ЗАПИСКИ РОССИЙСКОГО МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА 2020, Ч. CXLIX, № 6, с. 101–109

МИНЕРАЛОГИЧЕСКАЯ КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

ДОДЕКАЭДРО–ИКОСАЭДРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

© 2020 г. Почетный член Ю. Л. Войтеховский*

Санкт-Петербургский горный университет, 21-я линия, 2, Санкт-Петербург, 199106 Россия
**e-mail: voytekhovskiy_yul@pers.spmi.ru*

Поступила в редакцию 07.09.2020 г.
После доработки 17.09.2020 г.
Принята к публикации 07.10.2020 г.

Решетчатое строение кристаллов запрещает оси симметрии 5-го порядка. Поэтому додекаэдр и икосаэдр исключены из числа кристаллических форм еще Р.Ж. Гаюи. Позднее Ж.Б. Роме де Лиль показал гониометрическими измерениями, что “додекаэдр” и “икосаэдр” пирита суть пентагондодекаэдр и его комбинация с октаэдром. Тем не менее, Е.С. Федоров и В.В. Доливо-Добровольский рассматривали додекаэдро-икосаэдрическую систему как близкую к кубической сингонии (с $4L_3$, $3L_2$ и $3P$ в той же ориентации). За несколько последних десятилетий минералогия и кристаллография идейно и методически освоили экзотические объекты (шехтманиты, фуллерены, капсиды икосаэдрических вирусов) с осями симметрии 5-го порядка. Предлагается включить в университетский курс кристаллографии додекаэдро-икосаэдрическую сингонию с аксиальным и планаксиальным видами симметрии.

Ключевые слова: додекаэдр, икосаэдр, сингония, точечная группа симметрии, простая форма, ось симметрии 5-го порядка, шехтманит, графен, фуллерен

DOI: 10.31857/S0869605520060155

ВВЕДЕНИЕ

Естественные науки имеют тенденцию к расширению границ и проникновению в смежные пределы. В отечественной минералогии и кристаллографии этому способствовали методологические конференции, регулярно проводившиеся в Сыктывкаре под руководством Н.П. Юшкина, сформулировавшего представления о “пограничьях минерального мира” и “коэволюции живого и косного”, стимулирующие к научному поиску. Безусловно, следует приветствовать коллективные пограничные исследования. Но история показывает, что раньше или позже вашу научную область, прежде четко оконтуренную, заселит множество экзотических объектов. Дисциплинированный ум ищет этому принципиальные оправдания. Иногда дело решается изменением угла зрения или расширением базовых определений. Именно такая ситуация рассматривается в статье.

ИЗГНАНИЕ

Отношение к додекаэдру и икосаэдру претерпело в кристаллографии и минералогии известную эволюцию. Еще Р.Ж. Гаюи показал, что они не могут быть кристаллическими формами, ибо противоречат закону рационального отношения параметров, носящему сегодня его имя (Шафрановский, 1978, с. 266). Это было важным открытием, ибо даже И. Кеплер и А.Г. Вернер считали их таковыми (там же, с. 62, 207, 209). Эмпирический закон Р.Ж. Гаюи послужил сильным аргументом в пользу идеи о ре-

шетчатом строении кристаллов, которая в виде геометрической теоремы запретила в их структуре оси симметрии 5-го, а также 7-го и выше порядков. Поэтому они невозможны и во внешней форме. Сегодня эта логическая связь выражается лаконично: точечная группа симметрии (формы) есть фактор-группа по подгруппе трансляций пространственной группы симметрии (структуры). Позднее гониометрические измерения Ж.Б. Роме де Лиля показали, что “додекаэдр” и “икосаэдр” на кристаллах пирита – не платоновы полиэдры, а пентагондодекаэдр и его комбинация с октаэдром; ромбический триаконтаэдр – комбинация дидодекаэдра и куба. Так додекаэдр и икосаэдр были изгнаны из кристаллографии и минералогии. Между тем, в органическом мире их встречали часто, что позволило Н.В. Белову сформулировать метафору: “Осью 5-го порядка жизнь защищается от кристаллизации”. Казалось бы, вопрос решен окончательно.

НО

Кристаллографы держали додекаэдр и икосаэдр в поле зрения. В ранге додекаэдро–икосаэдрической системы (именно системы, чтобы отличать от известных 6, а после выделения тригональной из гексагональной – 7 сингоний) их рассматривали Е.С. Федоров (1901, 1915) и В.В. Доливо-Добровольский (1924). Формальная причина была в том, что среди элементов симметрии $6L_5 10L_3 15L_2 15PC$ у этих форм есть $4L_3$, $3L_2$ и 3 взаимно перпендикулярные P, расположенные так же, как и в формах кубической сингонии. Поэтому “простые формы додекаэдро–икосаэдрической системы являются в то же время комбинациями некоторых особых форм кубической системы ⟨...⟩ только при особых, в природе немыслимых соотношениях между величинами углов” (Доливо-Добровольский, 1924, с. 180). Этим соотношениям углов мешает именно решетчатое строение кристаллов. Заметим, что элементов симметрии у додекаэдра и икосаэдра – “избыток”, который и не помещается в “прокрустово ложе” известных сингоний.

НОВАЦИИ

За несколько последних десятилетий кристаллография и минералогия идейно и методически освоили целый ряд экзотических объектов, не смущаясь ограничениями, налагаемыми классической теорией.

1. Шехтманиты

8 апреля 1982 г. Д. Шехтман записал в лабораторный журнал необычный результат эксперимента. Картина дифракции электронов на быстро охлажденном сплаве Al_6Mn имела типичные для кристаллов резкие пики, но запрещенные L_5 вплоть до атомного масштаба. Статья об этом отклонялась дважды, но вышла после независимого подтверждения результата другими исследователями (Shechtman et al., 1984). А в 2011 г. Д. Шехтману была присуждена Нобелевская премия по химии “за открытие квазикристаллов”.

Потом оказалось, что похожие результаты фиксировались с 1940-х годов, но обескураживали физиков противоречивостью с канонами кристаллографии. За результатом Д. Шехтмана последовали другие. Приставка “квази” скоро отпала. Название “шехтманит”, изначально относившееся к сплаву Al_6Mn, стало нарицательным. Решением Международного союза кристаллографов с 1992 г. новые объекты стали полноправными кристаллами. Отныне их главный критерий – четкие пики на картинах рентгеновской дифракции. В недрах математики нашлась и подобающая теория – мозаики Р. Пенроуза с дальним нетрансляционным порядком, допускающие L_5 и другие

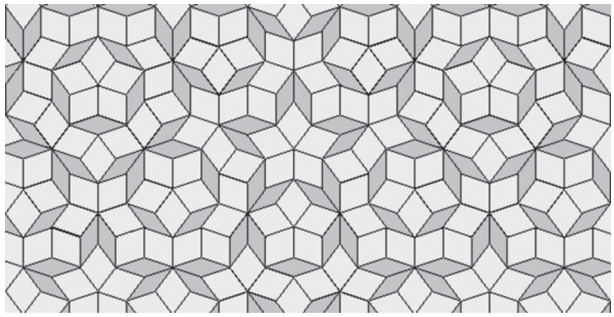

Рис. 1. Мозаика Пенроуза.
Fig. 1. Penrose mosaic.

ранее запрещенные в кристаллах оси симметрии (рис. 1). Их необычное свойство состоит в том, что любой фрагмент повторяется бесконечное число раз, но в разных ориентациях и на разных расстояниях.

В природе квазикристаллы найдены лишь однажды – в шлихах р. Хатырка (Чукотка, Корякское нагорье) в виде микрозерен (с шестью явными L_5) природного сплава Al, Cu и Fe в ассоциации с хатыркитом (Cu, Zn)Al_2 и купалитом CuAl (Bindi et al., 2009). Предполагается природное происхождение квазикристаллов. По современным канонам это важно для признания их минералами. Итак, L_5 и другие ранее запрещенные оси симметрии отныне в кристаллах разрешены ценой признания в них дальнего нетрансляционного порядка.

2. Графены и фуллерены

В 2004 г. в Science опубликована статья об электрических эффектах в сверхтонких (1 атом) углеродных пленках (Novoselov et al., 2004). А в 2010 г. два первых автора А.К. Гейм и К.С. Новоселов получили Нобелевскую премию по физике “за передовые опыты с двумерным материалом – графеном”. Это первый истинно 2-мерный кристалл, благодаря уникальным физическим свойствам открывший большие перспективы в производстве новых материалов. И все же это классический кристалл, разве что смущающий отсутствием третьего измерения. Мы можем представить себе даже 1-мерный кристалл с периодическим повторением структурной единицы. Тот и другой виртуально входят в решетку обычного графита. Поэтому концептуально интереснее другое открытие, случившееся на 20 лет раньше.

В августе 1985 г. Р. Керл, Х. Крото и Р. Смолли исследовали масс-спектры паров графита, полученных при его лазерном облучении, и обнаружили интенсивные пики, соответствующие кластерам C_{60} и (более слабые) C_{70}. Принципиальной была догадка о том, что они имеют полую полиэдрическую форму, причем C_{60} – усеченного по всем вершинам икосаэдра (рис. 2). События развивались стремительно. 13 сентября редакция Nature получила статью, 14 ноября она вышла в свет (Kroto et al., 1985). А в 1996 г. авторы получили Нобелевскую премию по химии “за открытие фуллеренов” – нового класса суперароматических соединений, перспективных для создания материалов с уникальными свойствами. Как и в случае с шехтманитом, термин “фуллерен” быстро стал нарицательным. Сегодня под таковым понимается любой (в том числе по химическому составу) выпуклый полиэдрический кластер, на котором разрешены лишь пентагоны и гексагоны, сходящиеся по 3 в каждой вершине. Они найдены в природе в

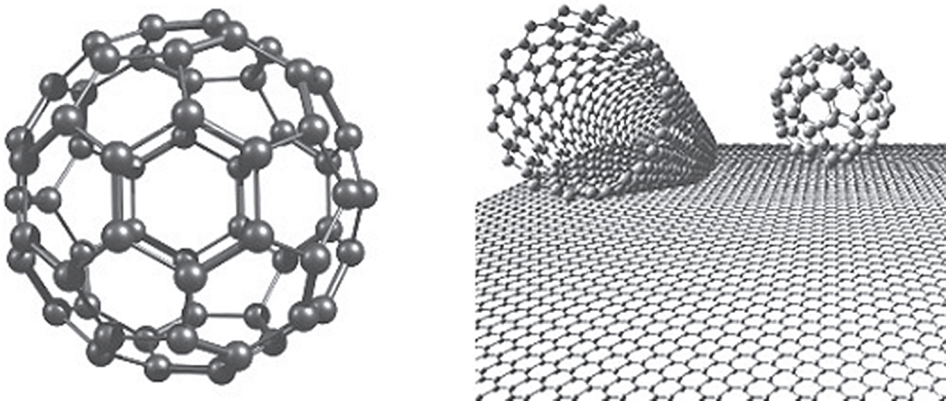

Рис. 2. Слева: фуллерен C_{60}. Справа: графен и его топологические замыкания.

Fig. 2. Left: fullerene C_{60}. Right: grapheme and its topological closures.

ничтожных количествах, но в разных обстановках: в шунгитах Карелии, фульгуритах США и Индии, воздухе над действующими вулканами и даже ... в бытовой саже.

Пример интересен тем, что всякий фуллерен – это замкнутый на себя лоскут графена (рис. 2). Фундаментальная топологическая теорема Эйлера (в форме Эберхардта) требует, чтобы при таком замыкании появились ровно 12 пентагонов. При их равномерном расположении фуллерен приобретает икосаэдрическую симметрию. Отсутствие контактов между пентагонами повышает его стабильность. C_{60} – минимальный фуллерен, удовлетворяющий известным условиям стабильности. Но графен – классический 2-мерный кристалл. C_{60} и любой другой фуллерен – топологические замыкания его 2-мерного пространства на себя. Логичнее считать их объектами кристаллографии, чем изгонять из-за необычной формы (12 обязательных пентагонов), приобретенной в силу теоремы Эйлера, отражающей структурные свойства 3-мерного евклидова пространства. (Заметим, что икосаэдрическую симметрию фуллеренов C_{60}, C_{80} и других можно интерпретировать онтогенически – как удачную конфигурацию атомов, определившую их стабильность).

Всякий кристалл конечен, хотя в теории его решетка мыслится бесконечной (ее описание использует трансляции, и тогда необходимо, чтобы совмещаемая фигура была бесконечной). Упрощая физическую картину, скажем, что любой кристалл стремился, но за конечное время не успел вырасти бесконечным. Фуллерены – кристаллы принципиально иного рода, их пространственная ограниченность есть замкнутость на себя (интровертность), обязательный атрибут, не имеющий своей причиной конечное время роста. Промежуточные между графеном и фуллереном структуры – нанотрубки, в которых 2-мерное пространство графена замкнуто с той или иной хиральностью в цилиндр, открытый оборванными химическими связями в две стороны (рис. 2).

В минералогии и кристаллографии высказаны идеи о минералах в неевклидовых пространствах. С.В. Руднев (1986) показал, что зональность реального кристалла в евклидовом пространстве можно представить как свойство идеального кристалла в пространстве Римана. Р.В. Галиулин (2002) утверждал, что кристаллы доломита, кривогранные (в форме гиперболического параболоида, рис. 3) в пространстве Евклида, идеальны в пространстве Лобачевского. (Пространства Римана и Лобачевского локально евклидовы. Именно поэтому, лишь вырастая до некоторой величины, минеральные индивиды показывают эффекты, воспринимаемые нами в евклидовом про-

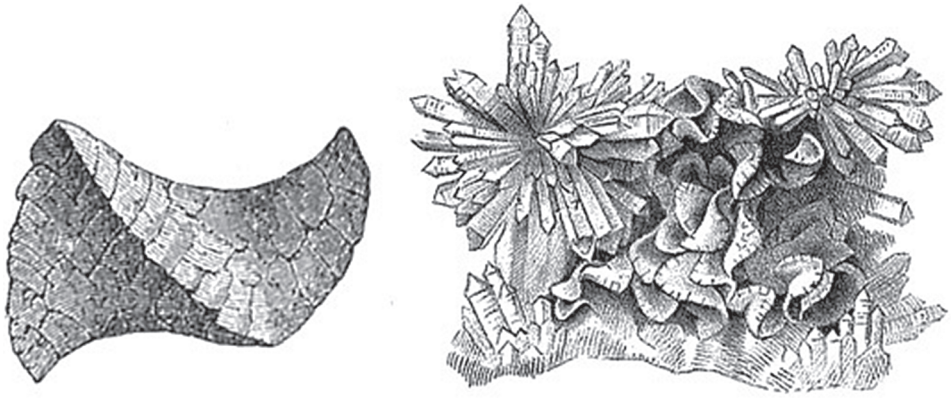

Рис. 3. Параболоиды доломита – расщепленные ромбоэдры (Bombicci, 1885) (оттиск статьи найден нами среди личных книг А.Е. Ферсмана в Научной библиотеке Геологического института КНЦ РАН, г. Апатиты). Слева: одиночный кристалл. Справа: срастания с кварцем.

Fig. 3. Dolomite paraboloids are split rhombohedra (Bombicci, 1885) (we found a reprint of the article among A.E. Fersman's personal books in the Scientific Library of the Geological Institute KSC RAS, Apatity). Left: single crystal. Right: intergrowth with quartz.

странстве как зональность и расщепление – свидетельства неидеальности). П. Энгель (Engel, 2019) трактует шехтманиты как 3-мерные сечения кристаллических решеток, идеальных в 6-мерном пространстве. Во всех случаях дискуссия идет между математическими (неевклидовыми или многомерными) формализмами и физическими представлениями в осязаемой евклидовой 3-мерной реальности. Заметим, что наши физические и химические представления в многомерные пространства не простираются.

3. Капсиды

В 1956 г. Дж. Уотсон и Ф. Крик (лауреаты Нобелевской премии 1962 г. по физиологии и медицине "за открытия, касающиеся молекулярной структуры нуклеиновых кислот и их значения для передачи информации в живых системах", т. е. за расшифровку структуры молекулы ДНК) предположили, что мельчайшие сферические вирусы имеют форму икосаэдра (Crick, Watson, 1956). На это указывали полигональные тени, отбрасываемые ими при рентгеновском облучении. Но как организован их капсид (оболочка, защищающая свернутую в клубок ДНК/РНК) из белковых глобул? Комбинируя электронную микроскопию и рентгеновскую дифракцию, на этот вопрос в 1962 г. ответили Д. Каспар и А. Клуг (Caspar, Klug, 1962). (Последний в 1982 г. стал Нобелевским лауреатом "за разработку метода кристаллографической электронной микроскопии и прояснение структуры биологически важных комплексов нуклеиновая кислота–белок").

Белковые глобулы образуют на гранях икосаэдра 1-слойную плотнейшую гексагональную упаковку, но линии глобул не обязательно параллельны ребрам икосаэдра. Это позволяет различать икосаэдрические капсиды по точечным группам симметрии: без плоскостей симметрии Y и с ними Y_h (рис. 4). Более детальному анализу на основе теоремы "о триангуляционных числах" и посвящена фундаментальная работа (Caspar, Klug, 1962). Многообразие икосаэдрических вирусов пополняется, исследования продолжаются (Войтеховский, 2020). Но можно ли отнести их капсиды к полноправным объектам кристаллографии и минералогии? Икосаэдрическая форма нас не смущает. Благодаря И. Кеплеру, М.В. Ломоносову, У. Волластону и У. Барлоу плотнейшие ша-

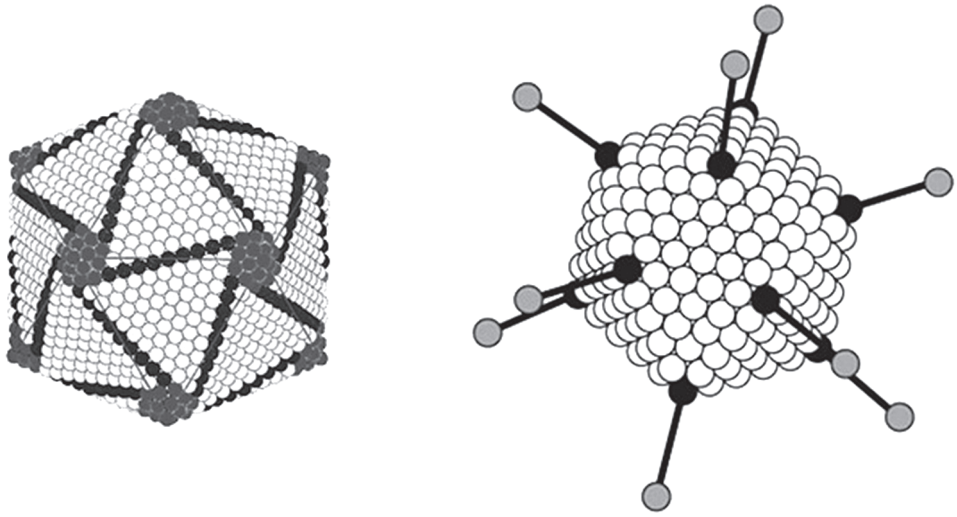

Рис. 4. Модели капсидов икосаэдрических вирусов с симметрией Y (слева, иридовирус) и Y_h (справа, аденовирус).

Fig. 4. Capsid models of icosahedral viruses of Y (left, Iridoviridae) and Y_h (right, Adenoviridae) symmetry.

ровые упаковки давно служат при объяснении структур (главным образом, но не только) ионных кристаллов. Плотнейшие гексагональные упаковки глобул кристобалита известны в благородных опалах (минералоидах, т. е. не совсем полноценных минералах, но кто решится изгнать их из минералогии?). В капсидах глобулы сложены белками. Но те же элементы C, H, N, O слагают нацело или входят в состав органических минералов семейства эвенкита (10 минералов в диапазоне от $C_{24}H_{48}$ до $C_{24}H_{12}$), семейства абелсонита (7 минералов: абелсонит $C_{31}H_{32}N_4Ni$ и др.), семейства хоелита (4 минерала: хоелит $C_{14}H_8O_2$ и др.) ... (Godovikov, Nenasheva, 2020). Проблема икосаэдрических капсидов в том, что все странности присущи им одновременно. Тем не менее, мы даем на вопрос положительный ответ.

ВОЗВРАЩЕНИЕ

Сказанное выше приводит нас к выводу, что кристаллография и минералогия уже не могут обойтись без додекаэдра и икосаэдра (в силу дуальности, где установлен один, там есть и другой) при описании синтезированных и природных (это важно) структур. Представляется логичным придать додекаэдро-икосаэдрической системе статус сингонии и включить ее в университетский курс кристаллографии, что по сути уже сделано некоторыми авторами (Чупрунов и др., 2006; Еремин, Еремина, 2013). Это закономерный шаг после признания в кристаллах дальнего нетрансляционного порядка. Явным образом в сингонии выделяются два вида симметрии: $Y(6L_5 10L_3 15L_2)$ – пентагонтриикосаэдрический (по названию общей формы) и Y_h $(6L_5 10L_3 15L_2 15PC)$ – гексаикосаэдрический. Все простые формы показаны на рис. 5. В соответствии с номенклатурой, разработанной в Федоровском институте и принятой большинством научных школ, некоторые (как и в кубической сингонии) могут быть названы по-разному: триаконтаэдр (ромбический триаконтаэдр), тетрагонтриикосаэдр (тетрагонпентадодекаэдр), тригонпентадодекаэдр (пентадодекаэдр), пентагонтриикосаэдр (триикосаэдр, пента-

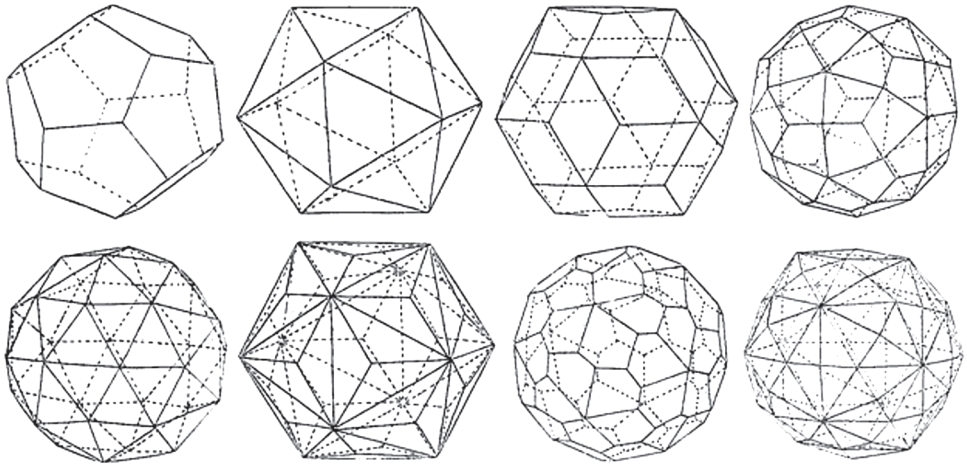

Рис. 5. Простые формы с точечными группами симметрии Y и Y_h, в скобках – число граней. Вверху: додекаэдр (12), икосаэдр (20), триаконтаэдр (30), тетрагонтриикосаэдр (60). Внизу: тригонпентадодекаэдр (60), тригонтриикосаэдр (60), пентагонтриикосаэдр (60, общая форма в Y), гексаикосаэдр (120, общая форма в Y_h).

Fig. 5. Simple forms with Y_h and Y point symmetry groups, the number of faces are in brackets. Top: dodecahedron (12), icosahedron (20), triacontahedron (30), tetragontriicosahedron (60). Bottom: trigonpentadodecahedron (60), trigontriicosahedron (60), pentagontriicosahedron (60, general form in Y), hexaicosahedron (120, general form in Y_h)

гонпентадодекаэдр), гексаикосаэдр (тригонгексаикосаэдр, тригондекадодекаэдр, декадодекаэдр).

Простые формы додекаэдро-икосаэдрической сингонии могут стать надежной основой морфологической классификации икосаэдрических вирусов. Почему икосаэдр использован вирусом как форма капсида? Потому что при данной длине цепочки ДНК/РНК для строительства почти сферической защитной оболочки нужно минимальное количество белковых глобул (возможно, и времени). При этом кодирование высокосимметричной формы проще, чем низкосимметричной (хотя мы плохо понимаем, как это происходит в геноме). Если вирусы прибегают к такой уловке, как разворот упаковки белковых глобул относительно ребер икосаэдра (рис. 4, слева), то почему не использовать и другие простые формы, более сферичные или удобные в других отношениях? Триаконтаэдр предложен как форма капсидов мелких вирусов (Pimonov et al., 2019). Мы прогнозируем, что в капсидах будут установлены все простые формы додекаэдро-икосаэдрической сингонии и их многие комбинации – природа оценит эти варианты. Возможно, испытываемые вирусологами трудности при расшифровке структур икосаэдрических капсидов связаны именно с распознаванием этих комбинаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсуждение методологических вопросов представляется важным в академической и университетской среде. Побуждая к расширению кругозора, выходу в пограничные области, поиску общих решений и объединяющих концепций, методология учит соблюдению принципов научного исследования и своевременной корректировке базовых определений. Рассмотренные примеры показывают, что кристаллография и ми-

нералогия – активно развивающиеся дисциплины. Их методология требует постоянного внимания ввиду безудержного освоения новых объектов на “пограничьях минерального мира”, в том числе на активной границе “живого и косного”. Пример последнего – икосаэдрический COVID-19, ворвавшийся не только в нашу частную жизнь, но и в теорию нашей науки.

В современной математике широко используется структура, называемая полем (коммутативное кольцо с 1 и обратимыми элементами (кроме 0) или, иначе, тело с коммутативным умножением...). Присоединением новых элементов получаем его расширение. Так, добавлением лишь мнимой единицы к полю действительных чисел получаем поле комплексных чисел. Всякому ясно, сколь огромно и продуктивно это “простое расширение”. Выше рассмотрены две идеи, относительно недавно вошедшие в кристаллографию и минералогию: дальний нетрансляционный порядок и интровертное пространство кристалла. Впору задуматься о последствиях этого “конечно порожденного расширения” прежнего смыслового поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Войтеховский Ю.Л. Из опыта преподавания. III. Кристаллография икосаэдрических вирусов // Вестник геонаук. **2020**. № 4. С. 40–44.

Галиулин Р.В. Кристаллографическая картина мира // Успехи физ. наук. **2002**. Т. 172. № 2. С. 229–233.

Доливо-Добровольский В.В. Исследование додекаэдро-икосаэдрической системы // ЗРМО. **1924**. № 1. С. 169–181.

Еремин Н.Н., Еремина Т.А. Занимательная кристаллография: учебное пособие. М.: Изд. МЦНМО, **2013**. 134 с.

Руднев С.В. Применение эллиптической геометрии Римана к исследованию решетчатых структур реальных кристаллов. Автореф. дисс. к.г.-м.н. Л.: ЛГУ, **1986**. 18 с.

Федоров Е.С. Курс кристаллографии. СПб.: Изд. К.Л. Риккера, **1901**. 435 с.

Федоров Е.С. Практикум по основным отделам кристаллографии. Петроград: Экономическая типо-литография, **1915**. 20 с.

Чупрунов Е.В., Хохлов А.Ф., Фаддеев М.А. Основы кристаллографии: учебник для вузов. М.: Физматлит, **2006**. 500 с.

Шафрановский И.И. История кристаллографии с древнейших времен до начала XIX столетия. Л.: Наука, **1978**. 297 с.

Dodecahedron–Icosahedral System

Yu. L. Voytekhovsky*

Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg, Russia

**e-mail: voytekhovskiy_yul@pers.spmi.ru*

The lattice structure of crystals forbids the 5th order symmetry axes. Therefore, a dodecahedron and an icosahedron were excluded from the set of crystalline forms by R.J. Haüy. Later, J.B. Rome de Lisle showed by goniometric measurements that the well-known “dodecahedron” and “icosahedron” of pyrite are the pentagonal dodecahedron and its combination with the octahedron. Nevertheless, E.S. Fedorov and V.V. Dolivo-Dobrovolsky considered the dodecahedron–icosahedral system to be very close to the cubic system (with $4L_3$, $3L_2$, and $3P$ in the same orientation). Over the past few decades, mineralogy and crystallography have conceptually and methodically mastered exotic objects (shechtmanites, fullerenes, capsids of icosahedral viruses) with 5th order symmetry axes. It is proposed to include the dodecahedron–icosahedral syngony in the university course of crystallography with axial and planaxial species of symmetry.

Keywords: dodecahedron, icosahedron, syngony, point symmetry group, simple shape, 5th order symmetry axes, shechtmanite, graphene, fullerene

REFERENCES

Bindi L., Steinhardt P.J., Yao N., Lu P.J. Natural quasicrystals. *Science*. **2009**. Vol. 324. N 5932. P. 1306–1309.

Bombicci L. Sulle superficie elicoidi e paraboloidi nei romboedri detti selliformi di dolomite e di altri carbonate anidri. Bologna: Tip. Gamberini e Parmeggiani, **1885**. 15 p.

Caspar D.L. D., Klug A. Physical principles in the construction of regular viruses. In: *Cold Spring Harbor Symp. on Quant. Biology*. **1962**. Vol. 27. P. 1–24.

Chuprunov E.V., Khokhlov A.F., Faddeev M.A. Crystallography basics: university textbook. Moscow: Fizmatlit, **2006**. 500 p. (*in Russian*).

Crick F.H.C., Watson J.D. Structure of small viruses. *Nature*. **1956**. Vol. 177. P. 473–475.

Dolivo-Dobrovolsky V.V. The study of the dodecahedron-icosahedral system. *Zapiski RMO* (*Proc. Russian Miner. Soc.*). **1924**. N 1. P. 169–181 (*in Russian*).

Engel P. On two special classes of parallelohedra in E6. *Acta Crystal*. **2019**. A75. P. 574–583.

Eremin N.N., Eremina T.A. Entertaining crystallography: a manual. Moscow: MCNMO Publ. House, **2013**. 134 p. (*in Russian*).

Fedorov E.S. Crystallography course. Saint Petersburg: K.L. Rikker Publ. House, **1901**. 435 p. (*in Russian*).

Fedorov E.S. Workshop on the main sections of crystallography. Petrograd: Economic typo-lithography, **1915**. 20 p. (*in Russian*).

Galiulin R.V. The crystallographic picture of the world. *Physics-Uspekhi. Advances in Physical Sciencies*. **2002**. Vol. 172. N 2. P. 229–233 (*in Russian*).

Godovikov A.A., Nenasheva S.N. Structural-chemical systematics of minerals. 3rd ed. Springer Nature Switzerland AG, **2020**. 313 p.

Kroto H.W., Heath J.R., O'Brien S.C., Curl R.F., Smalley R.E. C_{60}: Buckminsterfullerene. *Nature*. **1985**. Vol. 318. P. 162–163.

Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A. Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science*. **2004**. Vol. 306. N 5696. P. 666–669.

Pimonov V.V., Konevtsova O.V., Rochal S.B. Anomalous small viral shells and simplest polyhedra with icosahedral symmetry: the rhombic triacontahedron case. *Acta Crystal*. **2019**. A75. P. 135–141.

Rudnev S.V. Application of Riemann's elliptic geometry to the study of lattice structures of real crystals. PhD thesis syn. Leningrad: Leningrad State University, **1986**. 18 p. (*in Russian*).

Shafranovsky I.I. The history of crystallography from ancient times to the beginning of the XIX century. Leningrad: Nauka, **1978**. 297 p. (*in Russian*).

Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J.W. Metallic phase with long-range otientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett*. **1984**. Vol. 53. N 20. P. 1951–1953.

Voytekhovsky Yu.L. From teaching experience. III. Crystallography of icosahedral viruses. *Geosciences Herald*. **2020**. N 4. P. 40–44 (*in Russian*).