

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОЖАЙНОСТИ И ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ САДОВ ИНТЕНСИВНОГО И СУПЕРИНТЕНСИВНОГО ТИПА

А.А. Завражнов¹, кандидат технических наук, **А.И. Завражнов²**, академик РАН,
Б.С. Мишин², кандидат технических наук

¹Федеральный научный центр им. И.В. Мичурина,
393774, Мичуринск, Тамбовская обл., ул. Мичурина, 30
E-mail: noc-inteh@yandex

²Мичуринский государственный аграрный университет,
393760, Мичуринск, Тамбовская обл., ул. Интернациональная, 101
E-mail: aiz@mgau.ru

Основная задача современного садоводства – повышение урожайности и степени интенсивности промышленных садов. Под степенью интенсивности сада сегодня понимают число деревьев на единицу площади. Однако до сих пор не определен инструментарий, позволяющий количественно оценивать показатели интенсивности промышленных садов различного типа. Для решения этой задачи предлагается использовать математические зависимости, аппроксимированные сигмовидными логистическими функциями. По результатам математического моделирования с их использованием при анализе урожайности и продуктивности промышленных яблоневых садов в средней полосе России определено, что с увеличением плотности посадки с 1481 дер./га (4,5 × 1,5 м) до 9524 дер./га (1,5 × 0,7 м) предельная урожайность и показатели интенсивности возрастают практически в 2 раза при одновременном снижении времени вхождения в режим максимальной урожайности. При этом на режимах максимального роста и угасания промышленных яблоневых садов происходит изменение урожайности с 25,45 т/га (схема посадки 4,5 × 1,5 м) до 44,56 т/га (схема посадки 1,5 × 0,7 м) при максимумах соответственно 35,25 т/га и 70,00 т/га. Полученные с использованием сигмовидных логистических функций значения урожайности и коэффициенты, определяющие степень интенсивности и продуктивности промышленных садов, можно применять при проектировании новых и прогнозировании динамики развития уже существующих промышленных садов. Установлена количественная зависимость между интенсивностью промышленных садов и продуктивностью деревьев.

MATHEMATICAL MODELLING OF PRODUCTIVITY AND DEVELOPMENT DYNAMICS OF INDUSTRIAL GARDENS OF INTENSIVE AND SUPER-INTENSIVE TYPE

Zavrzhnov A.A.¹, Zavrzhnov A.I.², Mishin B.S.²

¹Michurin Federal Scientific Center,
393774, Tambovskaya obl., Michurinsk, ul. Michurina, 30
E-mail: noc-inteh@yandex

²Michurinsk State Agrarian University
393760, Tambovskaya obl., Michurinsk, ul. Internatsional'naya, 101
E-mail: aiz@mgau.ru

The main task of modern horticulture is to increase the yield and intensity of industrial gardens. The degree of intensity of the garden today is understood as the number of trees per unit area. However, the suite of tools for quantifying the intensity indicators of industrial gardens of various types has not yet been determined. To solve this problem, it is proposed to use mathematical dependences approximated by sigmoid logistic functions. They were used for mathematical modelling in the analysis of the yield and productivity of industrial apple orchards in central Russia. As a result, it was found that with an increase in planting density from 1481 trees/ha (4.5 × 1.5 m) to 9524 trees/ha (1.5 × 0.7 m), the maximum yield and intensity indicators increase almost 2 times while reducing the time to enter the maximum yield mode. At the same time, in the modes of maximum growth and extinction of industrial apple orchards, an increase in yield occurs from 25.45 t/ha with a maximum value of this indicator of 35.25 t/ha to 44.56 t/ha with a maximum of 70.00 t/ha. The yield values and coefficients that determine the degree of intensity and productivity obtained using sigmoid logistic functions can be used when designing new gardens and predicting the development dynamics of existing industrial gardens. The quantitative relationship between the intensity and productivity of industrial gardens is determined by the values of the absolute exponents of the degrees of the equations of their logistic trends. It is equal to $0.32 + 0.68 = 1$.

Ключевые слова: интенсивный и суперинтенсивный промышленный сад, урожайность, степень интенсивности, математическая модель, сигмовидные логистические функции

Key words: intensive and super-intensive industrial garden; yield; intensity degree; mathematical model; sigmoid logistic functions

На сегодняшний день одно из основных направлений развития промышленного садоводства в мире – закладка и эксплуатация садов интенсивного и суперинтенсивного типа. В современном понимании степень интенсивности сада определяет количество деревьев на единицу площади. Так, по классификации «Правил предоставления и распределения субсидий на поддержку отдельных подотраслей растениеводства», утвержденных постановлением Правительства Российской Федерации №1295 от 12.12.2012, к интенсивному типу промышленных садов относятся насаждения с плотностью посадки более 800 деревьев на 1 га, к суперинтенсивному – более 2500 деревьев на 1 га. Ос-

новная цель уплотнения посадки плодовых насаждений – увеличение их урожайности и ускорение начала товарного (коммерческого) плодоношения [1, 2, 3].

В связи с этим, возникает необходимость достоверной оценки урожайности и динамики развития интенсивных и суперинтенсивных садов на протяжении их жизненного цикла.

Цель исследования – обоснование и разработка математической модели динамики развития промышленных садов различного типа для достоверной оценки урожайности на протяжении их жизненного цикла.

Методика. Обоснование математической модели проводили на примере оценки урожайности промышлен-

Табл. 1. Матрица урожайности промышленных яблоневых садов интенсивного и суперинтенсивного типа, т/га*

Год	Тип яблоневого промышленного сада			
	интенсивный		суперинтенсивный	
	плотность, дер./га (схема посадки, м)			
	1481 (4,5×1,5)	2500 (4,0×1,0)	3333 (3,0×1,0)	9524 (1,5×0,7)
подвои				
	54-118, 62-396	62-396, P60	ПБ (B9), M9	ПБ (B9), M9
1	0	1,1	3,3	5
2	0,8	5,5	10	15
3	3,3	10,2	15	25
4	5,1	15	25	40
5	10,1	19,2	30	50
6	14,6	25,1	40	60
7	20,8	35,7	50	70
8	24,2	39,2	55	70
9	29,8	45,2	55	70
10	33	45,6	55	70
11	35,1	44,2	54	68
12	35,7	45	53	68
13	35,2	45,9	54	65
14	35,8	45,4	50	45
15	35	42	43	30
16	34,5	40	39,5	20
17	34,2	34,9	25	15
18	29,4	25,3	19,7	5
19	25	20,8	10,3	0
20	20	15,3	5	0
21	15,5	9,9	0	0
22	15,2	4,8	0	0
23	9,8	0	0	0
24	9,5	0	0	0
25	5,2	0	0	0

*в составлении матрицы урожайности принимали участие Ю.В. Трунов и А.В. Савельев

ленных яблоневых садов интенсивного и суперинтенсивного типа с различной плотностью посадки для средней полосы России. Оценку и прогноз урожайности осуществляли на основании анализа статистических данных [4, 5, 6]. Основными ограничениями и допущениями были отсутствие периодичности урожайности и однотипные технологии возделывания для всех насаждений.

Аппроксимация графиков урожайности, построенных по результатам ее прогноза (табл. 1), полиномами 3 степени (с использованием пакетов программ EXCEL, MATLAB и MATHCAD) позволила получить регрессионные модели (табл. 2) урожайности промышленных яблоневых садов интенсивного и суперинтенсивного типа.

Адекватность регрессионных моделей оценивали с использованием коэффициентов детерминации R^2 , значения которых для рассматриваемых типов садов были равны 0,99 (см. табл. 2), что определяет практически функциональную связь между переменными регрессионных моделей.

Визуальная оценка аппроксимированных функций и их высокая адекватность позволяют отнести эти ре-

Табл. 2. Регрессионные модели урожайности промышленных яблоневых садов интенсивного и суперинтенсивного типа для средней полосы России

обозначение	Тип сада		Регрессионная модель	Оценка адекватности модели
	плотность, дер./га (схема, м)			
①	1481 (4,5×1,5)		$y = -0,06 x^3 + 1,22 x^2 - 2,91 x + 1,76$	$R^2 = 0,99$
②	2500 (4,0×1,0)		$y = -0,08 x^3 + 1,33 x^2 - 0,84 x + 1,61$	$R^2 = 0,99$
③	3333 (3,0×1,0)		$y = -0,15 x^3 + 2,13 x^2 - 1,03 x + 3,24$	$R^2 = 0,99$
④	9524 (1,5 ×0,7)		$y = -0,23 x^3 + 2,67 x^2 - 1,79 x + 4,13$	$R^2 = 0,99$

грессионные модели к семейству, так называемых, сигмовидных функций – математических функций, применяемых для исследования динамически развивающихся сложных систем и процессов на протяжении их жизненного цикла.

Жизненный цикл промышленного сада (как и всех динамически развивающихся сложных систем и процессов) можно условно разделить на три стадии: роста (развития); стабильности; снижения (угасания). Причем кривые, отражающие стадии роста (развития) и снижения (угасания) имеют S-образную форму, что позволяет отнести их к так называемым логистическим функциям, которые определяют законы развития сложных систем (процессов) и служат частным случаем сигмовидных функций.

Большой вклад в исследование законов такого рода внес Пьер-Франсуа Ферхюльст [7]. В отличие от подхода П.Г. Шитта, который разделял весь жизненный цикл плодового дерева на девять возрастных периодов, отличающихся соотношением роста вегетативных частей, плодоношения и усыхания [7], в основу модели жизненного цикла промышленного сада, согласно логистическому подходу Ферхюльста, положена урожайность, а весь жизненный цикл разделен на 7 периодов (рис. 1). При этом стадии роста и угасания в жизненных циклах сложных систем и процессов можно условно разделить на следующие периоды:

- 1 и 7 – периоды медленного роста или угасания, в основном имеющие экспоненциальный характер;
- 2 и 6 – периоды интенсивного роста или угасания,



Рис. 1. Теоретические графики сигмовидной функции и ее производной на участках роста и угасания промышленного сада: $f(x)$ и $f'(x)$ – сигмовидные функции и их производные, K_1 и K_2 – максимальные абсолютные значения угловых коэффициентов наклона сигмовидных функций $f(x)$, U – урожайность в течении 7 периодов жизненного цикла сада, L – максимальная урожайность для определенного типа сада.

отражающие их кривые имеют почти линейный характер;

3 и 5 – периоды замедляющегося роста или начала угасания, отображаются кривым, имеющими гиперболический характер и стремящимися на стадии роста к определенному уровню насыщения (сатурации) L , который определяет максимально возможную урожайность для конкретного типа сада, а на стадии угасания – к нулевое ее величине.

Оценить динамику развития промышленных садов и степень их интенсивности можно путем сравнения величин углового коэффициента K (определяющего крутизну наклона функции $f(x)$ на участке основного роста) и насыщения L (предельная максимальная урожайность для определенного типа сада). Для промышленных садов с различными схемами и плотностью посадки более высокие значения K и L характеризуют ускоренное вхождение в период коммерческого плодоношения и повышенную урожайность.

Математические выражения S-образных участков логистических функций и их производных будут иметь следующий вид (<https://neurohive.io/ru/osnovy-data-science/activation-functions/>): для стадии роста

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-b(x-c)}}, \quad f'(x) = \frac{Lbe^{b(x-c)}}{(1 + e^{b(x-c)})^2} \quad (1)$$

для стадии угасания

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{b(x-c)}}, \quad f'(x) = \frac{Lbe^{-b(x-c)}}{(1 + e^{-b(x-c)})^2} \quad (2)$$

где L – предел, к которому стремятся функции; b – коэффициент крутизны кривых; c – коэффициент, от которого зависит плавность кривых в начале и конце.

Например, для стадии роста (1) промышленного сада: L – предельно максимальная урожайность для определенного типа сада; b – скорость (быстрота, резкость) перехода от режима медленного роста (развития) к режиму стабильного развития и выхода на максимальную урожайность; c – продолжительность вхождения в режим максимальной урожайности (чем выше величина этого коэффициента, тем дольше сад находится в режиме перехода на максимальную урожайность).

Результаты и обсуждение. Статистическая обработка данных матрицы урожайности (см. табл. 1) и их аппроксимация формулами 1 и 2 позволили определить численные значения коэффициентов этих формул (табл. 3), а затем построить математические модели урожайности и динамики развития яблоневых промышленных садов различного типа. Значения коэффициентов детерминации (R^2) для всех формул находились на уровне 0,98...0,99, что указывает на высокую адекватность математических моделей.

Анализ графиков указанных функций $f(x)$ и их производных $f'(x)$ свидетельствует, что на режимах максимального роста и угасания (наибольшие абсолютные значения коэффициента K) урожайность U увеличивается с 25,45 т/га при максимальной урожайности L 35,25 т/га до 44,56 т/га при максимальной урожайности L 70,00 т/га (рис. 2).

Абсолютные значения производных функций равны

Табл. 3. Математические модели урожайности и динамики развития промышленных яблоневых садов интенсивного и суперинтенсивного типа для средней полосы России

Стадия роста	Стадия угасания
Интенсивный сад на подвоях 54-118, 62-396; 1481 дер./га (4,5 × 1,5 м)	
$f(x) = \frac{35.25}{1 + e^{-0.75(x-7)}}$	$f(x) = \frac{35.25}{1 + e^{0.5(x-22)}}$
$f'(x) = \frac{26.625e^{-0.75x+5.25}}{(1 + e^{-0.75x+5.25})^2}$	$f'(x) = \frac{18.25e^{0.5x-11}}{(1 + e^{0.5x-11})^2}$
Интенсивный сад на подвоях 62-396, P60; 2500 дер./га (4 × 1 м)	
$f(x) = \frac{45}{1 + e^{-0.75(x-5.25)}}$	$f(x) = \frac{45}{1 + e^{0.55(x-19)}}$
$f'(x) = \frac{34.125e^{-0.75x+4.3125}}{(1 + e^{-0.75x+4.3125})^2}$	$f'(x) = \frac{25.25e^{0.5x-9.5}}{(1 + e^{0.5x-9.5})^2}$
Суперинтенсивный сад на подвоях ПБ (В9), М9; 3333 дер./га (3 × 1 м)	
$f(x) = \frac{55}{1 + e^{-0.75(x-5)}}$	$f(x) = \frac{55}{1 + e^{(x-18)}}$
$f'(x) = \frac{41,25e^{-0.75x+3,75}}{(1 + e^{-0.75x+3,75})^2}$	$f'(x) = \frac{54e^{x-18}}{(1 + e^{x-18})^2}$
Суперинтенсивный сад на подвоях ПБ (В9), М9; 9524 дер./га (1,5 × 0,7 м)	
$f(x) = \frac{70}{1 + e^{-0.75(x-4,25)}}$	$f(x) = \frac{70}{1 + e^{(x-16)}}$
$f'(x) = \frac{52,5e^{-0.75x+3,1875}}{(1 + e^{-0.75x+3,1875})^2}$	$f'(x) = \frac{70e^{x-16}}{(1 + e^{x-16})^2}$

угловым коэффициентам K , которые, в свою очередь, определяют степень интенсивности промышленных садов, а также характеризуют скорость их вхождения в период коммерческого плодоношения и уровень урожайности. Результаты анализа формул (см. табл. 3) и графиков (см. рис. 2) свидетельствуют, что для промышленных яблоневых садов с увеличением плотности их посадки с 1481 дер./га (4,5 × 1,5 м) до 9524 дер./га (1,5 × 0,7 м) величины L (предельная урожайность) и K (угловой коэффициент интенсивности) возрастают практически в 2 раза (табл. 4) при одновременном снижении времени вхождения в режим максимальной урожайности (коэффициент c).

Известно, что увеличение степени интенсивности промышленных садов путем уплотнения посадки плодовых деревьев сопровождается снижением их продуктивности [8]. Однако количественно эта зависимость до сих пор не подтверждена.

Для решения этой задачи разработан подход, предусматривающий представление суммарной урожайности (общий сбор за период коммерческого плодоношения – более 10 т/га) и средней продуктивности плодовых деревьев за коммерческий период в относительных единицах. При этом относительная суммарная урожайность S_y определяется из выражения:

Табл. 4. Количественные показатели урожайности и степени интенсивности промышленных яблоневых садов интенсивного и суперинтенсивного типа

Тип сада	Стадия роста					Стадия угасания			
	L	b	c	K	У	b	c	K	У
①	35,25	0,75	7,00	6,65	25,45	0,5	22	-4,46	22,71
②	45,00	0,75	5,25	8,53	33,01	0,5	19	-6,18	33,43
③	55,00	0,75	5,00	10,31	37,66	1	18	-12,47	47,56
④	70,00	0,75	4,25	13,12	44,56	1	16	-16,17	51,17

$$S_y = \frac{Y_i}{Y_{\max}}, \quad (3)$$

где Y_{\max} – наивысшая суммарная урожайность сада определенного типа (для нашего случая – это промышленный сад с плотностью посадки 9524 дер./га – Y_{9524}), т/га; Y_i – урожайность сада анализируемого типа, т/га.

Относительная средняя продуктивность S_{II} рассчитывается по формуле:

$$S_{II} = \frac{P_i}{P_{\max}}, \quad (4)$$

где P_{\max} – наивысшая средняя продуктивность определенного типа сада (для нашего случая – это промышленный сад с плотностью посадки 1481 дер./га – P_{1481}), кг/дер.; P_i – средняя продуктивность сада анализируемого типа, кг/дер.

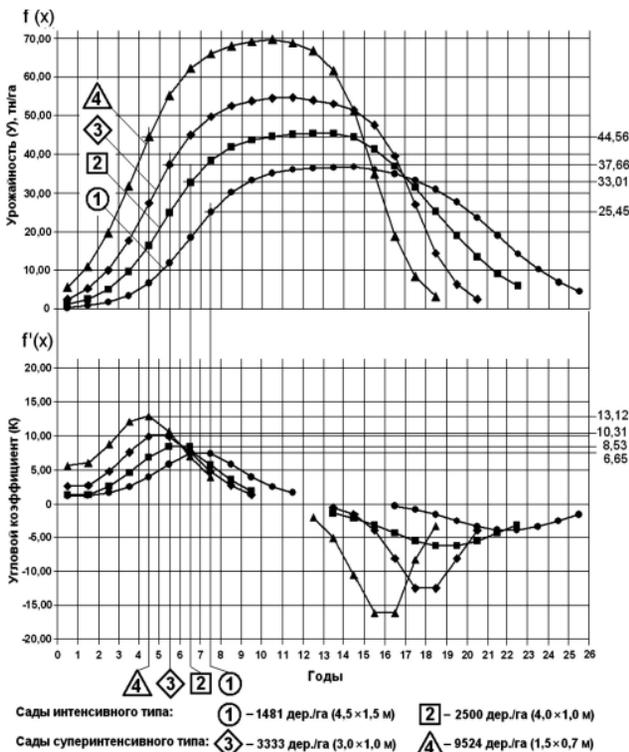


Рис. 2. Графики функций и их производных, характеризующих урожайность и степень интенсивности промышленных яблоневых садов.

Табл. 5. Матрица относительной суммарной урожайности и относительной средней продуктивности промышленных яблоневых садов различного типа в период коммерческого плодоношения

Тип сада	Средняя суммарная урожайность (Y_i) в период коммерческого плодоношения, т/га	Относительная суммарная урожайность (S_y)	Средняя продуктивность (P_i) в период коммерческого плодоношения, кг/дер.	Относительная продуктивность (S_{II})
①	26,8	0,55	18,1	1,00
②	33,0	0,68	13,2	0,73
③	38,0	0,78	11,4	0,63
④	48,8	1,00	5,1	0,28

Анализ абсолютных значений средней суммарной урожайности Y_i и средней продуктивности P_i , рассчитанных на основе матрицы урожайности (см. табл. 1), а также относительной суммарной урожайности S_y и относительной средней продуктивности S_{II} , установленных по формулам (3) и (4), подтверждает, что повышение урожайности промышленных садов путем увеличения плотности посадки сопровождается снижением продуктивности плодовых деревьев (табл. 5).

Построенные на основании проведенных расчетов логистические тренды (рис. 3) характеризуются следующими степенными зависимостями:

относительная суммарная урожайность

$$Y = 0,0564 X^{0,32} (R^2 = 0,97), \quad (5)$$

относительная средняя продуктивность

$$Y = 155,36 X^{-0,68} (R^2 = 0,99) \quad (6)$$

где X – плотность посадки, дер./га.

Причем эта связь весьма тесная, так как сумма абсолютных значений показателей степеней (0,32 и 0,68) в зависимостях (5) и (6) равна 1.

Таким образом, результате проведенного исследования получены математические модели, адекватно описывающие урожайность, динамику развития и сте-

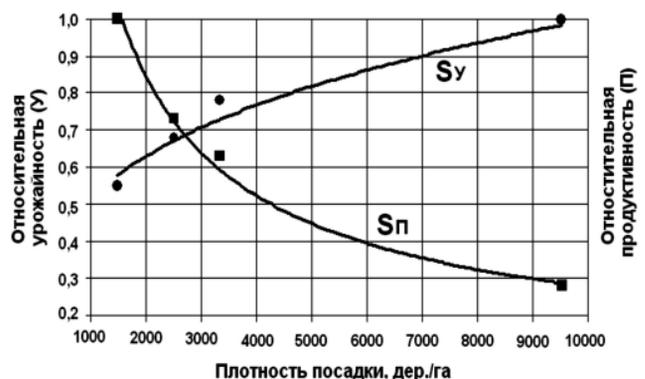


Рис. 3. Логистические тренды относительной суммарной урожайности (S_y) и относительной средней продуктивности (S_{II}) в зависимости от плотности посадки.

пень интенсивности промышленных яблоневых садов различного типа на протяжении их жизненного цикла для средней полосы России.

Математические модели представлены сигмовидными логистическими функциями, которые определяют стадии логистического роста и снижения урожайности в процессе развития («взрождения») сада

Полученные зависимости позволяют количественно оценивать степень интенсивности промышленных садов с различной плотностью посадки с последующим использованием расчетных значений при проектировании промышленных садов и прогнозировании динамики развития уже существующих.

Литература

1. Трунов Ю.В., Завражнов А.А., Еремеев Д.Н. Повышение эффективности российского садоводства на основе использования интенсивных типов садов и машинных технологий их возделывания // *Достижения науки и техники АПК*, 2013. №4. С. 41-43.
2. *Плодоводство: учебное пособие* / Ю.В. Трунов, Е.Г. Самощенко, Т.Н. Дорошенко и др. Мичуринск: ООО «Квадро», 2019. 416 с.
3. Куликов И.М., Минаков И.А. Развитие садоводства в России: тенденции, проблемы, перспективы // *Аграрная наука Евро-Северо-Восток*. 2017. №1(56). С. 9–15.
4. Минаков И.А., Куликов И.М. Проблемы и перспективы развития садоводства России // *Садоводство и виноградарство*. 2018. №6. С. 40–46.
5. Завражнов А.А., Завражнов А.И., Ланцев В.Ю. Передовые производственные технологии в решении проблем механизации трудоемких процессов в промышленном садоводстве // *Достижения науки и техники АПК*. 2017. Т. 31. №8. С. 58–62.
6. Трунов Ю.В. Проблемы развития садоводства России как управляемой развивающейся системы // *Плодоводство и ягодоводство России*. 2015. № 42. С. 297–299.
7. Вайсштейн Э. В. Логистическое уравнение. URL: <https://mathworld.wolfram.com/LogisticEquation.html> (дата обращения)
8. Babushkin V.A., Zavrzhnov A.I., Zavrzhnov A.A. Technology and machinery for intensive Russia horticulture // *Ecology, Environment and Conservation*. 2015. Vol. 21. Suppl. Issue August. P. 11–12.

Поступила в редакцию 06.07.2021

После доработки 18.08.2021

Принята к публикации 24.09.2021