 и B_2 – константы. Зануление суммы вкладов (22) и (23) определяет критерий отбора для термо-контролируемого дендритного роста с симметрией n -ого порядка в виде

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0 \alpha_d^{5/n} A_n^{5/n} (1 + b D_T \beta_0) \left(1 + \mu \tilde{\tau}^{2(n-1)} \right)^2}{\left[1 + v \left(\alpha_d^{3/n} A_n^{3/n} \rho b + \frac{3 \alpha_d^{1/4} A_n^{2/n} \rho \beta_0 V}{2^{5/4} d_0} \right) \right]^2}, \quad (24)$$

где σ_0, μ и v представляют собой константы.

Стоит отметить важный момент, что v можно определить из предельного случая высоких скоростей роста кристалла в кинетическом режиме. Таким образом, полагая $b \rightarrow 0, \tilde{\tau} \rightarrow 0$ и $\rho \beta_0 V / d_0 \gg 1$, приходим к следующему выражению из (24)

$$\sigma^* = \frac{2^{11/2} \sigma_0 \alpha_d^{5/4} d_0^2 \alpha_d^{-n}}{36 v^2 \beta_0^2 \alpha_d^2 D_T^2 P_g^2}, \quad P_g = \frac{\rho V}{2 D_T}. \quad (25)$$

Критерий отбора, ранее полученный для роста дендрита в вынужденном ламинарном потоке [уравнение (29) в [19]] в том же пределе принимает вид

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0 \alpha_d^{3/4} d_0^2}{\gamma \beta_0^2 D_T^2 P_g^2}, \quad \gamma = \frac{400 \sigma_0}{3}. \quad (26)$$

Объединяя выражения (25) и (26), получим

$$v^2 = \frac{\sqrt{2}}{9} a_1^2 \sigma_0^2.$$

Таким образом, критерий отбора (24) содержит две константы σ_0 и μ , которые могут быть определены из экспериментальных данных или моделирования фазовым полем [5, 40, 41].

Критерий отбора для термохимического роста

Для определения критерия отбора для двухкомпонентного сплава рассмотрим два разных случая. Первый случай относится к очень разбавленным системам, в которых $\beta_1 = \beta_0 + m C_i (1 - k_0) / (T_Q \alpha_s u_*) \ll \sqrt{d_0 / (V D_T)}$ или $\beta_1 \ll b d_0 / V$ и $A \sim 1$ (последняя оценка следует из граничного условия (5)). В этом пределе волновое число k маргинального режима возьмем из выражения (20), где β_0 заменим на $\beta_0 + m C_i (1 - k_0) / (T_Q \alpha_s u_*)$. Критерий устойчивости можно получить аналогично критерию для однокомпонентных систем. В этом случае масштабный фактор σ^* принимает вид (24), где полагаем β_1 вместо β_0 и получаем

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0 \alpha_d^{5/n} A_n^{5/n} (1 + b D_T \beta_1) \left(1 + \mu \tilde{\tau}^{2(n-1)} \right)^2}{\left[1 + v \left(\alpha_d^{3/n} A_n^{3/n} \rho b + \frac{3 \alpha_d^{1/4} A_n^{2/n} \rho \beta_1 V}{2^{5/4} d_0} \right) \right]^2}, \quad \tilde{\tau} = \tau \frac{\alpha_d^{1/n} A_n^{1/n} \rho b^2 d_0}{2^4 P_g (1 + b D_T \beta_1)}. \quad (27)$$

Предел применимости этого критерия $\beta_1 \ll \sqrt{d_0 / (V D_T)}$ или $\beta_1 \ll b d_0 / V$.

Волновое число во втором предельном случае $\beta_1 \gg bd_0/V$ может быть найдено из уравнения

$$k = \frac{i\beta V \sin \theta}{d}. \tag{28}$$

Подставляя k из (28) в условие разрешимости (11), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi G[X_0(\eta(\varphi))] \exp\left\{\left(\frac{\sqrt{2}\rho V \beta_1 \alpha_d^{2/n} A_n^{2/n}}{d_0} \int_{1/\sqrt{2\alpha_d}}^{\varphi} \frac{\varphi'^{n/2} d\varphi'}{\varphi'^{n/2} - 1}\right)\right\}. \tag{29}$$

Выражение (29) является доминирующим из-за вклада от петли, который дает осциллирующий множитель экспоненциально малой величины интеграла

$$\cos\left(\frac{A_3 \rho V \beta_1 \alpha_d^{2/n} A_n^{2/n}}{d_0}\right), \tag{30}$$

где A_3 – константа.

Этой функцией можно пренебречь для выбранных значений аргумента. Теперь приравняем последнее выражение к нулю и получаем критерий в следующем виде

$$\sigma^* = \frac{2d_0 D_T}{\rho^2 V} = \frac{2\sigma_0 D_T \beta_1 \alpha_d^{2/n} A_n^{2/n}}{\rho}, \tag{31}$$

где σ_0 обозначает константу, которая может быть найдена экспериментально или методом моделирования по теории фазового поля. Заметим, что предел применимости критерия (31) $\beta_1 \gg \frac{bd_0}{V}$.

Стоит отметить, что σ^* из уравнения (27), справедливое при $\beta_1 \ll bd_0/V$, стремится к нулю при больших β_1 . С другой стороны, σ^* из (31), полученное в пределе $\beta_1 \gg bd_0/V$, стремится к нулю при малых β_1 . Такое поведение позволяет нам получить единый критерий разрешимости, объединив выражения (27) и (31) при различных β_1 . Следовательно, обобщенный критерий отбора можно записать в виде

$$\sigma^*(\rho, V) = \frac{2d_0 D_T}{\rho^2 V} = \frac{\overset{\underline{5}}{\sigma_0} \overset{\underline{5}}{\alpha_d^n} \overset{\underline{5}}{A_n^n} (1 + b D_T \beta_1) \left(1 + \mu \tau^{\frac{n+5}{2(n-1)}}\right)^2}{\left[1 + v \left(\overset{\underline{3}}{\alpha_d^n} \overset{\underline{3}}{A_n^n} \rho b + \frac{\overset{\underline{1}}{3\alpha_d^4} \overset{\underline{2}}{A_n^2} P_g \beta_1 D_T}{\overset{\underline{1}}{2^4 d_0}}\right)\right]^2} + \frac{2\sigma_0 \alpha_d^{2/n} A_n^{2/n} D_T \beta_1}{\rho}. \tag{32}$$

Таким образом, критерий отбора (32) определяет комбинацию между скоростью V и диаметром вершины ρ в случае анизотропного термо-концентрационного дендритного роста с симметрией кристалла n -ого порядка при условии конвективного тепло-и массопереноса в жидкости.

БАЛАНС ПЕРЕОХЛАЖДЕНИЯ И ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Выражение для полного переохлаждения $\Delta T = T_m - T_\infty$, представляющее собой второе уравнение модели, содержит следующие вклады

$$\Delta T_T = T_i - T_\infty = \frac{T_Q V k_S}{\alpha_h \rho_l c_l \mu_* D_T}, \quad \Delta T_C = m(C_i - C_{l\infty}) = \frac{(1 - k_0) V m C_{l\infty}}{\alpha_m \mu_* - (1 - k_0) V}, \quad (33)$$

а также $\Delta T_R = 4d_0 T_Q / \rho$ и $\Delta T_K = V / \mu_k$ ($R = \rho/2$). Выражения (33) для ΔT_T и ΔT_C являются независимыми от ρ . Принимая во внимание, что полное переохлаждение $\Delta T = T_m - T_\infty$ является постоянной величиной, выразим явную функцию $\rho(V)$ в виде

$$\rho(V) = \frac{4d_0 T_Q}{\Delta T - \Delta T_T(V) - \Delta T_C(V) - V / \mu_k}. \quad (34)$$

Теперь, подставляя $\rho(V)$ из (34) в (32), получим неявное уравнение для скорости роста дендрита V в виде

$$\frac{\rho^2(V) V}{2d_0 D_T} \sigma^*(\rho(V), V) = 1. \quad (35)$$

где $\sigma^*(\rho(V), V)$ обозначает правую часть уравнения (32) после замены $\rho(V)$ из выражения (34).

Таким образом, соотношения (34) и (35) представляют собой точное аналитическое решение в случае конвективного тепло- и массопереноса, определяющего устойчивый рост дендритного кристалла.

ВЛИЯНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ПОТОКА
НА ЗАТВЕРДЕВАНИЕ РАСПЛАВА $\text{Ti}_{45}\text{Al}_{55}$

Решение системы двух уравнений для критерия отбора (32) и баланса переохлаждения (35) определяет два параметра: скорость роста V и радиус дендрита $\rho/2$ при заданном переохлаждении ΔT . Полученное решение сравнивается с теоретической моделью при кондуктивных граничных условиях [8] и экспериментальными данными, полученными при затвердевании кристаллов в сплаве $\text{Ti}_{45}\text{Al}_{55}$.

Действительно, теоретические предсказания [8] демонстрируют хорошее соответствие с данными эксперимента [42]. Однако, при малых значениях скоростей роста интервалы ошибок экспериментальных данных не захватывают теоретическую кривую, рассчитанную для средних скоростей потока $U = 0.5$ и 0.75 м/с. Это объясняется тем, что при таких интенсивных скоростях возможен переход от ламинарного течения к турбулентному в левитирующих каплях. В этом случае модель [8] становится неприемимой из-за турбулентного характера течения, и, как следствие, для теоретического описания необходимо использовать модель с конвективными граничными условиями, заданную системой уравнений (32)–(35).

Рисунок 2 иллюстрирует сравнение теоретической модели при кондуктивных и конвективных граничных условиях с экспериментальными данными по кинетике роста дендритов в расплаве $\text{Ti}_{45}\text{Al}_{55}$. Видно, что модель с неподвижным расплавом (нулевая скорость набегающего потока, $U = 0$ м/с) не описывает данные эксперимента [8, 42]. Модель с кондуктивными граничными условиями и набегающим потоком со скоростью, представляющей верхний предел ламинарного течения, согласуется с нижним пределом измерений. Таким образом, кондуктивные граничные условия не точно описывают эксперимент в пределе низких скоростей.

Отметим, что включение конвективных граничных условий в модель дендритного роста позволяет описать теоретические данные [42] в пределах погрешности экспери-

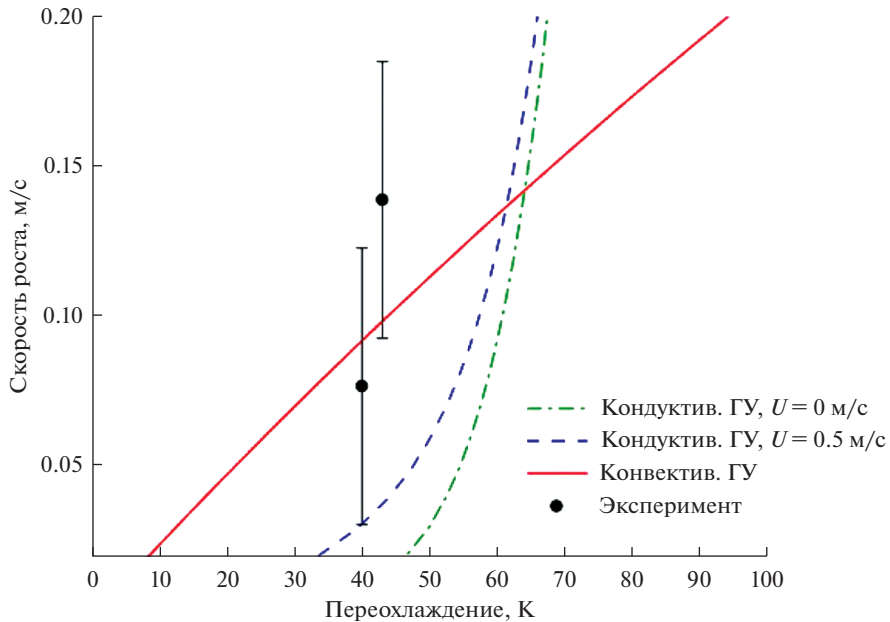


Рис. 2. Сравнение теоретической модели с экспериментальными данными по кинетике роста дендритов в сплаве $Ti_{45}Al_{55}$. Данные измерений, выполненных при кондуктивных граничных условиях в отсутствие конвекции, $U = 0$, и при конвективном потоке со средней скоростью $U = 0.5$ м/с, описаны в работе [8]. Данные измерений, выполненных при конвективных граничных условиях, описаны теоретической моделью (32)–(35), а параметры системы, принятые при расчетах, приведены в табл. 1. Экспериментальные данные (точки) из работы Хартманна и др. [42] рассчитаны при конвективных граничных условиях для малых значений скоростей потока. Интервалы ошибки показывают погрешность в экспериментальных измерениях скорости роста кристаллов, выполненных высокоскоростной камерой в каплях, обработанных в установке ЭМЛ.

ментальных измерений скорости роста кристаллов. Можно предположить, что характер течения в левитирующих каплях становится турбулентным, а на вершинах растущих дендритов завихрение потока вызывает процессы переноса тепла и массы конвективного типа. Эта особенность позволяет описать экспериментальные данные в пределах низких скоростей роста дендритов в сплаве $Ti_{45}Al_{55}$ [42].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе развито теоретическое описание устойчивого роста дендритных кристаллов в переохлажденных бинарных расплавах в условиях конвективного тепло- и массопереноса вблизи границы фазового перехода. Выведен критерий отбора устойчивого режима роста при кристаллической симметрии n -го порядка. Сформулирована система, состоящая из баланса переохлаждений и критерия отбора, позволяющая определить зависимости скорости роста вершины дендрита и ее диаметра от переохлаждения расплава. Проведенное сравнение теории с затвердеванием расплава $Ti_{45}Al_{55}$ показало, что выведенные теоретические зависимости описывают экспериментальные данные в области малых переохлаждений жидкости, когда на вершинах растущих дендритов в левитирующих каплях завихрение потока вызывает процессы переноса тепла и массы конвективного типа.

Таблица 1. Материальные и расчетные параметры для роста дендритов в сплаве $Ti_{45}Al_{55}$

Параметр	Обозначение	Величина	Ед. измерения
Постоянная отбора	σ_0	–	1.17
Капиллярная постоянная	d_0	м	$9.28 \cdot 10^{-10}$
Коэффициент температуропроводности	D_T	m^2/c	$2.5 \cdot 10^{-6}$
Плотность жидкости	ρ_l	$кг/м^3$	$2.46 \cdot 10^3$
Коэффициент распределения примеси	k_0	–	0.86
Номинальная концентрация	$C_{l\infty}$	ат. %	55
Параметр анизотропии	α_d	–	0.3
Постоянная кинетического роста	β_0	с/м	$1.88 \cdot 10^{-2}$
Параметр отбора	μ	–	10^{-3}
Наклон линии ликвидус	m	К/ат. %	8.78
Теплоемкость	c_l	Дж/(кг · К)	1237
Параметр устойчивости	b	m^{-1}	$1.04 \cdot 10^6$
Конвективный коэффициент теплоты	α_h	–	3.55
Скорость трения	u_*	м/с	4
Переохлаждение	T_Q	К	272.64
Кристаллическая теплопроводность	k_S	Вт/(м · К)	29.22

В дальнейшем представляет интерес объединение теории дендритного роста с теорией зарождения и эволюции полидисперсного ансамбля кристаллов в переохлажденной области фазового перехода – двухфазной зоне. Такие исследования можно осуществить в духе ранее предложенных теоретических подходов [43–50].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16-11-10095).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurz W., Fisher D.J. Fundamentals of Solidification 3rd ed. Aedermannsdorf: Trans Tech Publ., 1989.
2. Herlach D., Galenko P., Holland-Moritz D. Metastable Solids from Undercooled Melts. Amsterdam: Elsevier, 2007.
3. Alexandrov D.V., Galenko P.K., Herlach D.M. Selection criterion for the growing dendritic tip in a non-isothermal binary system under forced convective flow // J. Cryst. Growth. 2010. **312**. P. 2122–2127.
4. Chalmers B. Physical Metallurgy. N.Y.: Wiley, 1959.
5. Gao J., Han M., Kao A., Pericleous K., Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendritic growth velocities in an undercooled melt of pure nickel under static magnetic fields: A test of theory with convection // Acta Materialia. 2016. **103**. P. 184–191.
6. Galenko P.K., Alexandrov D.V. From atomistic interfaces to dendritic patterns // Phil. Trans. R. Soc. A. 2018. **376**. P. 20170210.
7. Alexandrov D.V., Zubarev A.Y. Heterogeneous materials: metastable and non-ergodic internal structures // Phil. Trans. R. Soc. A. 2019. **377**. P. 20180353.
8. Galenko P.K., Danilov D.A., Reuther K., Alexandrov D.V., Rettenmayr M., Herlach D.M. Effect of convective flow on stable dendritic growth in rapid solidification of a binary alloy // J. Cryst. Growth. 2017. **457**. P. 349–355.

9. Gusakova O.V., Galenko P.K., Shepelevich V.G., Alexandrov D.V., Rettenmayr M. Diffusionless (chemically partitionless) crystallization and subsequent decomposition of supersaturated solid solutions in Sn–Bi eutectic alloy // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2019. **377**. P. 20180204.
10. Mohan D., Phanikumar G. Experimental and modelling studies for solidification of undercooled Ni–Fe–Si alloys // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2019. **377**. P. 20180208.
11. Gomez H., Bures M., Moure A. A review on computational modelling of phase-transition problems // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2019. **377**. P. 20180203.
12. Kessler D.A., Koplik J., Levine H. Pattern selection in fingered growth phenomena // *Adv. Phys.* 1988. **37**. P. 255–339.
13. Langer J.S., Hong D.C. Solvability conditions for dendritic growth in the boundary-layer model with capillary anisotropy // *Phys. Rev. A*. 1986. **34**. P. 1462–1471.
14. Pelcé P. (Ed.) *Dynamics of Curved Fronts* // Boston: Academic Press. 1988.
15. Pelce P., Bensimon D. Theory of dendrite dynamics // *Nucl. Phys. B*. 1987. **2**. P. 259–270.
16. Bouissou Ph., Pelcé P. Effect of a forced flow on dendritic growth // *Phys. Rev. A*. 1989. **40**. P. 6673–6680.
17. Ben Amar M., Pelcé P. Impurity effect on dendritic growth // *Phys. Rev. A*. 1989. **39**. P. 4263–4269.
18. Brener E., Mel'nikov V.I. Pattern selection in two-dimensional dendritic growth // *Adv. Phys.* 1991. **40**. P. 53–97.
19. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Thermo-solutal and kinetic regimes of an anisotropic dendrite growing under forced convective flow // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2015. **17**. P. 19149–19161.
20. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendritic growth with the six-fold symmetry: Theoretical predictions and experimental verification // *J. Phys. Chem. Solids*. 2017. **108**. P. 98–103.
21. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selected mode of dendritic growth with n-fold symmetry in the presence of a forced flow // *EPL*. 2017. **119**. P. 16001.
22. Brener E.A. Effects of surface energy and kinetics on the growth of needle-like dendrites // *J. Cryst. Growth*. 1990. **90**. P. 165–170.
23. Brener E.A. Pattern formation in three-dimensional dendritic growth // *Physica A*. 1999. **263**. P. 338–344.
24. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selected mode for rapidly growing needle-like dendrite controlled by heat and mass transport // *Acta Mater.* 2017. **137**. P. 64–70.
25. Alexandrov D.V., Danilov D.A., Galenko P.K. Selection criterion of a stable dendrite growth in rapid solidification // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2016. **101**. P. 789–799.
26. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion of stable mode of dendritic growth with n-fold symmetry at arbitrary Peclet numbers with a forced convection // *Proceedings of IUTAM Symposium on Recent Advances in Moving Boundary Problems in Mechanics*. Berlin. 2019. P. 203–215.
27. McPhee M.G., Maykut G.A., Morison J.H. Dynamics and thermodynamics of the ice/upper ocean system in the marginal ice zone of the Greenland Sea // *J. Geophys. Res.* 1987. **92**. P. 7017–7031.
28. Alexandrov D.V., Nizovtseva I.G. To the theory of underwater ice evolution, or nonlinear dynamics of “false bottoms” // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2008. **51**. P. 5204–5208.
29. Alexandrov D.V., Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Nonlinear dynamics of mushy layers induced by external stochastic fluctuations // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2018. **376**. P. 20170216.
30. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendrite growth under forced convection: analysis methods and experimental tests // *Phys. Usp.* 2014. **57**. P. 771–786.
31. McPhee M.G., Maykut G.A., Morison J.H. Dynamics and thermodynamics of the ice/upper ocean system in the marginal ice zone of the greenland sea // *J. Geophys. Res.* 1987. **92**. P. 7017–7031.
32. Notz D., McPhee M.G., Worster M.G., Maykut G.A., Schlünzen K.H., E.H. Impact of underwater-ice evolution on arctic summer sea ice // *J. Geophys. Res.* 2003. **108**. P. 3223.
33. Alexandrov D.V., Malygin A.P. Convective instability of directional crystallization in a forced flow: The role of brine channels in a mushy layer on nonlinear dynamics of binary systems // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2011. **54**. P. 1144–1149.
34. Alexandrov D.V., Bashkirtseva I.A., Malygin A.P., Ryashko L.B. Sea ice dynamics induced by external stochastic fluctuations // *Pure Appl. Geophys.* 2013. **170**. P. 2273–2282.
35. Ivantsov G.P. Temperature field around spherical, cylinder and needle-like dendrite growing in supercooled melt // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1947. **58**. № 4. P. 567–569.
36. Ivantsov G.P. On a growth of spherical and needle-like crystals of a binary alloy // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1952. **83**. № 4. P. 573–575.
37. Ivantsov G.P. Thermal and diffusional processes during crystal growth // *Growth of Crystals*. 1961. **3**. P. 75–84.
38. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion of stable dendritic growth at arbitrary Péclet numbers with convection // *Phys. Rev. E*. 2013. **87**. P. 062403.

39. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion for the growing dendritic tip at the inner core boundary // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2013. **46**. P. 195101.
40. Jeong J.-H., Goldenfeld N., Dantzig J.A. Phase field model for three-dimensional dendritic growth with fluid flow // *Phys. Rev. E.* 2001. **64**. P. 041602.
41. Tong X., Beckermann C., Karma A., Li Q. Phase-field simulations of dendritic crystal growth in a forced flow // *Phys. Rev. E.* 2001. **63**. P. 061601.
42. Hartmann H., Galenko P.K., Holland-Moritz D., Kolbe M., Herlach D.M., Shuleshova O. Non-equilibrium solidification in undercooled $Ti_{45}Al_{55}$ melts // *J. Appl. Phys.* 2008. **103**. P. 073509.
43. Alexandrov D.V. On the theory of transient nucleation at the intermediate stage of phase transitions // *Phys. Lett. A.* 2014. **378**. P. 1501–1504.
44. Barlow D.A. Theory of the intermediate stage of crystal growth with applications to insulin crystallization // *J. Cryst. Growth.* 2017. **470**. P. 8–14.
45. Alexandrov D.V. Nucleation and crystal growth kinetics during solidification: The role of crystallite withdrawal rate and external heat and mass sources // *Chem. Eng. Sci.* 2014. **117**. P. 156–160.
46. Makoveeva E.V., Alexandrov D.V. A complete analytical solution of the Fokker-Planck and balance equations for nucleation and growth of crystals // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2018. **376**. № 2113. P. 20170327.
47. Aseev D.L., Alexandrov D.V. Nonlinear dynamics for the solidification of binary melt with a non-equilibrium two-phase zone // *Phys. Dokl.* 2006. **51**. P. 291–295.
48. Aseev D.L., Alexandrov D.V. Directional solidification of binary melts with a nonequilibrium mushy layer // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2006. **49**. P. 4903–4909.
49. Alexandrov D.V., Malygin A.P. Flow-induced morphological instability and solidification with the slurry and mushy layers in the presence of convection // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2012. **55**. P. 3196–3204.
50. Alexandrov D.V., Malygin A.P. Coupled convective and morphological instability of the inner core boundary of the Earth // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2011. **189**. P. 134–141.

ON THE SELECTION OF STABLE DENDRITIC GROWTH MODE IN CONDITIONS OF CONVECTIVE HEAT AND MASS TRANSFER

L. V. Toropova¹, D. V. Alexandrov¹, P. K. Galenko¹

¹*Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia*

A theoretical study of the quasistationary process of stable growth of anisotropic dendrite under the conditions of convective heat and mass transfer in the melt was carried out. Based on the theory of morphological stability and the theory of microscopic solvability, a selection criterion is derived for the growth rate of the dendrite tip and its diameter in the case of convective heat and mass transfer, which determines the stable growth of a dendritic crystal with n -fold symmetry. A comparative analysis of the obtained selection criterion with the theoretical model under conductive boundary conditions and experimental data on the kinetics of dendrite growth in the $Ti_{45}Al_{55}$ alloy is performed.

Keywords: dendrites, heat and mass transfer, selection criterion, phase transitions, convection

REFERENCES

1. Kurz W., Fisher D.J. *Fundamentals of Solidification* 3rd ed. Aedermannsdorf: Trans Tech Publ., 1989.
2. Herlach D., Galenko P., Holland-Moritz D. *Metastable Solids from Undercooled Melts*. Amsterdam: Elsevier, 2007.
3. Alexandrov D.V., Galenko P.K., Herlach D.M. Selection criterion for the growing dendritic tip in a non-isothermal binary system under forced convective flow // *J. Cryst. Growth.* 2010. **312**. P. 2122–2127.
4. Chalmers B. *Physical Metallurgy*. N.Y.: Wiley, 1959.
5. Gao J., Han M., Kao A., Pericleous K., Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendritic growth velocities in an undercooled melt of pure nickel under static magnetic fields: A test of theory with convection // *Acta Materialia*. 2016. **103**. P. 184–191.
6. Galenko P.K., Alexandrov D.V. From atomistic interfaces to dendritic patterns // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2018. **376**. P. 20170210.
7. Alexandrov D.V., Zubarev A.Y. Heterogeneous materials: metastable and non-ergodic internal structures // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2019. **377**. P. 20180353.

8. Galenko P.K., Danilov D.A., Reuther K., Alexandrov D.V., Rettenmayr M., Herlach D.M. Effect of convective flow on stable dendritic growth in rapid solidification of a binary alloy // *J. Cryst. Growth*. 2017. **457**. P. 349–355.
9. Gusakova O.V., Galenko P.K., Shepelevich V.G., Alexandrov D.V., Rettenmayr M. Diffusionless (chemically partitionless) crystallization and subsequent decomposition of supersaturated solid solutions in Sn–Bi eutectic alloy // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2019. **377**. P. 20180204.
10. Mohan D., Phanikumar G. Experimental and modelling studies for solidification of undercooled Ni–Fe–Si alloys // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2019. **377**. P. 20180208.
11. Gomez H., Bures M., Moure A. A review on computational modelling of phase-transition problems // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2019. **377**. P. 20180203.
12. Kessler D.A., Koplik J., Levine H. Pattern selection in fingered growth phenomena // *Adv. Phys.* 1988. **37**. P. 255–339.
13. Langer J.S., Hong D.C. Solvability conditions for dendritic growth in the boundary-layer model with capillary anisotropy // *Phys. Rev. A*. 1986. **34**. P. 1462–1471.
14. Pelcé P. (Ed.) *Dynamics of Curved Fronts* // Boston: Academic Press. 1988.
15. Pelce P., Bensimon D. Theory of dendrite dynamics // *Nucl. Phys. B*. 1987. **2**. P. 259–270.
16. Bouissou Ph., Pelcé P. Effect of a forced flow on dendritic growth // *Phys. Rev. A*. 1989. **40**. P. 6673–6680.
17. Ben Amar M., Pelcé P. Impurity effect on dendritic growth // *Phys. Rev. A*. 1989. **39**. P. 4263–4269.
18. Brener E., Mel'nikov V.I. Pattern selection in two-dimensional dendritic growth // *Adv. Phys.* 1991. **40**. P. 53–97.
19. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Thermo-solutal and kinetic regimes of an anisotropic dendrite growing under forced convective flow // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2015. **17**. P. 19149–19161.
20. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendritic growth with the six-fold symmetry: Theoretical predictions and experimental verification // *J. Phys. Chem. Solids*. 2017. **108**. P. 98–103.
21. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selected mode of dendritic growth with n-fold symmetry in the presence of a forced flow // *EPL*. 2017. **119**. P. 16001.
22. Brener E.A. Effects of surface energy and kinetics on the growth of needle-like dendrites // *J. Cryst. Growth*. 1990. **90**. P. 165–170.
23. Brener E.A. Pattern formation in three-dimensional dendritic growth // *Physica A*. 1999. **263**. P. 338–344.
24. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selected mode for rapidly growing needle-like dendrite controlled by heat and mass transport // *Acta Mater.* 2017. **137**. P. 64–70.
25. Alexandrov D.V., Danilov D.A., Galenko P.K. Selection criterion of a stable dendrite growth in rapid solidification // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2016. **101**. P. 789–799.
26. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion of stable mode of dendritic growth with n-fold symmetry at arbitrary Peclet numbers with a forced convection // *Proceedings of IUTAM Symposium on Recent Advances in Moving Boundary Problems in Mechanics*. Berlin. 2019. P. 203–215.
27. McPhee M.G., Maykut G.A., Morison J.H. Dynamics and thermodynamics of the ice/upper ocean system in the marginal ice zone of the Greenland Sea // *J. Geophys. Res.* 1987. **92**. P. 7017–7031.
28. Alexandrov D.V., Nizovtseva I.G. To the theory of underwater ice evolution, or nonlinear dynamics of “false bottoms” // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2008. **51**. P. 5204–5208.
29. Alexandrov D.V., Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Nonlinear dynamics of mushy layers induced by external stochastic fluctuations // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2018. **376**. P. 20170216.
30. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendrite growth under forced convection: analysis methods and experimental tests // *Phys. Usp.* 2014. **57**. P. 771–786.
31. McPhee M.G., Maykut G.A., Morison J.H. Dynamics and thermodynamics of the ice/upper ocean system in the marginal ice zone of the greenland sea // *J. Geophys. Res.* 1987. **92**. P. 7017–7031.
32. Notz D., McPhee M.G., Worster M.G., Maykut G.A., Schlünzen K.H., E.H. Impact of underwater-ice evolution on arctic summer sea ice // *J. Geophys. Res.* 2003. **108**. P. 3223.
33. Alexandrov D.V., Malygin A.P. Convective instability of directional crystallization in a forced flow: The role of brine channels in a mushy layer on nonlinear dynamics of binary systems // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2011. **54**. P. 1144–1149.
34. Alexandrov D.V., Bashkirtseva I.A., Malygin A.P., Ryashko L.B. Sea ice dynamics induced by external stochastic fluctuations // *Pure Appl. Geophys.* 2013. **170**. P. 2273–2282.
35. Ivantsov G.P. Temperature field around spherical, cylinder and needle-like dendrite growing in supercooled melt // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1947. **58**. № 4. P. 567–569.
36. Ivantsov G.P. On a growth of spherical and needle-like crystals of a binary alloy // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1952. **83**. № 4. P. 573–575.
37. Ivantsov G.P. Thermal and diffusional processes during crystal growth // *Growth of Crystals*. 1961. **3**. P. 75–84.

38. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion of stable dendritic growth at arbitrary Péclet numbers with convection // *Phys. Rev. E*. 2013. **87**. P. 062403.
39. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion for the growing dendritic tip at the inner core boundary // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2013. **46**. P. 195101.
40. Jeong J.-H., Goldenfeld N., Dantzig J.A. Phase field model for three-dimensional dendritic growth with fluid flow // *Phys. Rev. E*. 2001. **64**. P. 041602.
41. Tong X., Beckermann C., Karma A., Li Q. Phase-field simulations of dendritic crystal growth in a forced flow // *Phys. Rev. E*. 2001. **63**. P. 061601.
42. Hartmann H., Galenko P.K., Holland-Moritz D., Kolbe M., Herlach D.M., Shuleshova O. Non-equilibrium solidification in undercooled $Ti_{45}Al_{55}$ melts // *J. Appl. Phys.* 2008. **103**. P. 073509.
43. Alexandrov D.V. On the theory of transient nucleation at the intermediate stage of phase transitions // *Phys. Lett. A*. 2014. **378**. P. 1501–1504.
44. Barlow D.A. Theory of the intermediate stage of crystal growth with applications to insulin crystallization // *J. Cryst. Growth*. 2017. **470**. P. 8–14.
45. Alexandrov D.V. Nucleation and crystal growth kinetics during solidification: The role of crystallite withdrawal rate and external heat and mass sources // *Chem. Eng. Sci.* 2014. **117**. P. 156–160.
46. Makoveeva E.V., Alexandrov D.V. A complete analytical solution of the Fokker-Planck and balance equations for nucleation and growth of crystals // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2018. **376**. № 2113. P. 20170327.
47. Aseev D.L., Alexandrov D.V. Nonlinear dynamics for the solidification of binary melt with a non-equilibrium two-phase zone // *Phys. Dokl.* 2006. **51**. P. 291–295.
48. Aseev D.L., Alexandrov D.V. Directional solidification of binary melts with a nonequilibrium mushy layer // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2006. **49**. P. 4903–4909.
49. Alexandrov D.V., Malygin A.P. Flow-induced morphological instability and solidification with the slurry and mushy layers in the presence of convection // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2012. **55**. P. 3196–3204.
50. Alexandrov D.V., Malygin A.P. Coupled convective and morphological instability of the inner core boundary of the Earth // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2011. **189**. P. 134–141.