ЗАПИСКИ РОССИЙСКОГО МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА 2023, Ч. CLII, № 6, с. 111–120

ИСТОРИЯ НАУКИ

О БЕСКОНЕЧНОМ, ЕСТЕСТВЕННО СОДЕРЖАЩЕМСЯ В КОНЕЧНОМ

© 2023 г. Почетный член **Ю. Л. Войтеховский**[1, 2, *]

[1]*Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, наб. р. Мойки, 48, Санкт-Петербург, 191186 Россия*

[2]*Российское минералогическое общество, 21-я линия, 2, Санкт-Петербург, 199106 Россия*

**e-mail: vojtehovskij@herzen.spb.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2023 г.
После доработки 27.09.2023 г.
Принята к публикации 02.10.2023 г.

Статья посвящена истории представлений о форме кристаллического полиэдра и его структуре. Показано, как идеи поясов граней и кристаллической решетки естественным образом вводят бесконечности в науку о кристаллах, всегда конечных в практике минералогов. Статья приурочена к 2000-летию со дня рождения Плиния Ст., 385-летию – Н. Стенона, 280-летию – Р.Ж. Гаюи, 180-летию – П.Г. Грота, 170-летию – В.М. Гольдшмидта, Е.С. Фёдорова и А.М. Шенфлиса. Все они в своем творчестве пытались овладеть, казалось бы, бесконечными многообразиями объектов согласно найденным принципам.

Ключевые слова: Плиний Ст., Н. Стенон, Р.Ж. Гаюи, П.Г. Грот, В.М. Гольдшмидт, Е.С. Фёдоров, А.М. Шенфлис, пояс граней, закон поясов, закон компликации, кристаллическая решетка, история кристаллографии

DOI: 10.31857/S0869605523060060, **EDN:** XQRGYV

Этот год богат на юбилеи, круглые и полукруглые даты.[1] Чего стоит 2000-летие со дня рождения Плиния Ст. (23–79)! Далее следуют: 385-летие Н. Стенона (1638–1686), 280-летие Р.Ж. Гаюи (1743–1822), 180-летие П.Г. Грота (1843–1927), 170-летие В.М. Гольдшмидта (1853–1933), Е.С. Фёдорова (1853–1919) и А.М. Шенфлиса (1853–1928). Каждый внес значимый вклад в естественные науки, в частности, в минералогию и тот ее раздел, который благодаря им оформился в кристаллографию. Каждый заслуживает отдельной статьи, но трудно что-либо добавить к текстам И.И. Шафрановского (1978, 1980). Попробуем увязать деяния наших героев в необычный сюжет. И он найдется, если посмотреть на них немного отстраненно. Тогда можно видеть, что все они пытались упорядочить огромные многообразия занимавших их предметов природы.

В названии статьи очевидна параллель с названием книги “О твердом, естественно содержащемся в твердом” (Стенон, 1957). Она намекает на дату со дня рождения ее автора и акцентирует главную идею статьи: в современных представлениях о форме и структуре кристаллов, всегда конечных в руках минералогов, естественно содержатся разные бесконечности. О них обычно не успеваешь сказать в досадно коротких университетских курсах кристаллографии и минералогии для геологов. Но о них стоит говорить, ибо, если кристаллическая решетка транслируема, то бесконечный космос не

[1] Помню из студенческой поры, как на лекции по кристаллографии И.И. Шафрановский заметил, что древние считали юбилеями 25, 50, 75 и 100 лет, а современные любители “симпосиев и сатурналий” (посмотрев на нас строго) добавили прочие даты, оканчивающиеся на 0 (круглые) и 5 (полукруглые). Поясним, что симпосии и сатурналии – пиршества с дионисийским акцентом...

где-то далеко, абстрактно и потенциально, но в каждом кристалле, конкретно и актуально. А это определяет стиль мышления будущего геолога: оно приземленно и ограничено или свободно...

ПЛИНИЙ СТ.

"Естественная история" Плиния Ст. – об этом, ибо для просвещенного римлянина, унаследовавшего мировоззрение греков, бесконечно разнообразный космос – не хаос, и надо понять его порядок. Горным породам и минералам посвящены две последние книги энциклопедии: XXXVI. Камни, скульптуры; XXXVII. Драгоценные камни и изделия из них. Римляне были практичны, но все же Плиний Ст. приметил и нечто бесполезное – совершенные кристаллы суть многогранники. И.И. Шафрановский сказал осторожно: "У древних авторов кристаллические формы многогранников почти не упоминаются. Даже в <...> "Естественной истории" Плиния <...> употребляются лишь лаконичные и неточные эпитеты: золото и алмаз – "четырехугольные", горный хрусталь – "шестиугольный"" (Шафрановский, 1956, с. 213).

Вот эти описания в переводе В.М. Севергина: "Алмаз. <...> При гладких своих шести сторонах оканчивается заострением, в двух противоположных концах как бы две кегли соединяются вместе наиболее широкими своими плоскостями" (Плиний Ст., 1819, с. 4). "Амфитан. <...> Находится в той части Индии, где муравьи выкапывают золото, и где он подобно золоту находится четыреугольного вида" (там же, с. 28–29). "Берилл. <...> Все бериллы, по домыслу художников, полируются в виде шестиугольников. <...> Некоторые думают, что они уже родятся угловатые" (там же, с. 68–69). "Горный хрусталь. <...> Почему он родится шестисторонний, сему трудно найти причину, тем более, что и концы не одинаковый вид имеют, и гладкость боков столь совершенна, что того никаким искусством произвести не можно" (там же, с. 116–117). Здесь еще нет научной мысли, нет даже эмпирического обобщения. Но в констатации полиэдрических форм совершенных природных кристаллов через указание их атрибутов (граней, ребер и вершин) Плиний Ст. был первым.

Н. СТЕНОН

Разве в последней цитате не прозвучал вопрос о форме и происхождении горного хрусталя? На 16 столетий он за ненадобностью как бы пропал. Но невозможно, чтобы он не возникал всякий раз там, где рудокопы находили ограненные кристаллы, то есть в самых разных частях света. А ответ в научной форме был дан в 1669 г. в трактате "О твердом, естественно содержащемся в твердом" (Стенон, 1957) и лег в основание генетической минералогии и минералогической кристаллографии. Мы имеем в виду идею о том, что минералы растут последовательным наложением слоев, и 1-ый эмпирический закон кристаллографии о постоянстве углов между соответственными гранями кристаллов одного вида. Бесконечное разнообразие форм кристаллов Н. Стенон классифицировал уже тем, что соотнес их с минеральными видами.

Р.Ж. ГАЮИ

Р.Ж. Гаюи сделал важный шаг именно в этом направлении, задавшись вопросом: как возможны столь разные формы на кристаллах не только разных, но и одного вида? В итоге – стройная теория о первичных и вторичных формах, впервые апеллирующая к первоэлементам, то есть связывающая форму и структуру кристалла. Первичные формы получаются делением кристалла по спайности до "интегрирующих молекул", вторичные – наложением их слоев на первичные формы согласно "теории убывания". Концепция сочеталась с его же "законом рациональных отношений параметров" и запретила в кристаллографии платоновы додекаэдр и икосаэдр. "Геометрическая классификация вторичных форм по Гаюи весьма сложна. <...> Далее появляются 30-гранные и даже 90-гранные (!) комбинации. Так как комбинаций может существовать неограниченное множество, то лишь благодаря счастливой случайности список названий вторичных комбинаций по числу их граней не разросся у Гаюи до бесконечности” (Шафрановский, 1956, с. 225).

Но заметим, что он как раз и хотел объяснить это разнообразие форм, кажущееся бесконечным. На кристалле везувиана он действительно насчитал 90 граней (там же, с. 223), так ведь природные 48-гранники описал и сам И.И. Шафрановский (1968). Теория Р.Ж. Гаюи пала под ударами внутренних (геометрических) и внешних (физических) противоречий. Такова логика науки, одна парадигма уступила другой. И все же это – оставшаяся в истории попытка овладения бесконечным разнообразием кристаллических форм. Заметим, что 2-ой эмпирический закон Р.Ж. Гаюи был принят не сразу, а после его доработки и опубликования в “Трактате о кристаллографии” У. Миллером в 1842 г. (Пущаровский, 2022).

П.Г. ГРОТ

П.Г. Гроту мы обязаны тем, что он издал в своем журнале “Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie” статьи Е.С. Фёдорова, распространив в мире его систематику и номенклатуру 32 видов симметрии, устоявшуюся к началу XX века после долгих борений. Он же первый оценил работы Е.С. Фёдорова и А.М. Шенфлиса, приведшие к теории 230 пространственных групп симметрии, и рекомендовал Е.С. Фёдорова в Баварскую академию наук. Главные труды П.Г. Грота: “Табличный обзор минералов”, “Физическая кристаллография” и “Химическая кристаллография” в 5 томах (сводка кристаллических форм и физических свойств нескольких тысяч веществ) – привели к признанию методов кристаллографии в органической химии. Он же “вернул” атомы в узлы кристаллических решеток, после работ М.Л. Франкенгейма и О. Браве представлявших собой абстрактные геометрические образы, и тем самым сделал кристаллографию физической. Избран членом (1877) и почетным членом (1890) Императорского Санкт-Петербургского минералогического общества, членом-корреспондентом Императорской Санкт-Петербургской академии наук (1883) и почетным членом Российской академии наук (1925). Дело жизни П.Г. Грота – тоже упорядочение составов, форм и структур огромных многообразий неорганических и органических химических соединений, в том числе минералов.

С именем П.Г. Грота связано и производство полиэдрических моделей, полезных в обучении кристаллографии. Методика преподавания была подхвачена Ленинградским горным институтом и Московским университетом. История сохранила фамилии мастеров: в институте – В.П. Будаев, в университете – И.Э. Петц. “При участии работников кристаллографической модельной мастерской Ленинградского горного института во главе с непревзойденным мастером В.П. Будаевым создается коллекция моделей атомных структур кристаллов для музея <...> (эта коллекция с большим успехом демонстрировалась на Международном геологическом конгрессе в Ленинграде в 1937 г.). Впоследствии такая же коллекция была выполнена для Института кристаллографии Академии наук СССР (Шафрановский, 1996, с. 32). “Огромным достижением Фёдоровского института явилась организация по инициативе А.К. Болдырева единственной в нашем Союзе экспериментальной модельной мастерской, изготовлявшей кристаллические модели простых форм и комбинаций, а затем с успехом приступившей к созданию первых моделей кристаллических структур. Душой этого дела явился замечательный мастер и талантливый конструктор-изобретатель В.П. Будаев. Им был создан специальный прибор для выпиливания полиэдрических моделей, в основе которого лежала федоровская идея о двукружном (теодолитном) гониометре” (там же, с. 89).

Об И.Э. Петце есть записи на оборотах двух фото в архиве Д.П. Григорьева, хранящемся в Российском минералогическом обществе: (рукой Д.П. Григорьева) “Петц Иосиф Эдуардович, специалист по изготовлению шлифов и кристаллографических моделей, был препаратором у П. Грота в Мюнхене, в Россию его ввез акад. В.И. Вернадский, много лет работал в АН при Минералогическом музее, умер в 1942” и (рукой И.Э. Петца, поскольку от первого лица) “Petz Josef, geb. 1865 zu München. Ich war bei Prof. Dr. Groth von 1888 bis 1899, Akademie der Wissenschaften Peterburg von 1900 bis 1935” (Петц Йозеф, род. в 1865 в Мюнхене. Я был при профессоре, докторе Гроте с 1888 до 1899, при Академии наук в Петербурге с 1900 до 1935 – пер. с нем. авт.).

Непреходящую важность начинания П. Грота показывает следующее письмо из архива Д.П. Григорьева: “20.02.1968. Заведующему кафедрой минералогии. Я слышала, что при Вашем институте имеются мастерские, изготовляющие кристаллографические модели. Техникум дважды запрашивал институт о возможности приобретения этих моделей, но ответа не поступало. Может быть, эти мастерские уже ликвидированы? Я просто не знаю, куда еще писать. Считая, что Ваша кафедра, безусловно, в курсе дела, я позволила себе обратиться лично к Вам с просьбой сообщить, существуют ли у Вас такие мастерские и их адрес. Приношу извинения за беспокойство. С уважением (подпись). Мой адрес: Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Революции, 51, Геологоразведочный техникум, кабинет минералогии, Левашевой И.И.”.

Итак, напрашивается вывод: как угодно большое природное многообразие всегда удается организовать в некоторую систему. Так, для форм и структур минералов имеем: 3 категории, 7 сингоний,[2] 47 простых форм, 32 точечные группы симметрии Гесселя–Гадолина, 14 решеток Браве, 230 пространственных групп симметрии Фёдорова-Шенфлиса... Список констант можно продолжить. Он радует, ибо говорит о фундаментальности нашей науки. Так что же, всякая форма кристалла (с точностью до движения граней вдоль нормалей или до комбинаторного типа, имея в виду принцип диссимметрии Кюри) и структура (малой деформацией углов и параметров, имея в виду закон пределов Фёдорова–Грота) сводима к одному из конечного числа типов? Покажем, что в наших представлениях о минералах есть и неустранимые бесконечности.

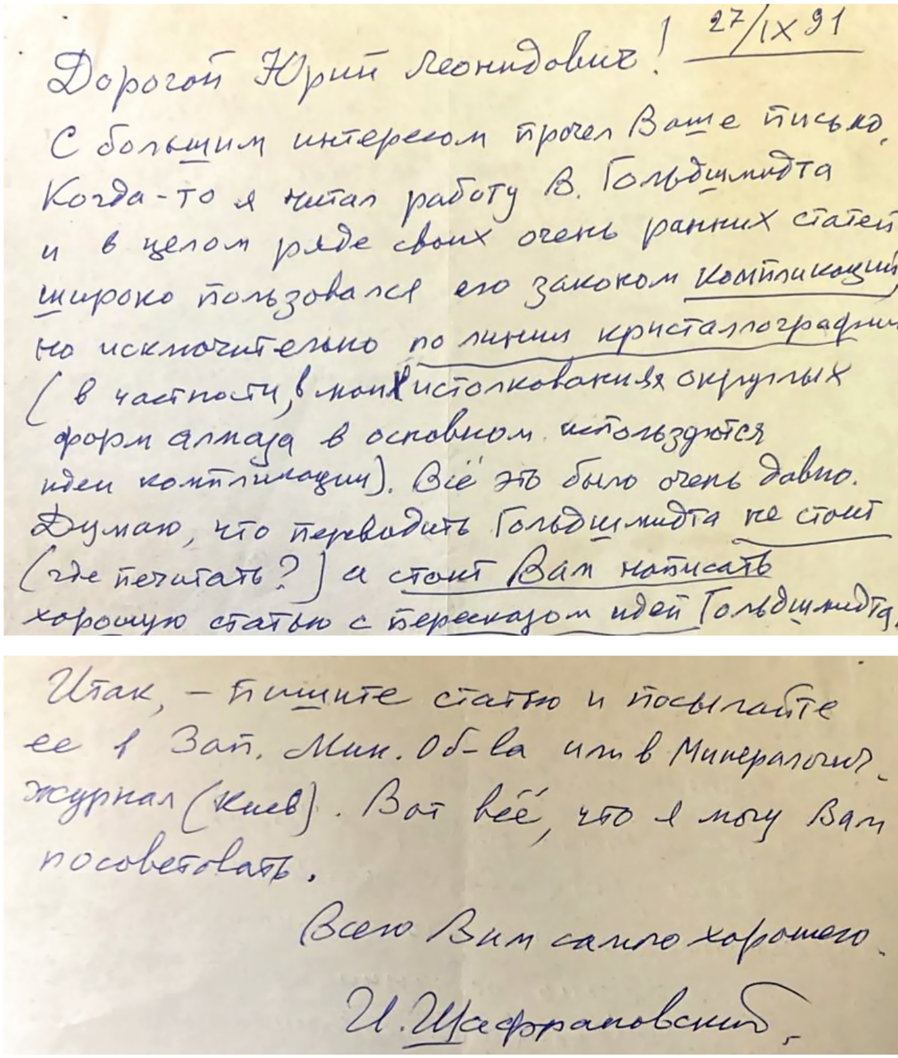
В.М. ГОЛЬДШМИДТ

В связи с этим именем вспоминаются фундаментальные сводки “Индексы кристаллических форм минералов” в 3 томах, “Кристаллографические таблицы углов” и “Атлас кристаллических форм” в 18 томах (по 9 с рисунками и описаниями). Последние издавались с 1913 по 1923 гг. и свидетельствуют о титаническом труде. Но далее речь пойдет о другой работе.

17.VIII.91 автор послал письмо И.И. Шафрановскому с предложением перевести и издать к юбилею В.М. Гольдшмидта его натурфилософскую книгу (Goldschmidt, 1921) из фонда А.Е. Ферсмана в библиотеке Кольского НЦ РАН.[3] В письме от 27.IX.91 наставник не преминул заметить, что 140 лет – не юбилей, а круглая дата, и сообщил, что “в целом ряде своих очень ранних статей широко пользовался его законом компликаций <...> в частности, в <...> истолкованиях округлых форм алмаза”, что пере-

[2] До Е.С. Фёдорова их было 6, в расширенной кристаллографии, узаконившей квази-кристаллы и фуллерены, нужна 8-я, додекаэдро-икосаэдрическая с 8 простыми формами. Она не согласуется с трансляциями, но оправдывает поворотные оси 5-го и инверсионные 10-го порядков. Расширение кристаллографии странными фазами началось не с открытия квазикристаллов Д. Шехтманом в 1982 г. Еще в 1931 г. В. Гольдшмидт выделил на кристаллах калаверита неиндицируемые грани и заключил, что закон Р.Ж. Гаюи не универсален. Сегодня эти структуры называются несоразмерно модулированными (Пущаровский, 2022).

[3] По окончании Московского университета А.Е. Ферсман проходил стажировку в Гейдельберге у В.М. Гольдшмидта, который затем всю жизнь посылал ученику свои книги, осевшие в библиотеке научно-исследовательской базы “Тиетта” в Хибинах, ныне – Кольский НЦ РАН.



27/IX 91

Дорогой Юрий Леонидович!

С большим интересом прочел Ваше письмо.
Когда-то я читал работу В. Гольдшмидта
и в целом ряде своих очень ранних статей
широко пользовался его законом компликаций
но исключительно по линии кристаллографии
(в частности, в моих истолкованиях округлых
форм алмаза в основном используются
идеи компликации). Всё это было очень давно.
Думаю, что переводить Гольдшмидта не стоит
(где печатать?) а стоит Вам написать
хорошую статью с пересказом идей Гольдшмидта.

Итак, — пишите статью и посылайте
ее в Зап. Мин. Об-ва или в Минералогич.
журнал (Киев). Вот всё, что я могу Вам
посоветовать.

Всего Вам самого хорошего.

И. Шафрановский.

Рис. 1. Начало и окончание письма И.И. Шафрановского.

Fig. 1. Beginning and end of the I.I. Shafranovsky's letter.

водить книгу не надо, а стоит “написать хорошую статью с пересказом идей Гольдшмидта” (рис. 1).

Позднее книга все же была переведена и издана с предисловием Н.П. Юшкина (Гольдшмидт, 1998). Он отметил, что “на растворяющихся кристаллах серы <...> символы всех без исключения граней 1-го и 2-го и около 60% 3-го притупления выводятся из исходных путем компликации” (Юшкин, 1968, с. 94–95), что “на кристаллах пирита отсутствуют притупления 1-го и упорно выступают притупления 2-го порядка” (Шафрановский, 1946, 1951), что “Е.С. Фёдоров как-то очень быстро перешагнул” через идеи компликации, но это “не отвергает <...> перспективы для разработки <...> новых эвристических подходов”.

Primärflächen:	A	.	.	.	.	.	.	.	B
$N_0 =$	0	·	·	·	·	·	·	·	∞ = Normalreihe 0.
1. Complication:	A	·	·	·	C	·	·	·	B
$N_1 =$	0	·	·	·	1	·	·	·	∞ = Normalreihe 1.
2. Complication:	A	·	D	·	C	·	E	·	B
$N_2 =$	0	·	1/2	·	1	·	2	·	∞ = Normalreihe 2.
3. Complication:	A	F	D	G	C	H	E	J	B
$N_3 =$	0	1/3	1/2	2/3	1	3/2	2	3	∞ = Normalreihe 3.

Рис. 2. Нормальные ряды (Normalreihe) N_1, N_2 и N_3 получаются из N_0, заданного первичными гранями (Primärflächen) A и B, компликациями 1, 2 и 3 (Goldschmidt, 1921, с. 7). Грани обозначены латинскими буквами, их символы – дробями.

Fig. 2. Normal rows (Normalreihe) N_1, N_2 and N_3 are obtained from N_0 given by the primary facets (Primärflächen) A and B by the complications 1, 2 and 3 (Goldschmidt, 1921, p. 7). The faces are labelled with Latin letters, their symbols with fractions.

По Х.С. Вейсу, пояс – это множество граней на кристалле, пересекающихся по параллельным ребрам. Но в какой очередности образуются грани? В.М. Гольдшмидт и пытался ответить на этот вопрос своим “законом компликации”, использовав математическую структуру, сегодня называемую “деревом Штерна–Броко”.[4] Если даны дроби a/b и c/d, то “медианта” (a + c)/(b + d) всегда заключена между ними.[5] В.М. Гольдшмидт приписал исходным граням символы 0/1 и 1/0. Срезая их общее ребро, получим грань с символом 1/1. Пояса быстро заполняются промежуточными гранями. Для получения их символов берем две соседние дроби и делим сумму числителей на сумму знаменателей. **№ 0**: 0/1, 1/0 → **№ 1**: 0/1, 1/1, 1/0 → **№ 2**: 0/1, 1/2, 1/1, 2/1, 1/0 → **№ 3**: 0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1, 3/2, 2/1, 3/1, 1/0 → **№ 4**: 0/1, 1/4, 1/3, 2/5, ½, 3/5, 2/3, 3/4, 1/1, 4/3, 3/2, 5/3, 2/1, 5/2, 3/1, 4/1, 1/0... (рис. 2). Эти числовые последовательности (ряды) В.М. Гольдшмидт назвал гармоническими, если они полны (без пропусков) – нормальными. На реальных кристаллах пояса более высоких, чем № 4, порядков не встречаются, да и в четырех первых бывают пропуски. В связи с наблюдениями И.И. Шафрановского и Н.П. Юшкина заметим, что пояса все более высоких порядков дают кристаллу все больше возможностей для расположения граней. Но из математики вовсе не следует (а физику процесса В.М. Гольдшмидт не пояснил), что они должны реализоваться последовательно и полно. Далее нас интересует даже не это, а целая серия наличных бесконечностей.

Первая предъявляется заменой исходного символа 1/0 на ∞ без пояснений (рис. 2). Но процедура построения поясов символична. Символы не “складываются”, а “взаимодействуют”. Лишь обращаясь к упорядочению на числовой прямой, мы “узнаем” в них дроби: в символе первой грани – начало координат 0/1 = 0, в первой медианте – единицу 1/1 = 1. Символ 1/0 на каждом шаге порождает очередное натуральное число,

[4] В честь немецкого математика М.А. Штерна (1807–1894) и французского часовщика и математика-любителя Л.А. Броко (1817–1878). Первый использовал его в теории чисел, второй – при расчете передаточных чисел часовых механизмов.

[5] Такое “сложение” дробей невольно напоминает школьные уроки арифметики, ошибки и последствия... Лучше сразу отказаться от термина “сложение”, заменив его на “операцию”. Если a/b < c/d, то: a/b = a(1 + + d/b)/b(1 + d/b) = (a + ad/b)/(b + d) < (a + c)/(b + d) < (a + c)/(ad/c + d) = (a/c + 1)c/(a/c + 1)d = c/d.

в целом – их последовательность 1, 2, 3..., то есть потенциальную (появляющуюся добавлением все новых членов) счетную (это ее имя, мы как бы считаем предметы, последовательно присваивая им числа натурального ряда) бесконечность, самую малую из возможных. Символ 0/1 порождает последовательность дробей, обратных к натуральным числам. Р. Генон (2013) называет их симметричными. Числа $n/1$ и $1/n$ в рядах симметричны относительно 1, но обратны по величине. Их последовательности лучше называть инверсионными. Симметричными были бы последовательности чисел n и $-n$. Р. Генон прав в другом: если нас озадачивает бесконечность $1/0 = \infty$, которая не число (ее нельзя получить арифметически), то почему нам понятно симметричное ей в рядах число $0/1 = 0$ (получаемое вычитанием любого числа из равного ему)?[6] Следовало бы различать два нуля – как меру чего-либо и как метафизическое “ничто”.

Оценим, как быстро засеваются дробями промежутки между натуральными числами $n/1$ и обратными им $1/n$. Если компликация продолжается неограниченно, номера поясов образуют счетную бесконечность 1, 2, 3... Число граней в поясе № n равно $2^n + 1$ (находится как сумма первых членов геометрической прогрессии). Символ 2^n настораживает, в теории множеств он очень важен. Для множества с n элементами 2^n – это мощность “булеана”, то есть множества всех его подмножеств.[7] Если n – счетная бесконечность, то 2^n – континуум, например, число точек на прямой, плоскости, в пространстве... (Кантор, 1985). Неужели в схеме компликации кроется континуум? Нет, хотя число граней в поясе действительно растет как 2^n. Но оно всегда конечно, а счетное множество конечных множеств “всего лишь” счетно.

Проследим за числовыми последовательностями, порождаемыми шагами компликации. Выше отмечено, что символ 0/1 (число) порождает последовательность убывающих чисел $1/n$, сходящуюся в точном математическом смысле к пределу $0/1 = 0$. Символ 1/0 (не число) генерирует последовательность натуральных чисел $n/1$, “стремящуюся к бесконечности”. На нелогичность этого выражения тоже обратил внимание Р. Генон: нельзя стремиться к чему-то столь неясному, “что больше любого наперед заданного числа”. Этим разнообразие не заканчивается. Можно показать, что к пределам сходятся только “алгоритмические” последовательности дробей, в которых каждый новый член, начиная с некоторого, в очередных компликациях взаимодействует только с левым или правым.[8] Иначе числовая последовательность не имеет предела именно из-за непоследовательного (прыгающего то влево, то вправо) очередного шага. Итак, компликации В.М. Гольдшмидта порождают потенциальные счетные бесконечности в форме гармонических поясов на кристаллах и отвечающих им сходящихся и расходящихся последовательностей рациональных дробей.

Е.С. ФЁДОРОВ И А.М. ШЕНФЛИС

В фундаментальной теории кристалла бесконечность присутствует актуально, так как любая пространственная группа симметрии содержит трансляцию на конечную величину. Как любая операция симметрии, она должна совмещать его с собой. А это возможно лишь для бесконечного кристалла. В любом репере решетки трансляции

[6] Еще более обескураживает геометрическое преобразование – инверсия относительно окружности (сферы), когда весь мир снаружи отображается вовнутрь, при этом вся бесконечность – в ее центр. Чтобы соблюсти поточечное соответствие, математики говорят о бесконечно удаленной точке. Нет пугающе необъятной бесконечности. Есть бесконечно удаленная точка, инверсионно-симметричная центру окружности (сферы). К ней можно идти вдоль любого радиуса, все пути ведут к ней. И это навязывает космологическое представление о замкнутости пространства без того даже, чтобы придать ему кривизну физическими действиями масс, зарядов...

[7] Это равенство опирается на бином Ньютона, а именно, сумма его коэффициентов, то есть сочетаний из n по 0 (пустое множество), 1, ..., n, равна: $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$.

[8] Они порождают числовые последовательности Фибоначчи в числителях и знаменателях дробей, причем те и другие связаны между собой. Это интересный раздел теории чисел.

вдоль осей (в обе стороны от начала) дадут последовательности целых чисел ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3... – счетные бесконечности. Еще одна бесконечность возникает в связи с понятием элементарной ячейки кристалла. Строя его вокруг начала координат последовательными оболочками ячеек, примыкающих по целым граням (эхо теории Р.Ж. Гаюи), получим счетную последовательность оболочек (1, 2, 3...), в каждой – конечное число ячеек, вместе – снова счетную бесконечность.

Рассматривая в последнем примере наложение последовательных оболочек как модель роста кристалла (в смысле Н. Стенона), получим потенциальную, не ограниченную в своем становлении бесконечность. Но теоретико-групповое преобразование решетки, содержащее трансляцию, совершается в сознании мгновенно и не предполагает ее "дорастания" ради того, чтобы некий фрагмент совместился со своей копией, находящейся точно там, где нужно. Иначе говоря, в фундаментальной теории Е.С. Фёдорова и А.М. Шенфлиса кристалл бесконечен актуально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы пытались показать, что в наших представлениях о многообразиях минералов и структурах кристаллов бесконечности присутствуют не только как метафоры, но и как строго определяемые данности. Мы верим, что приближаемся к истине, время от времени меняя старую парадигму на новую (Т. Кун). А все же согласимся с философской максимой, что кристаллография и минералогия – науки о том, каковы кристаллы и минералы не "в себе и для себя", а "для нас" (Г. Гегель). И разве не верно, что за этими "феноменами", как бы глубоко и всесторонне мы их не изучали, маячат "ноумены" (И. Кант)? Мы пользуемся математикой, гарантирующей строгость определений, вычислений и самого мышления. В ней обнаруживаем иерархию бесконечностей (Г. Кантор). Но не попадаем ли в ловушку этого специфического языка (Л. Витгенштейн)? Мы верим, что он не искажает наши представления о мире.

И все же, откуда берутся бесконечности, если сказать без формул и чисел? Опыт описания огромных природных многообразий классиками естествознания[9] показывает следующее. Их понимание возможно лишь в свете принципа, объемлющего все многообразие, но диалектически отрицающего его каждый индивид. Идеальный кристалл – отрицание всех реальных кристаллов: конечных, сплошных, с физическими свойствами, всегда несовершенных, с индивидуальной анатомией, в которых идеал лишь угадывается. И если найден принцип, то за ним следует удивление – в развернутом виде он всегда бесконечен и даже избыточен для описания эмпирики, всегда конечной в лаборатории исследователя. Наконец, после разговоров о бесконечностях как понять, что мы всегда держим в руках конечный минеральный индивид? А просто пересеклись две онтогенические траектории – его и наша. До того первая уж точно была направлена в бесконечность. Продолжится ли – зависит от нас...

Автор благодарен рецензентам за весьма профессиональные рекомендации, способствовавшие лучшему изложению материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Генон Р. Наука чисел. СПб.: Владимир Даль, **2013**. 270 с.

Гольдшмидт В. О компликации и диспликации / Пер. с нем. Ю.Л. Войтеховского, предисловие Н.П. Юшкина. Апатиты: Изд. КНЦ РАН, **1998**. 69 с.

Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, **1985**. 430 с.

[9] Из числа биологов назовем хотя бы "отца современной ботанической систематики", автора категорий индивида и вида (в том числе минеральных) К. Линнея (1707–1778), зоолога Э. Геккеля (1834–1919), энтомолога Ж. Фабра (1823–1915). Кстати, ему в этом году – 200 лет со дня рождения.

Плиний Ст. Кая Плиния Секунда естественная история ископаемых тел, преложенная на российский язык в азбучном порядке, и примечаниями дополненная трудами В. Севергина. СПб.: Имп. Акад. наук, **1819**. 364 с.

Пущаровский Д.Ю. Современная кристаллография: полезна ли она наукам о Земле? // Вестник Московского ун-та. Сер. 4. Геология. **2022**. № 1. С. 3–23.

Стенон Н. О твердом, естественно содержащемся в твердом. М.: Изд. АН СССР, **1957**. 151 с.

Шафрановский И. И. К вопросу о статистическом распределении граней на кристаллах // ЗВМО. **1946**. № 3. С. 163–166.

Шафрановский И.И. Распределение второстепенных граней по кристаллографическим поясам и их минерагенетическое значение / Кристаллография. М.: Металлургиздат, **1951**. С. 245–250.

Шафрановский И.И. История учения о формах кристаллических многогранников / Кристаллография. М.: Металлургиздат, **1956**. С. 213–247.

Шафрановский И.И. Сорокавосьмигранники на кристаллах минералов // ЗВМО. **1968**. № 2. С. 249–251.

Шафрановский И.И. История кристаллографии с древнейших времен до начала XIX столетия. Л.: Наука, **1978**. 296 с.

Шафрановский И.И. История кристаллографии. XIX век. Л.: Наука, **1980**. 324 с.

Шафрановский И.И. Кристаллография в СССР. 1917–1991. СПб.: Наука, **1996**. 191 с.

Юшкин Н.П. Минералогия и парагенезис самородной серы в экзогенных месторождениях. Л.: Наука, **1968**. 187 с.

Goldschmidt V. Über Complikation und Displikation. Heidelberg: Carl Winter, **1921**. 90 s.

On the Infinite Naturally Contained in the Finite

Yu. L. Voytekhovsky[a, b, *]

[a]*Herzen Russian State Pedagogical University, Saint-Petersburg, Russia*
[b]*Russian Mineralogical Society, Saint-Petersburg, Russia*
**e-mail: vojtehovskijj@herzen.spb.ru*

The article is devoted to the history of ideas about the shape of the crystal polyhedron and its structure. It is shown how the ideas of face belts and crystal lattice naturally introduce infinities into the science of crystals, always finite in the practice of mineralogists. The article is timed to the 2000th anniversary of the birth of Pliny the Elder, the 385th – of N. Stenon, the 280th – of R.J. Haüy, the 180th – of P.G. Groth, the 170th – of V.M. Goldschmidt, E.S. Fedorov, and A.M. Schönflies. All of them in their work tried to master the seemingly infinite varieties of objects according to found principles.

Keywords: Pliny the Elder, N. Stenon, R.J. Haüy, P.G. Groth, V.M. Goldschmidt, E.S. Fedorov, A.M. Schönflies, facet belt, law of belts, law of complication, crystalline lattice, history of crystallography

REFERENCES

Cantor G. Works on set theory. Moscow: Nauka, **1985**. 430 p. (*in Russian*).

Guénon R. The science of numbers. Saint Petersburg: Vladimir Dal', **2013**. 270 p. (*in Russian*).

Goldschmidt V. Über Complikation und Displikation. Heidelberg: Carl Winter. **1921**. 90 s.

Goldschmidt V. On Complication and Displication / Transl. from German by Yu.L. Voytekhovsky, foreword by N.P. Yushkin. Apatity: KSC RAS, **1998**. 69 p. (*in Russian*).

Pliny the Elder. Natural history of fossil bodies of Caius Plinius Secundus, put into Russian in the alphabetical order, and with notes supplemented by the works of V. Severgin. Saint Petersburg: Imp. Acad. Sci., **1819**. 364 p. (*in Russian*).

Puscharovsky D.Yu. Modern crystallography: is it useful for Earth sciences? *Vestnik of Moscow University. Ser. 4. Geol.* **2022**. N 1. P. 3–23 (*in Russian*).

Shafranovsky I.I. To the question of statistical distribution of faces on crystals. *Zapiski RMO* (*Proc. Russian Miner. Soc.*). **1946**. N 3. P. 163–166 (*in Russian*).

Shafranovsky I.I. Distribution of minor facets by crystallographic belts and their mineralogenetic significance. In: *Crystallography*. Moscow: Metallurgizdat, **1951**. P. 245–250 (*in Russian*).

Shafranovsky I.I. History of the doctrine of the forms of crystalline polyhedra. In: *Crystallography.* Moscow: Metallurgizdat, **1956**. P. 213–247 (*in Russian*).

Shafranovsky I.I. Fourty-eight-hedrons on mineral crystals. *Zapiski RMO* (*Proc. Russian Miner. Soc*.). **1968**. N 2. P. 249–251 (*in Russian*).

Shafranovsky I.I. History of crystallography from the most ancient times to the beginning of the XIX century. Leningrad: Nauka, **1978**. 296 p. (*in Russian*).

Shafranovsky I.I. History of crystallography. XIX century. Leningrad: Nauka, **1980**. 324 p. (*in Russian*).

Shafranovsky I.I. Crystallography in the USSR. 1917–1991. Saint Petersburg: Nauka, **1996**. 191 p. (*in Russian*).

Stenon N. On the solid naturally contained in the solid. Moscow: Acad. Sci. USSR, **1957**. 151 p. (*in Russian*).

Yushkin N.P. Mineralogy and paragenesis of native sulphur in exogenous deposits. Leningrad: Nauka, **1968**. 187 p. (*in Russian*).