

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОБРАЗОВ

УДК 004.932.2

РАСПОЗНАВАНИЕ ПРОЕКТИВНО ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ПЛОСКИХ ФИГУР. XII. О НОВЫХ МЕТОДАХ ПРОЕКТИВНО ИНВАРИАНТНОГО ОПИСАНИЯ ОВАЛОВ В КОМПОЗИЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ПЛОСКОСТИ

© 2019 г. П. П. Николаев*

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им А. А. Харкевича РАН
127051 Москва, Б. Каретный пер., 19, стр. 1, Россия*

*E-mail: nikol@iitp.ru

Поступила в редакцию 10.09.2018 г.

Для сцен, где входным объектом является композиция овала общего вида в сочетании с линейным элементом (ЛЭ, — точкой P либо прямой L) инцидентной ему плоскости в произвольном их взаимном расположении (внешний, внутренний ЛЭ либо принадлежащий контуру овала) на материале модельных численных реализаций рассмотрены процедурные подходы в задаче проективно инвариантного описания подобной композиции. Предложенные алгоритмы обработки используют полученные ранее теоретические утверждения (теоремы), для овала с выделенной внутренней точкой $\text{int}P$ гарантирующие наличие триады внешних проективно инвариантных эллиптических точек (ЭТ) E_1, E_2, E_3 , а для овала в сочетании с прямой $\text{ext}L$ (внешнего положения) — наличие двух пар инвариантных точек, порождающих пару стабильных внутренних точек C_1, C_2 . Показано, как из произвольно организованных композиций “овал + ЛЭ” можно сформировать композицию вида “овал + $\text{int}P$ + $\text{ext}L$ + T -polar”, пригодную для вычисления ее проективно инвариантного отображения, не опирающегося исключительно на *фиксированный набор* инвариантных точек контура, а представляющих *интегральное описание* исходной композиции (в виде вурф-отображения). Этот единый алгоритмический подход реализуем в итоге привлечения разработанных критериев детерминированного выбора *пары* ЭТ для задания $\text{ext}L$ и *единственной* $\text{int}P$ из пары C_1, C_2 — для задания внешней инвариантной кривой T -polar.

Ключевые слова: линейный элемент плоскости, эллиптические точки, вурф, проективно инвариантное отображение, критерии выбора базисных точек

DOI: 10.1134/S0235009219010104

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Данная работа, продолжая тему исследований проективно инвариантных свойств фигур семейства овалов, возвращает внимание читателей (теперь уже с учетом данных теоретического плана, полученных нами в последние годы) к идее построения системы *универсальных* процедур обработки плоских геометрических объектов, представляющих собой композицию овальной кривой с линейным элементом (ЛЭ) общей им плоскости, — с точкой P либо прямой L , причем в любом их взаимном расположении и комплектации. Для данной жесткой конфигурации не оговаривается ограничений, предписывающих P или же L находиться в поле овала, на его границе либо снаружи фигуры. В зависимости от того, какова исходная композиция вида “Овал + ЛЭ”, предлагается применить ту или иную процедуру *предварительной* цифровой обработки (в соответствии с задан-

ным видом входной сцены), трансформирующую объект в комплекс “Овал + $\text{int}P$ + $\text{ext}L$ + T -поляра”, объявляемый *стандартным*, для проективно инвариантного описания которого требуется задействовать *финальную* численную схему обработки, при том, что формируемый с ее помощью выходной продукт представляет собой плоскую кривую *вурф-отображения* сцены “Овал + ЛЭ”. Поясним, что рассматриваемые далее методы предлагаемой нами стандартизации сцены (как схемы ее предобработки) подразумевают, что по отношению к полю овала ЛЭ могут быть внутреннего (“ int ”) или же внешнего (“ ext ”) расположения, но итогом предобработки должна оказаться сцена с однозначно задаваемыми *внутренней* P (будем именовать ее *тестовым полюсом*; именно наличие $\text{int}P$ и позволяет вычислить кривую T -поляры, привлекаемую для получения вурф-отображения) и внешней прямой L , поскольку

для каждого из этих ЛЭ ($\text{int}P$ и $\text{ext}L$) доказаны теоремы о связанных с ними инвариантных точках плоскости композиции. Оба эти положения природы *необходимых*, т.е. заявляют обязательность наличия неких проективно инвариантных свойств (теоремы существования), присущих композиции “овал + $\text{int}P$ ” (теорема 1; Савчик, Николаев, 2016) либо сценам вида “овал + $\text{ext}L$ ” (теорема 2; Балицкий и др., 2017), но не ограничивают их “комплектации” (количества предельно допустимых проявлений этих свойств, поскольку, не имея характера *достаточных*, не принадлежат к теоремам *единственности*).

В Теореме 1 говорится о том, что овал общего вида с заданным в его поле тестовым полюсом P (в произвольной “ int ” позиции, не принадлежащей границе контура) порождает вовне его (в местах взаимопересечения криволинейных H -поляры и T -поляры; эти инструменты проективно инвариантного анализа гладких выпуклых кривых введены в работе (Николаев, 2011 а)) не менее *трех* стабильных точек, названных *эллиптическими* (ЭТ). Каждая ЭТ E детерминирует на контуре фигуры квартет инвариантных позиций, а сам набор $E_1, E_2, E_3, \dots$ обладает свойством *квазиколлинеарности* (т.е. имеет диспозицию приблизительно прямолинейную; и эта “качественная особенность”, формулируемая на основании проведенных нами многочисленных модельных экспериментов, не снабжает структурными оценками *отклонений* от прямолинейности). Описаны конкретные случаи, когда овал, обладая свойством скрытой *осевой симметрии* и имея позицию тестового полюса P , принадлежащую *оси*, мог образовывать сету ЭТ в три, пять или семь точек, при том, что это была либо *точно коллинеарная* триада, либо структура в виде проективного пучка двух или трех прямолинейных носителей (по триаде ЭТ на каждом) с общим центром пучка в точке E , являющейся *плюккеровым* полюсом для *поляры* (Акимова и др., 2014), тождественной неявной оси симметрии овала (Николаев, 2011 б; 2012). Поскольку целью докладываемой работы в ситуации с наличием $\text{int}P$ является попытка однозначно и проективно инвариантно связать фиксированную позицию $\text{int}P$ с ее детерминируемым положением $\text{ext}L$, то для решения этой задачи окажутся непригодными, как приемы некой “линеаризации” совокупного сета ЭТ (например, методом наименьших квадратов), так и признаки “некоторой уникальной пары E_k, E_m ”, оцениваемые по “оптимальной их диспозиции” и привлекаемой в качестве задающей прямую $\text{ext}L$ (типа “крайние в ряду”, “наиближайшие к овалу” и тому подобные критерии выбора пары), по причине их *проективной неинвариантности*. Таким образом, новым приемом этапа предварительной обработки должен стать подход к выбору пары ЭТ, приводящий для любых ракурсов регистрации

сцены “овал + $\text{int}P$ ” к *идентичному* результату, что предопределяет опору на фундаментальный проективный инвариант — *вурф* (гораздо чаще его именуют “сложным отношением координат коллинеарного квартета точек”), с весьма обширным списком возможностей привлечения свойств экстремумов *вурф-функций*, формируемых при его посредстве (Глаголев, 1963). Необходимый критерий задания $\text{ext}L$ — через экстремальные характеристики вурф-функций, включающих аргументом полный сет ЭТ (как проективно замкнутую ломаную, соединяющую цепочку соседних ЭТ), — будет рассмотрен нами в следующем разделе, а в этом перейдем к описанию *дуального* метода опоры на теорему 2, когда в сцене вида “овал + $\text{ext}L$ ” требуется проективно однозначно оценить позицию $\text{int}P$.

Теорема 2 декларирует наличие у композиции “овал + $\text{ext}L$ ” минимального набора проективно стабильных точек, инцидентных прямой L (их должно быть не менее четырех) и контуру самого овала (на овальной кривой удастся детектировать как минимум октет таковых). При воссоздании этой конструкции, в минимальном виде включающем на L и на контуре дюжину опорных позиций (а сама эта конфигурация из 12 точек и соединяющих их прямых воспроизводит на языке плюккеровых *полюсов* и *поляр* удвоенную диспозицию известной для коник теоремы *взаимности* (Моденов, 1969; Акимова и др., 2014)), на пересечении дуальных поляр во внутреннем поле овала появляются инвариантные точки C , классифицируемые как сет $\{\text{int}P\}$. И, поскольку заранее не известно, сколько таких $\{C\}$ детерминирует входная композиция “овал + $\text{ext}L$ ”, но описана численная схема быстрого поиска *всех* полюсов C , то для решения этой альтернативной частной задачи требуется сформулировать критерий проективно инвариантного вычисления уникальной позиции $\text{int}P$, не зависящей от количества членов в сете $\{C\}$, т.е. разработать алгоритм подобной позиционной оценки $\text{int}P$, детерминируемой сетом $\{C\}$ и относительным расположением $\text{ext}L$. Такая численная схема была разработана (она названа “итерационным фрактальным методом”) и успешно испытана нами в тестовых модельных экспериментах, о чем будет сообщено далее в соответствующем разделе (с иллюстрациями). Подчеркнем, что нам в модельных экспериментах с объектом “овал + $\text{ext}L$ ” пока не удалось построить примера, когда число полюсов $\{C\}$ больше двух, хотя при том же гарантированном ансамбле в 12 точек на контуре и на $\text{ext}L$ излучены условия, при которых пара внутренних полюсов C сближается до полного слияния (это происходит у овалов скрытой *радиальной* симметрии при сближении $\text{ext}L$ с *линией горизонта*), что снимает в данном случае проблему *выбора* $\text{int}P$ по $\{C\}$. Рассмотрим

кратко оставшиеся варианты организации входной сцены.

Допустим, что внешнее и внутреннее положения L и P взаимно заменены, и сцена обрела атрибуты $\text{int}L$ и $\text{ext}P$. Нетрудно понять, что и совместное их наличие, и вхождение порознь представляют собой один и тот же случай, поскольку $\text{int}L$ и $\text{ext}P$ однозначно (и проективно инвариантно) связаны отношениями плюккеровых *полюсы* и *полюса*: две “ext” касательные из полюса $\text{ext}P$ к овалу точками касания задают полюсу $\text{int}L$ (и наоборот, — по касательным в концевых точках хорды=полюсы корректно восстанавливается позиция P). Если сцена представляет собой композицию с одним ЛЭ (“овал + $\text{int}L$ ” или “овал + $\text{ext}P$ ”), то после оценки позиции “парного” атрибута доопределенный объект “овал + $\text{int}L$ + $\text{ext}P$ ” надо подвергнуть предобработке, описанной в работе (Николаев, Николаев, 2009): луч из $\text{ext}P$, сканируя хорду $\text{int}L$, фиксирует на ней экстремальную точку $\text{int}P$, удовлетворяющую условию *гармоничности* для коллинеарного квартета $\text{ext}P, A, \text{int}P, B$ (т.е. осуществляет поиск по критерию $W(\text{ext}P, A, \text{int}P, B) = 1$, где A и B — точки пересечения контура лучом).

Несколько более громоздкая (вычислительно) схема предобработки требуется для композиций вида “овал + точка контура” либо “овал + касательная к контуру” (это не альтернативные случаи; для стоящей задачи они эквивалентны, поскольку “касательную” и “точку касания” в вычислительном плане можно связать взаимно однозначно). Ее мы обсудим в разд. 3 статьи, а в завершающей части **Введения** коснемся *идеи* финального этапа обработки сцены, описав, каким образом для композиции “Овал + $\text{int}P$ + $\text{ext}L$ ” можно сформировать ее инвариантно характеризующее вурф-отображение. Рисунок 1 на модельном примере показывает всю цепочку трансформаций, происходящих при проективно стабильной репрезентации сцены. Для того, чтобы сформировать финальное 2D вурф-отображение, необходимо вычислить пару *независимых* вурф-функций (их вид приведен на врезке слева вверху), привлекая хорду, совершающую по ходу “дискретного вращения” вокруг P последовательный круговой обход вершин аппроксимации овальной кривой. При этом на прямой, пересекающей $\text{ext}L$ (на врезке справа внизу она помечена как LINE), вычисляются позиции $L(n)$ (где n — текущий номер вершины A либо B контура), что совместно с полюсом $\text{int}P$ и парой A, B пересечений с контуром образует коллинеарный квартет A, P, B, L , позволяющий для каждого текущего положения n хорды вычислить вурф-функцию $w(L(n)) = W(A(n), P(n), B(n), L(n))$. Получение проективно инвариантного отображения на плоскость вурфов требует оценки еще одной вурф-функции, независимой от $w(L)$. Такую дополнительную

оценку, привязанную к общему индексу n , обеспечивает вычисление T -полюсы (это кривая, задаваемая цепью пересечений касательных в A и B ; ее вычисление производится за любые пол-оборота хорды вокруг P (Николаев, 2011 б)). При замене в квартете позиции $L(n)$ на $T(n)$ появляется возможность вычисления второй вурф-функции $w(T(n)) = W(A(n), P(n), B(n), T(n))$, что и предопределяет на числовой плоскости ($w(T), w(L)$) вид искомого вурф-отображения $w(L)(w(T))$ (рис. 1). Перейдем к обсуждению задачи *однозначного* (проективно инвариантного) выбора позиции $\text{ext}L$ по координатным оценкам сета ЭТ $\{E\}$, детерминированного на T -полюсе фиксированным полюсом $\text{int}P$.

1. О КРИТЕРИЯХ ЗАДАНИЯ $\text{ext}L$ ПО ДАННЫМ ПОЛНОГО СЕТА ЭТ

Нетрудно заметить, что вурф-функции $w(T)$ и $w(L)$, вид которых приведен на врезке рис. 1, имеют синфазную особенность — совместно пересекать плато единичного уровня, принимая *гармонические* значения вурфа при общем индексе n . Такое поведение является прямым следствием отнюдь не случайного расположения $\text{ext}L$ относительно овала с его фиксированным $\text{int}P$: с методической целью избранная для показа связи между $w(T)$ и $w(L)$, прямая LINE *интерполирует* коллинеарную триаду ЭТ. В ситуациях, когда полный набор $\{E\}$ не достаточно точно интерполирует единой прямой (как это может произойти с *осесимметричным* овалом, особенность структуры $\{E\}$ которого обсуждалась выше), не все из $\{E\}$ будут принадлежать LINE при любых вариантах интерполяции, что усложняет задачу совместного анализа кривых $w(T)$ и $w(L)$, если критерий в выборе “наилучшего” интервала между соседними ЭТ (в качестве пары точек, детерминирующих расположение LINE) связать с поведением экстремумов на обеих. Можно ориентироваться на “динамику экстремумов” лишь одной $w(T)$ (эти особенности — амплитуды минимумов и максимумов — обладают проективной устойчивостью), однако нет гарантии, что для некоторой пары интервалов (между соседними ЭТ) карта экстремумов не окажется сходной (с точностью дискретной аппроксимации кривой $w(n)$). На вспомогательном рис. 2 показано, что фигура “ОВАЛ” при перепроецировании к виду “овал” сохраняет свои “коллинеарные” свойства триады ЭТ (при этом позиция тестового полюса P смещается в положение p , изменяется и форма T -полюсы), однако реальные *погрешности* свойства коллинеарности, по картине минимума $w_1 = w(T)$ на интервале E_1-E_2 не привносят “нюансов” (в сравнении с ходом к минимуму на интервале E_2-E_3 , что и отражает врезка рис. 2), позволяющих стабильно отдавать предпочтение одному из интервалов в роли “зада-

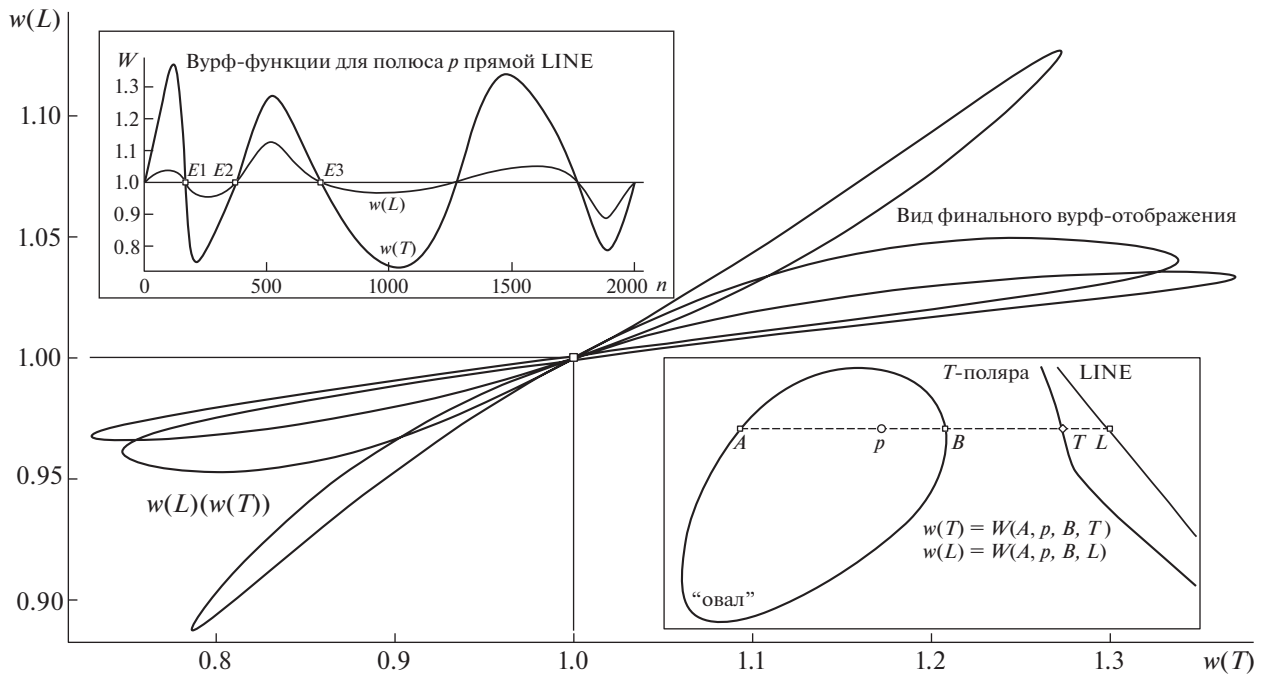


Рис. 1. Идея описания композиции “овал + intP”. Прямая extL (LINE), найденная по триаде ЭТ ($E1$, $E2$, $E3$), и T -полюса, вычисленная по intP (p на рис.), позволяют оценить функции $w(T)$ и $w(L)$ (схема — на врезке справа внизу, вид — слева сверху), привлекаемые для формирования W -отображения $w(L)(w(T))$. Остальные пояснения в тексте.

ющего extL”. Для увеличения надежности критерия выбора был избран подход совместного анализа функций $w(T)$ и $w(L)$ при отказе от процедуры интерполяции, что реализовалось трансформацией искомой LINE в ломаную, где все соседствующие ЭТ соединялись отрезками. Этот прием создавал возможность анализа кривых $w(T)$ и $w(L)$ с обязательно совпадающими границами между гармоническими значениями в ЭТ. Был забракован (как недостаточно надежный; рис. 3) критерий выбора “уникального интервала ЭТ” по максимальной амплитуде экстремума вурф-функции (“max” либо “min”). По итогам серии испытаний аттестован приемлемым метод привлечения вурф-оценки $\max(W(Ei, mL, mT, Ek))$, где в роли координат квартета вурфа фигурируют соответствующие значения n позиций окаймляющих гармонических Ei и Ek , а внутренняя пара метризует на этом интервале положения экстремумов $w(T)$ и $w(L)$. На врезке рис. 3 показано, как для сцены, изображенной на рис. 2, оценка интервала $E2$ - $E3$ (равная 11.5) уверенно доминирует среди показателей по другим интервалам, выражая особенность *согласованного* поведения экстремумов $w(T)$ и $w(L)$ на данном интервале. Для демонстрации симметрии кривых относительно *гармонического* значения в ЭТ на рис. 3 они изображены с единичным сдвигом по W . С целью придания большей убедительности в эффективности избранного критерия $\max(W)$ приведем в

заключительной части раздела модельный иллюстративный пример сцены, где полный сет $\{E\}$ образуют *пять* ЭТ (что в согласии с нашими ранними численными экспериментами реализуется на модели овала, обладающего *осевой* симметрией, при условии, что тестовый полюс P инцидентен образу оси). Сводный рис. 4 на фрагменте *a* (слева) изображает вид овала совместно с участком пересекающихся T -полюсы и H -полюсы, ЭТ которых образуют структуру коллинеарных троек $\{E1, E2, E5\}$ и $\{E1, E3, E4\}$ с их общей ЭТ $E1$ (в роли вершины пучка для прямых=носителей триад и по сути — плюккерова полюса симметрии PS для полюсы=оси). В этом случае опираться на свойства квази-коллинеарности сета $\{E\}$ уже не имеет смысла, и приходится оценить целесообразность анализа интервалов в парах ЭТ, не являющихся непосредственными *соседями* в цепи $\{E\}$. Тогда “необременительное” расширение поиска парных комбинаций ЭТ могло бы выявить “истинно коллинеарные” интервалы $E1$ - $E5$ и $E1$ - $E4$ (дав заодно и способ оценки положения оси симметрии согласно свойствам вурфов $W(PS, E2, c2, E5)$ и $W(PS, E3, c3, E4)$ быть *гармоническими*, что показано на врезке рис. 4, *a*), только и этот подход нельзя назвать продуктивным: малые изменения формы овала и незначительные сдвиги P с оси симметрии разрушают коллинеарную структуру пучка ЭТ, и мы получаем неколлинеарную цепочку пяти ЭТ, т.е. возвращаемся к “общему слу-

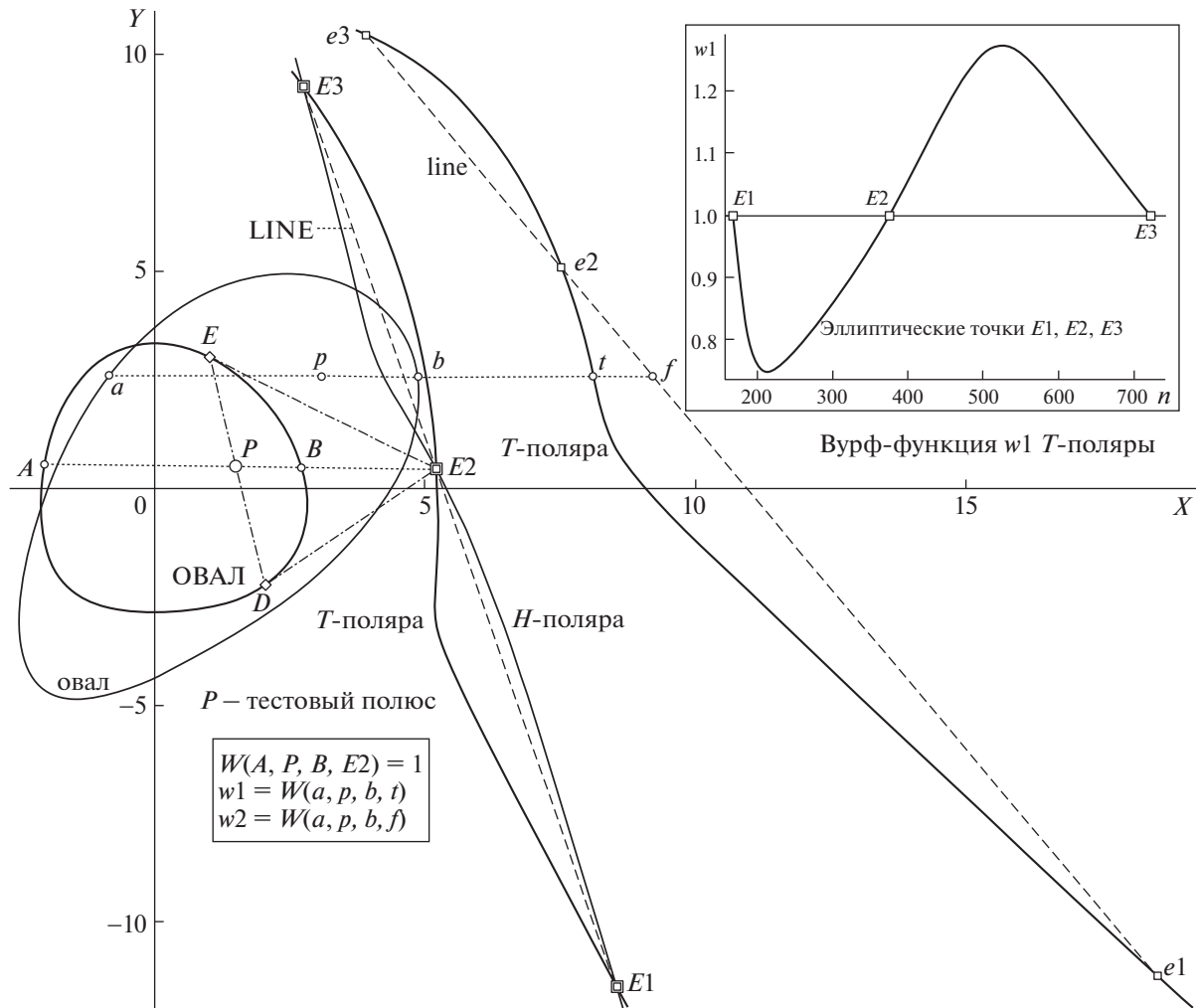


Рис. 2. Схема преобработки сцены “овал + intP” с инвариантными свойствами T-полюсы. Проекция фигуры “ОВАЛ” к виду “овал” переносит тестовый полюс P в позицию p, а ЭТ E1, E2, E3 — в e1, e2, e3, сохраняя свойства функций w1, w2. Остальные пояснения в тексте.

чаю”. Эти ясные доводы дают дополнительную аргументацию в пользу разбиения цепи ЭТ на последовательность отрезков, где любой интервал $F(n)$ содержит все необходимые данные для вычисления вурфа $W(Ei, mL, mT, Ek)$, позволяющего (для сравниваемых участков функций $w(T)$ и $w(F)$) по критерию *наилучшей согласованности функций* избрать отрезок, задающий положение extL. На врезке рис. 4, б приведены численные значения этих оценок (рейтинг интервалов {E3-E4, E1-E2, E5-E1, E2-E3, E4-E5} стал итогом упорядоченной цепи оценок {34, 18, 10, .55, .53}, дав лидерство интервалу E3-E4). Рис. 4, б демонстрирует вид вурф-функций, вычислявшихся в процедуре отбора, где помимо сравниваемых $wT(n)$ и “кусочной” $wF(n)$ (для большей ясности в отношении позиций ее экстремумов показана с удвоенной амплитудой, т.е. следует формуле $2wF(n) - 1$)

приводится финальный вид функции $wL(n)$, уже не проходящей через *все* гармонические узлы ЭТ (что свойственно поведению функции $wF(n)$). На рис. 4, в приведены кривые W-отображений $wL(n)(wT(n))$ и $wF(n)(wT(n))$ (вторая — лишь для сравнения, поскольку она не удовлетворяет установке — быть результатом привлечения “единой” extL — единственной “LINE”). Следствием того, что фрагментарная коллинеарность ЭТ была присуща избранной сцене, вычисленное W-отображение $wL(n)(wT(n))$ незначительно отличается от кривой *многократного покрытия* (что и произошло бы, имея пятерка ЭТ реально коллинеарную структуру). Этим выводом закончим обсуждение задачи локализации extL по фиксированному полюсу intP, переходя к рассмотрению вопросов выбора intP для композиции “овал + extL”.

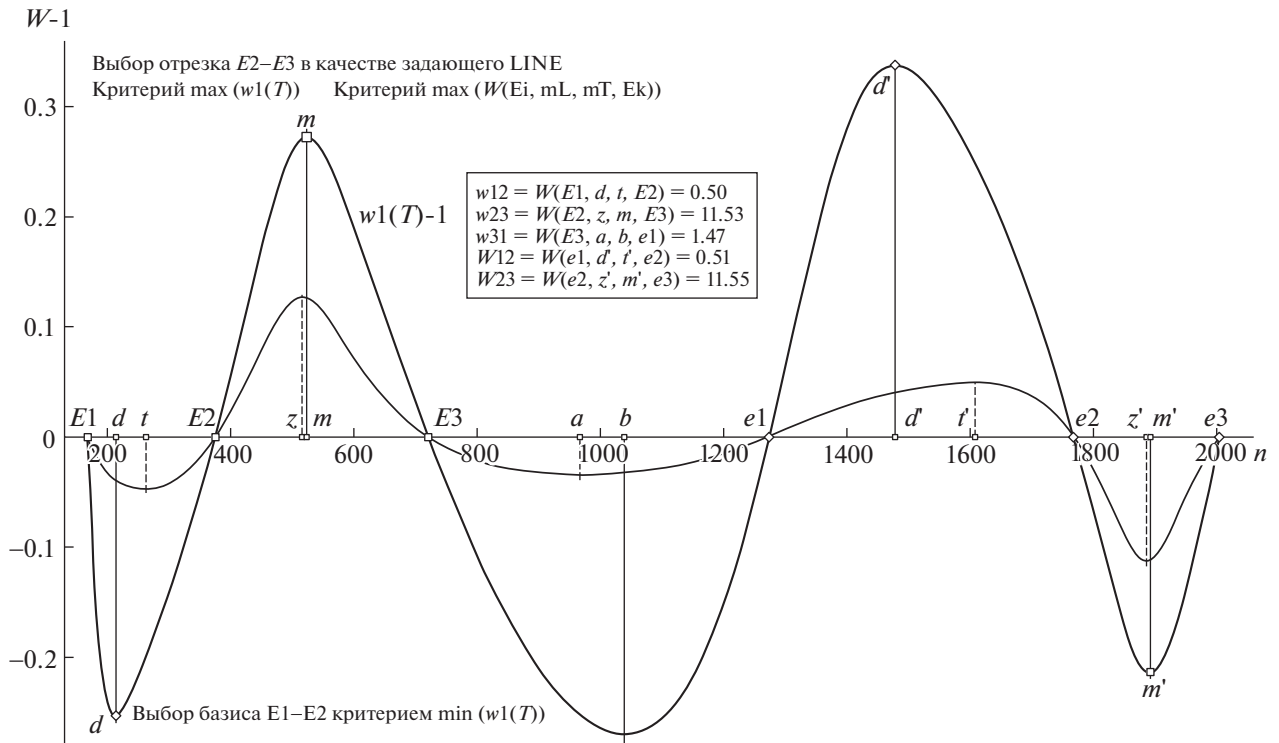


Рис. 3. Идея критериев локализации LINE в сцене “овал + intP” согласно схеме $\max(w1(T))$ и по оценке $\max(W(Ei, mL, mT, Ek))$, реализуемой вычислением вурфа от границ интервала ЭТ $Ei-Ek$ и позиций экстремумов mT у $w1(T)$ и mL у $w2(L)$. Остальные пояснения в тексте.

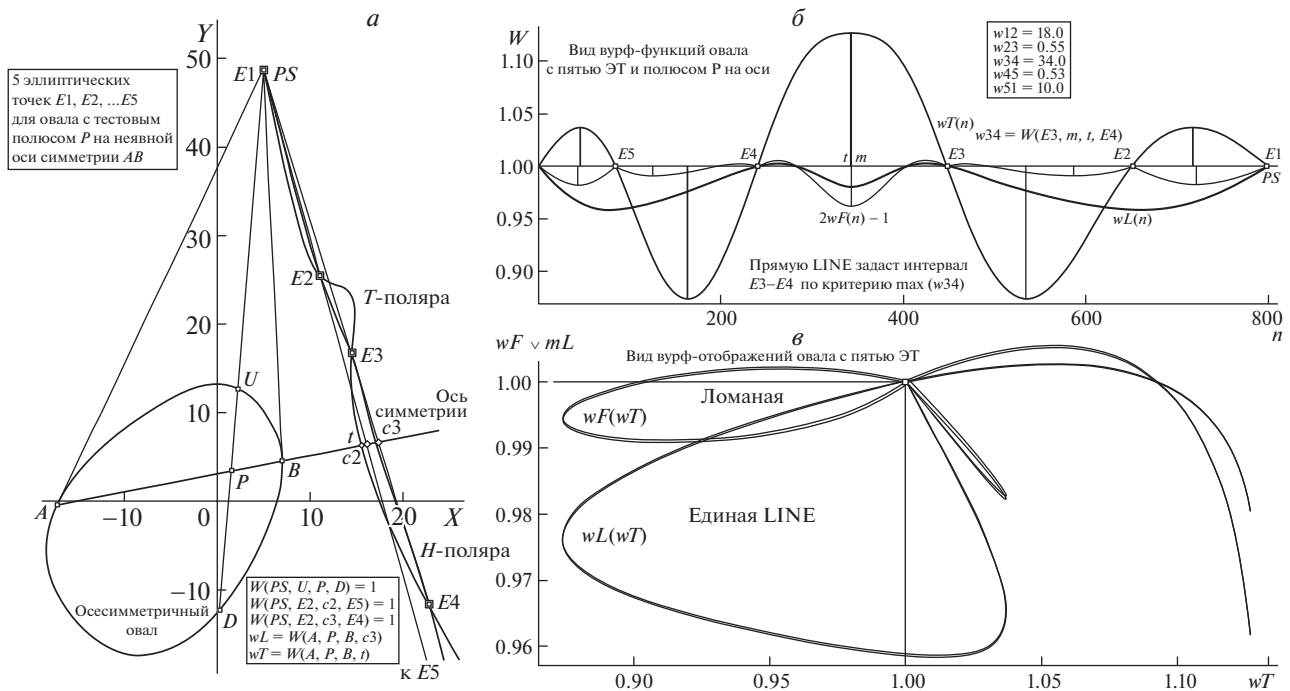


Рис. 4. Сводная карта обработки сцены с пятью ЭТ, детерминируемыми полюсом P на оси симметрии овала. Вид сцены с осью $A-B$ овала, полюсом симметрии PS и правилами (на врезке внизу) вычисления базисных вурфов (а), ход вурф-функций $wT(n)$, $wF(n)$ и $wL(n)$ с показом (на врезке сверху) рейтинга оценок по критерию $\max(W(Ei-Ek))$ (б) и финальный вид вурф-отображений $wL(wT)$ и $wF(wT)$ (в). Остальные пояснения в тексте.

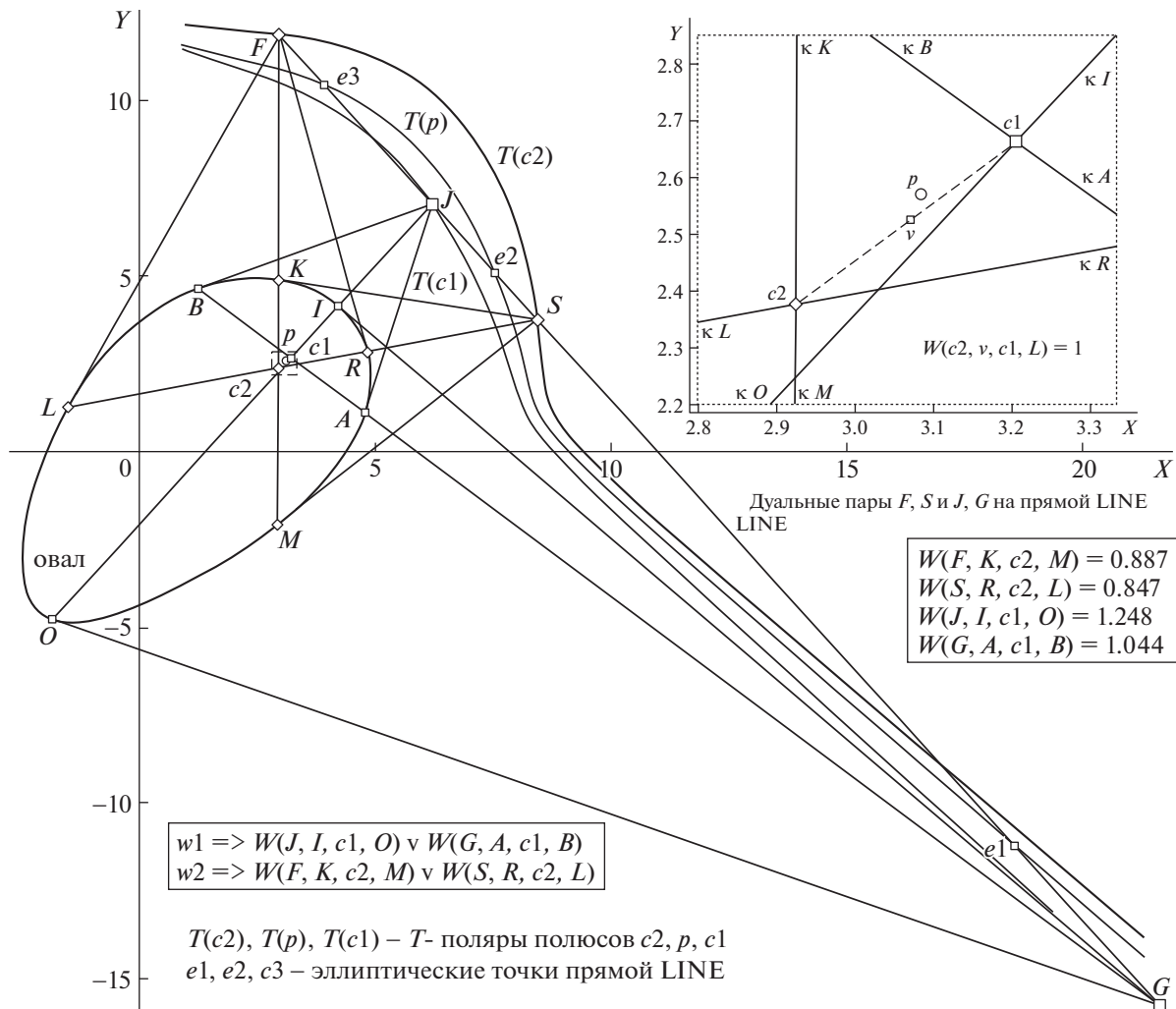


Рис. 5. Связь позиций инвариантных ЭТ $\{e1, e2, e3\}$ и квартета F, J, S, G на прямой LINE, фиксированной при “овале” с его int-полюсами $p, c1, c2$, опосредованная T -полями $T(p), T(c1)$ и $T(c2)$. На врезке сверху в 16-кратном увеличении показан locus сцены с полюсами, в рамках внизу – формулы и значения базисных вурфов. Остальные пояснения в тексте.

2. ДУАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА T -ПОЛЯРЫ И КРИТЕРИЙ ВЫБОРА intP

В **теореме 2** сформулирована оценка снизу для числа проективно инвариантных позиций на extL (не менее четырех), порождающих октет стабильных точек контура овала (Балицкий и др., 2017). Эти восемь точек не исчерпывают характерную структуру связей между внешней прямой и овалом: в “int” поле фигуры появляется пара инвариантных точек $c1, c2$ (рис. 5) – в местах пересечения дуальных пюккеро-поляр (связывающих каждую из пар позиций F, S и J, G на extL, обозначенной на рис. 5 как “LINE”). Дуальная пара F, S детерминирует на контуре квартет $\{L, R, K, M\}$ (с пересечением $c2$ в поле овала), паре J, G соответствует четверка $\{A, B, O, I\}$ (с полюсом связи $c1$). Можно доказать, что ни одна из позиций первого квартета не может совпасть с координатами

второго (на контуре они всегда *чередуются*), именно поэтому найденные вершины объединенного 8-точечника удобно использовать для получения более компактного описания сцены (чем вурф-отображение), строя граф ее инвариантного дескриптора по скользящему фрейму в пять соседних вершин. Имея преимущество скорости обработки, описание такого вида имеет свой минус: малые гладкие деформации контура овала, произошедшие вдали от окрестностей вершин октета, могут оставить *неизменным* дескриптор – при том, что правило принадлежности овала данному классу проективной эквивалентности (требуемое для распознавания, инвариантного к смене ракурса регистрации объекта) может оказаться нарушенным. В рамках стоящей перед нами задачи описанная выше малая деформация фигуры так же может оставить неизменными ко-

ординатные оценки пары полюсов c_1, c_2 (их может быть и больше двух, **теорема 2** не ограничивает сверху их количества), однако в форме W -отображения, являющегося *интегральным* описанием объекта, происшедшие изменения его облика “должны отразиться”. Вернемся к вопросу однозначной локализации $\text{int}P$ по оценкам диспозиции сета $\{c\}$ произвольной размерности, предварительно затронув ранее не обсуждавшиеся (в предшествующих публикациях данного цикла исследований) аспекты связи положений **теоремы 2** с *дуальными* свойствами T -поляры.

На рис. 5 фигура “овал” задана такой аналитической моделью, в которой позиция тестового полюса p , специальным образом подобранная, детерминирует (с подпороговой погрешностью) *коллинеарную* триаду ЭТ (помечены литерами e_1, e_2, e_3 и локализованы меткой “малый квадрат”), принадлежащую T -поляре, изображенной на рис. 5 под именем “ $T(p)$ ”. Триада $\{e\}$ и задала положение прямой LINE , для которой были вычислены две ее проективно инвариантные пары F, S и J, G . Пару J, G дуально связывает полюс c_1 ; по его координатам (в роли *тестового полюса*) сформирована T -поляра “ $T(c_1)$ ”. Аналогичным образом, полюс c_2 пары F, S использован в качестве тестового для вычисления третьей поляры “ $T(c_2)$ ”. Этот прием позволил наглядным образом показать вновь обнаруженные свойства T -поляры (связывающие ее геометрию с “ $\text{ext}L$ ” инвариантами **теоремы 2**):

“Поляра $T(c_2)$ включает пару F, S , тогда как J и G принадлежат поляре $T(c_1)$ ”!

Интуитивно возникшая гипотеза относительно позиционной связи пары c_1, c_2 с породившим всю структуру тестовым полюсом p подтверждений не получила. На врезке рис. 5 (справа вверху) с 16-кратным увеличением показан локус сцены, включивший все три полюса. Принадлежность p отрезку c_1-c_2 была экспериментально опровергнута. Так что острую актуальность в разработке критерия для позиционирования $\text{int}P$ по базе $\{c\}$ не удалось “разрядить” подбором формулы координатной зависимости p от c_1 и c_2 (да она и не помогла бы в случае не запрещаемого **теоремой 2** сета $\{c\}$ с числом полюсов, большим двух). Предстояла разработка подхода *универсального* (не предполагающего исключений) и пригодного для любой размерности $\{c\}$. Плодотворной оказалась идея включить одним из аргументов критерия позицию прямой $\text{ext}L$. Первым шагом на этом пути был избран прием, инвариантно детерминирующий $\text{int}P$ по *паре* c_1, c_2 . Искомая позиция v должна удовлетворять уравнению $W(c_1, v, c_2, cL) = 1$, где cL — пересечение прямых c_1-c_2 и $\text{ext}L$, что всегда реализуемо, определяя положение для v во внутренней части отрезка c_1-c_2 по законам гар-

монического расширения триады c_1, c_2, cL (при сдвиге $\text{ext}L$ в *несобственную* область проективный инвариант сменяется аффинным, и v размещается в середине c_1-c_2). Не менее отрадным выглядит и тот факт, что в схеме поиска v (и в обобщенном методе оценки $\text{int}P$ для сцен, где полюсов $\{c\}$ больше двух) нет необходимости в привлечении координат пересечений луча c_1-c_2 с *контуром* овала. Обобщить полученный *одномерный* вариант критерия применительно к ситуации сета $\{c\}$ в виде выпуклого m -вершинника оказалось делом несложным. Разработанный подход реализует итерационная процедура.

На врезке рис. 6 (справа внизу) показана схема численной обработки для “условной” композиции в виде тройки полюсов $\{C_1, C_2, C_3\}$ и заданной при них прямой “ LINE ”. На первом шаге итерации каждая из сторон треугольника $C_1-C_2-C_3$ подвергается обработке, аналогичной рассмотренной для отрезка c_1-c_2 , т.е. трижды решается задача гармонического расширения соответствующих коллинеарных триад, в результате чего появляется треугольник “ $a-b-c$ ” позиционных оценок, вписанный в исходный (на той же врезке в качестве примера для стороны C_1-C_2 выписано уравнение $W(C_1, a, C_2, e) = 1$, решение которого фиксирует позицию точки “ a ”). В итоге второго шага итерации на поле внутри фигуры “ $a-b-c$ ” появляется треугольник “ $c_1-c_2-c_3$ ”. Продолжение итеративного процесса (за 6-7 шагов) обеспечивает финальную оценку (с желаемой точностью) искомой позиции “ C ”. Но и упомянутые “6-7 шагов” не обязательны для процедуры получения “ C ”, так как возможна ее оптимизация: решается линейная система восьми уравнений (для восьми коэффициентов проективного преобразования плоскости в декартовом 3D пространстве), преобразующая треугольник $C_1-C_2-C_3$ в *правильный*, вслед за чем матрица обратного преобразования переводит центр правильной фигуры в искомую позицию “ C ”. Рассмотренный выше пример с *треугольной* конфигурацией $\{c\}$ без труда обобщается до случая выпуклого m -вершинника (что мы оставляем без пояснительного комментария).

Вновь отсылая читателя к рис. 6, завершим тему данного раздела демонстрацией вида вурф-функций (врезка вверху слева) для сцены с модельной композицией рис. 5, где кривые $w(L)$ и $w(T)$ подчиняются поведению T -поляры, вычисляемой уже для нового тестового полюса v (задаваемого в соответствии с описанной выше итерационной схемой по диспозиции c_1, c_2 и $\text{ext}L$), каковая, будучи не связанной ни с триадой ЭТ (e_1, e_2, e_3), ни с позициями инвариантного квартета $\{F, J, S, G\}$ на “ LINE ”, обеспечивает ход функций $w(L), w(T)$, не коррелируемый в *совместном* прохождении гармонических значений вурфа (как это было для сцены рис. 1–рис. 3). Это обстоя-

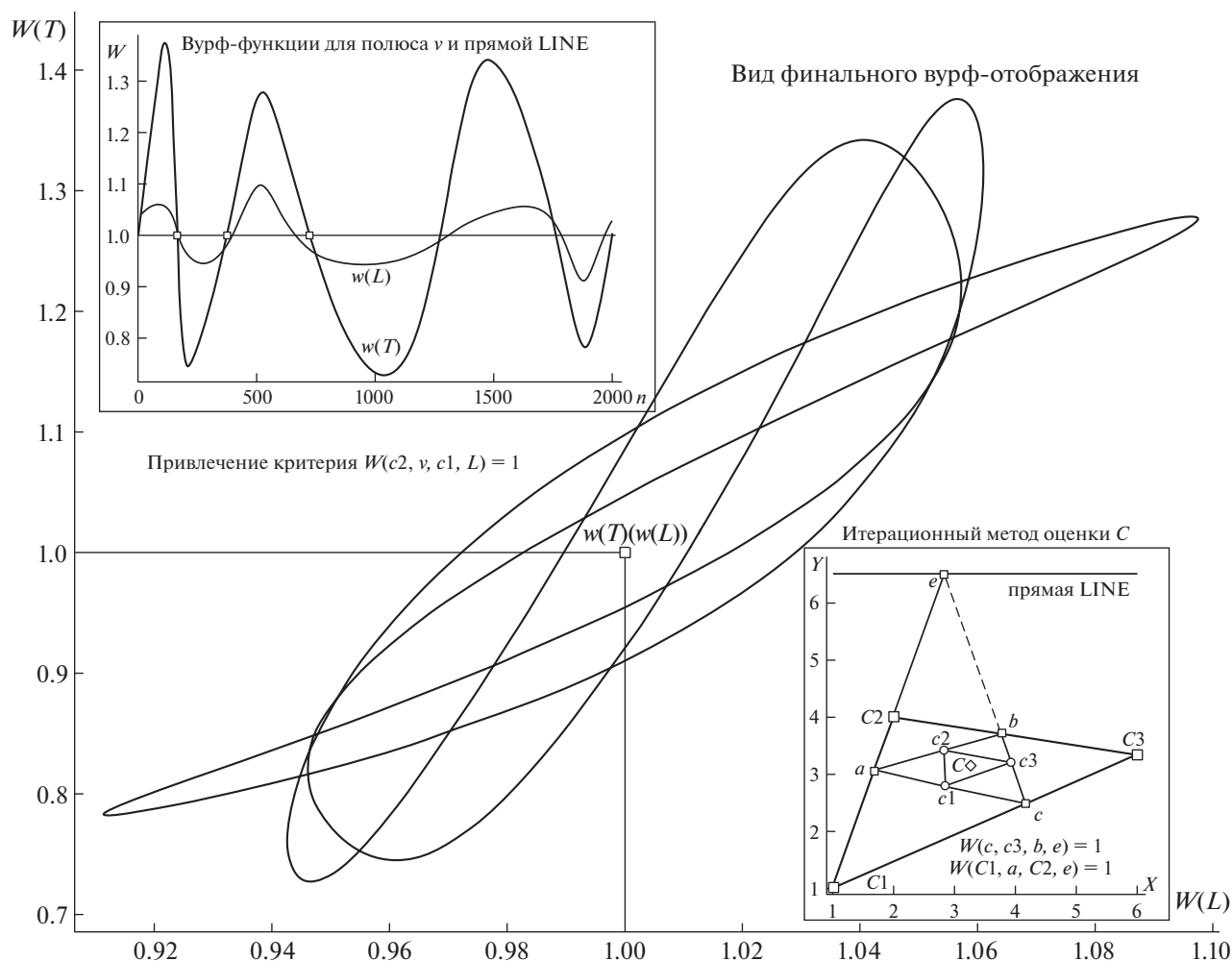


Рис. 6. Вид W -отображения $w(T)(w(L))$ сцены “овал + extL” (рис. 5), полученного согласно итерационному критерию, задающему полюс $\text{int}v$ по $\{c\}$ (схема вычисления C на примере трехвершинного сетя $\{C_1, C_2, C_3\}$ дана на врезке справа внизу), и вурф-функций $w(L)$, $w(T)$, найденных по этому критерию (врезка слева сверху). Остальные пояснения в тексте.

тельство отражается на характерной форме W -отображения $w(T)(w(L))$, не имеющего узла многочисленных самопересечений в точке с координатами $(1, 1)$ (на плоскости вурфов), как это показано на рис. 1, при том, что радиальная “квазисимметрия” относительно этой гармонической точки сохраняется.

3. О МЕТОДАХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ В СЦЕНАХ С ФИКСИРОВАННОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ

Рассмотрим последний случай организации сцен, когда в композицию с овалом (в роли ЛЭ) входит касательная, фиксируемая на его контуре в заданной точке касания. По причине вычислительной взаимообусловленности эквивалентны дефиниции ЛЭ и в виде прямой L (касательная), и в типизации позицией P (точка касания). Не

углубляясь в детали двух работ, экспериментально вычислительной (на модели овала с фиксированной точкой на контуре (Николаев, 2017)) и чисто теоретической (с доказательством теоремы об овале с двумя особыми точками (Савчик, Николаев, 2018)), где описано привлечение свойств так называемых *чевиан* (название внутренних отрезков в треугольнике, общее для его медиан, высот, биссектрис) с критерием **К** их пересечения в общей точке C . Схема с тремя касательными изображена на рис. 7, где касательная в P фиксирована, а пара к ней прилежащих (в P_j и P_m) локализуется в переборном численном процессе, формируя цепь решений $\{C\}$ (названную M -трек), на которой по второму критерию фиксируется целевая позиция $\text{int}P$. В проиллюстрированном случае для каждой последовательно перебираемой $P_j(n)$ находится ей симметричная $P_m(n)$ по условию **К** (пересечения чевиан P_1-P_m , P_2-P_j и $P-P_5$ в C).

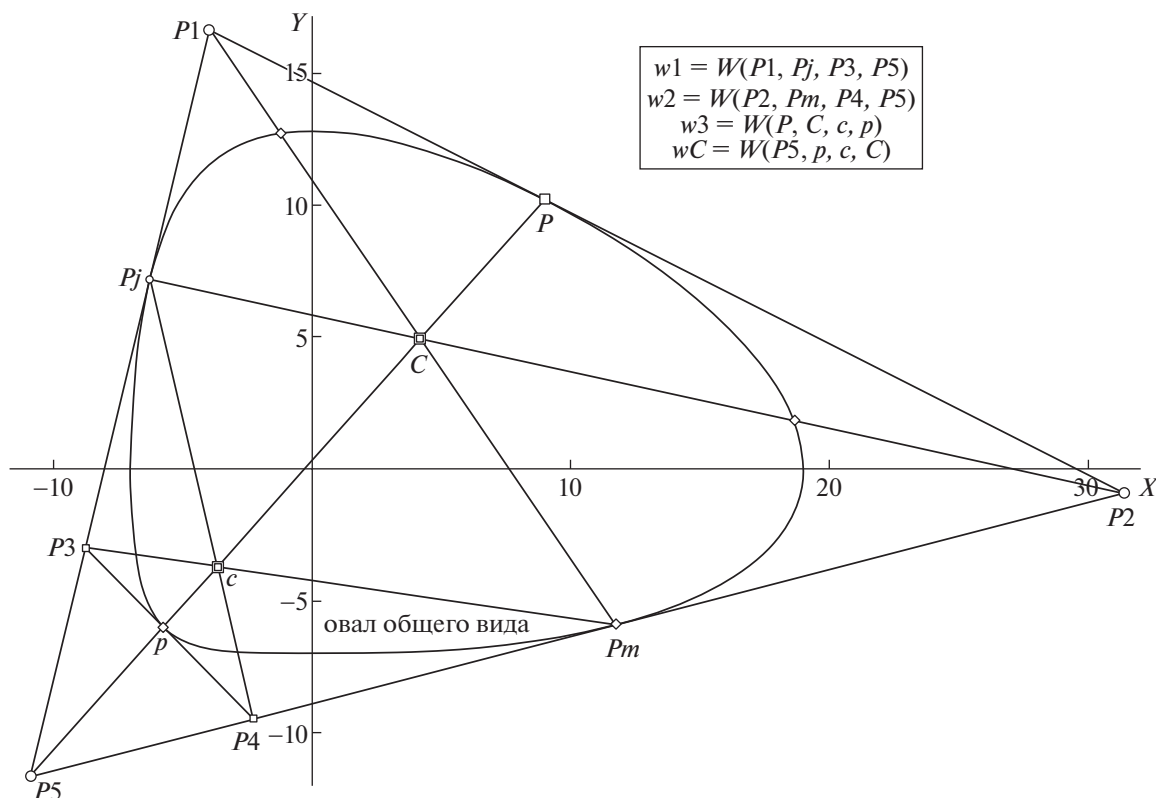


Рис. 7. Переборная схема получения проективно инвариантной позиции C (как текущей вершины проективно стабильного M -трека) в сцене с фиксированной точкой P на контуре овала и варьируемыми касательными в Pm и Pj (по критерию пересечения в C трех чевиан $Pm-P1$, $Pj-P2$ и $P-P5$) с показом (вверху в рамке) структурных правил вычисления вурфов (проверочных $w1$, $w2$ с критерием $w1 = w2$ и задающего тестовый полюс $intC$ на M -треке решений $\{C\}$ согласно априорному критерию $wC \equiv const$). Остальные пояснения в тексте.

При этом должно выполняться проверочное условие $w1 = w2$ (на врезке рис. 7 $w1 = W(P1, Pj, P3, P5)$, $w2 = W(P2, Pm, P4, P5)$). Искомая $intP$ выбирается на M -треке по априори выбранному условию k равенства $w3$ либо wC некоторой константе (например, $wC \equiv 5/4$). Теория подтверждает осуществимость такой переборной процедуры поиска $intP$ с использованием критериев K (формирование M -трека) и k (выбор на нем позиции $intP$). Во второй из двух доказанных в теоретической работе **теорем** утверждается: “Для овала и точек A и B на нем существует, в общем (невырожденном) случае, не менее двух точек C , дополняющих A и B до тройки, обладающей свойством пересечения чевиан”. Успех в локализации $intP$ сводит ситуацию к случаю “овал + $intP$ ”, рассмотренному в разд. 1.

4. ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ДУАЛЬНОСТЬЮ T -ПОЛЯРЫ

Изложенные в разд. 2 соображения об “открывшихся на экспериментальном уровне дуальных свойствах T -поляры” логически подводят к возможности ее использования в качестве источ-

ника данных об альтернативных вариантах задания $extL$ (для композиций вида “овал + $intP$ ”) в условиях, когда применение критерия “наилучшей согласованности” экстремумов $w(T)$ и $w(L)$ на интервалах между соседними ЭТ (см. рис. 3 в разд. 1) удастся перенести уже не на межпозиционные интервалы сета $\{E\}$, а на отрезки, соответствующие парам проективно инвариантных точек $c1, c2$ поля овала, связывающих дуальную пару на $extL$ и на пересекающей ее T -поляре (что проиллюстрировано на рис. 5 поведением поляра $T(c1)$ и $T(c2)$). Развернем эту идею подробнее. В доказательстве **теоремы 2** (Балицкий и др., 2017) применена параметризация $extL$ овалом. Коллеги, анализировавшие свойство дуальности двух инвариантных пар (M, N) на $extL$ (“для отображения f , не имеющего неподвижных точек, $f(M) = N$ и $f(N) = M$ ”), сделали вывод о правдоподобности такой гипотезы: свойством дуальности $f(M) = N$, $f(N) = M$, может обладать не только прямая L , фиксированная извне при овале, но и кривая S , обладающая свойством — “всякая прямая, пересекающая овал, пересекает $extS$ ровно в одной точке”. Нетрудно показать, что этому ограничению для $extS$ удовлетворяет любая T -поляра, по-

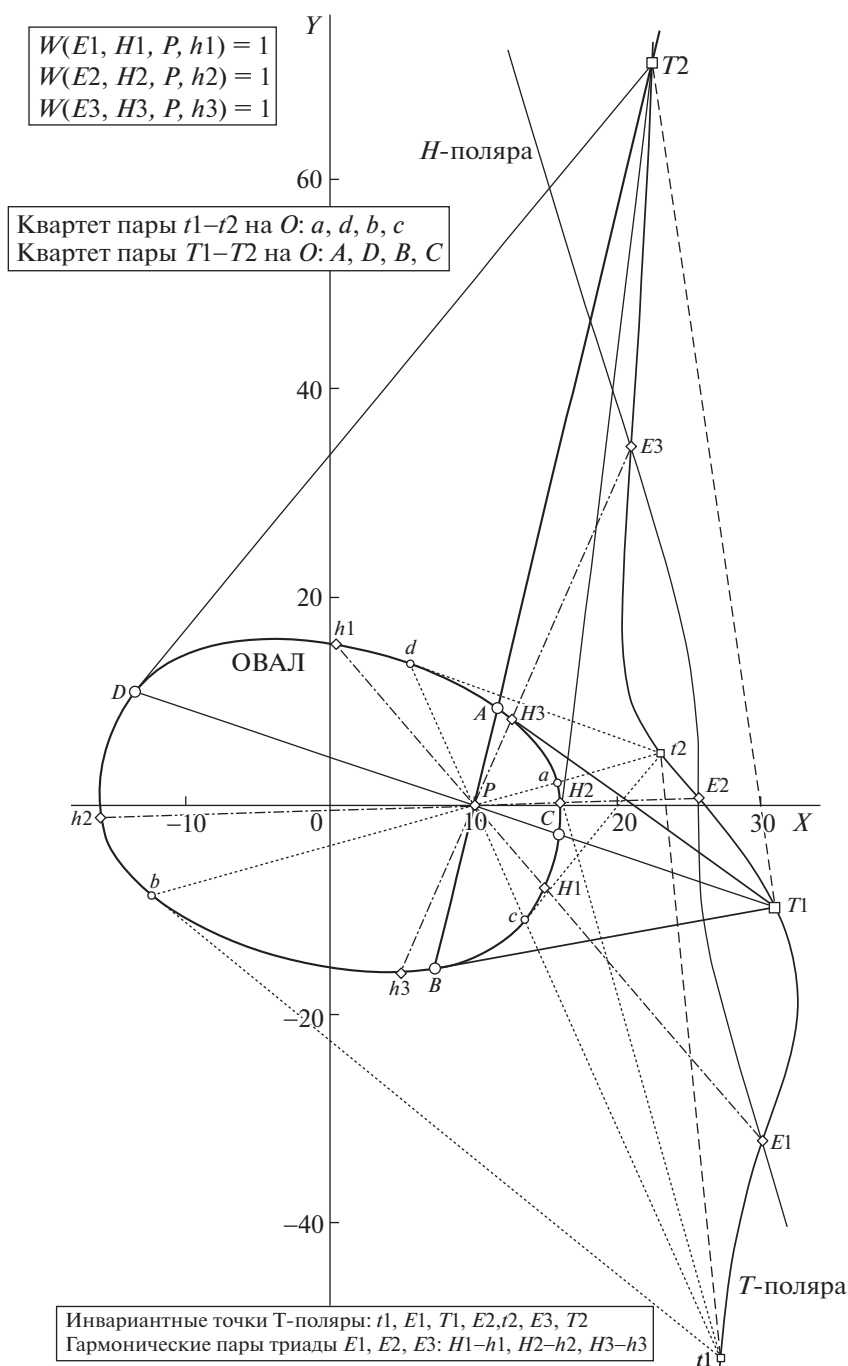


Рис. 8. К идее привлечения T -полюры в сцене “овал + $\text{int}P$ ”, способной заменить $\text{ext}L$ для нее — с таким же наличием у полюры двух пар ($T1, T2$ и $t1, t2$) проективно инвариантных позиций (добавление к сету ЭТ $E1, E2, E3$). Структурные свойства и правила вычисления базисных вурфов (в рамках на поле рис.), позволяющих найти на контуре ОВАЛА пару сетов упорядоченных стабильных точек $\{A, B, C, D, a, b, c, d\}$ и $\{H1, H2, H3, h1, h2, h3\}$, используемых для оценки двух дескрипторов сцены. Остальные пояснения в тексте.

рождаемая полюсом $\text{int}P$ (так как она имеет асимптоту, проходящую через P , и лежит по одну сторону от нее, к тому же не содержит петель). Не имея на сегодня корректно доказанного положения о T -полюре как универсальном носителе квартета стабильных позиций (т.е. аналог **теоремы 2**

для нее пока не доказан; при том, что не получено и модельных примеров его опровержения) тезисы процедур, излагаемые далее в этой связи, охарактеризуем *эвристическими* схемами.

На рис. 8 изображен “ОВАЛ” в композиции с тестовым полюсом P и T -полюра, чье положение

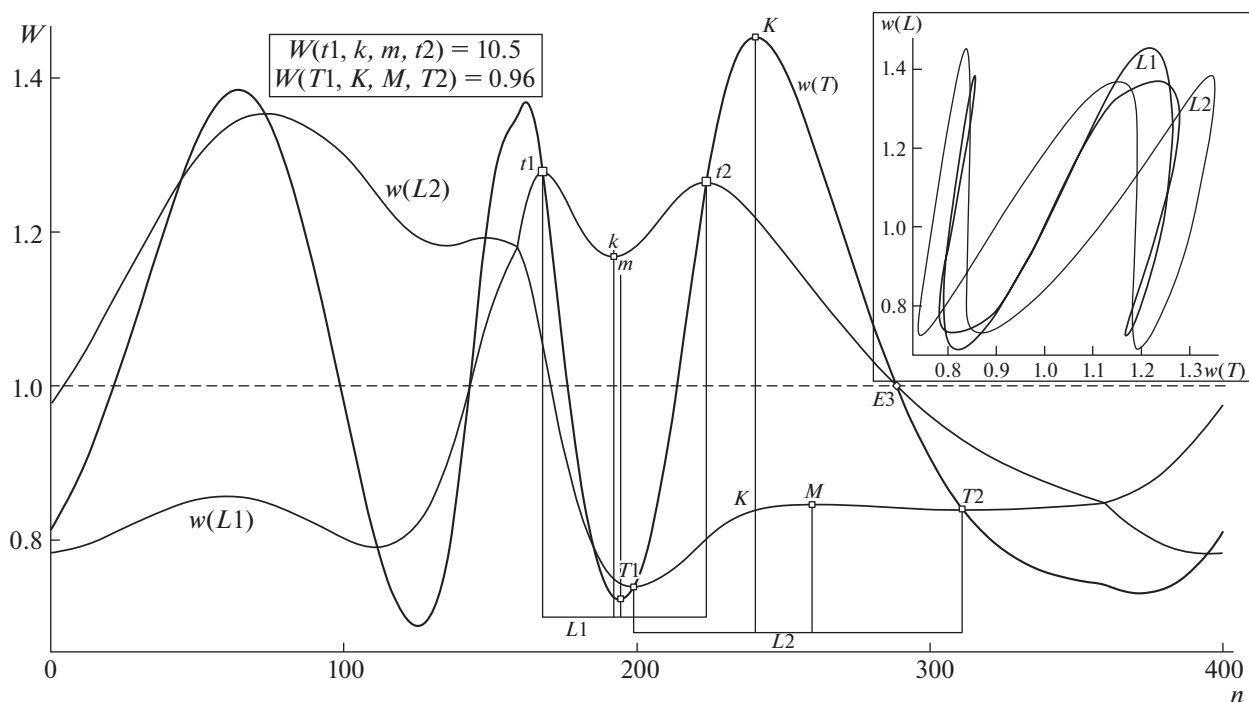


Рис. 9. Вид вурф-функций $w(T)$, $w(L1)$ и $w(L2)$ в ситуации привлечения T -поляры для сцен “овал + $\text{int}P$ ” с выбором из двух интервалов $T1-T2$ и $t1-t2$ (рис. 8) оптимального по оценке значений вурфов (с наилучшим согласованием экстремумов функций на этих интервалах) — с целью задания положения $\text{ext}L$, инцидентной позиции “интервала=лидера”. На врезке справа показана карта W -отображений $w(L1)(w(T))$ и $w(L2)(w(T))$. Комментарии в тексте.

детерминировано этим $\text{int}P$. Модельный эксперимент фиксирует на поляре две пары дуально сопряженных инвариантных точек: $t1, t2$ и $T1, T2$ (на рис. показана также и триада ЭТ $E1, E2, E3$ — в пересечениях с H -полярой; при том, что на контуре овала им соответствуют тройка гармонических пар $h1/H1, h2/H2$ и $h3/H3$). Выявленные процедурой (поиска стабильных точек T -поляры) положения отрезков $t1-t2$ и $T1-T2$ — конкуренты на роль задающих $\text{ext}L$; а оценку рейтинга по критерию согласованности экстремумов вурф-функций для них (а также вид функций $w(T)$, $w(L1)$, $w(L2)$, где $L1 \equiv t1-t2$ и $L2 \equiv T1-T2$, и отображений $w(L1)(w(T))$, $w(L2)(w(T))$ на врезке) демонстрирует (в рамочке вверху) рис. 9. Данный модельный пример позволяет яснее выразить значительную экономию ресурса вычислений (в связи с утерей необходимости в детекции сета ЭТ и с уменьшением на W -функциях количества интервалов = претендентов задания $\text{ext}L$), каковая проявляется при использовании эмпирически выявленных дуальных свойств T -поляры.

Пристальное внимание к особенностям *дуального характера* T -поляры в конечном итоге привело (для задачи получения W -отображения сцены “овал + $\text{int}P$) к пересмотру тезиса об обяза-

тельном привлечении ЛЭ $\text{ext}L$. Действительно, вычисление W -отображения требует наличия двух *независимых* вурф-функций, связанных с общей для них вершиной аппроксимации овальной кривой. T -поляра позволяет любой такой вершине n поставить в однозначное соответствие ей дуальную m (ибо плюккеровы поляры пересекающихся хорд имеют своими полюсами точки T -поляры). В позициях двух инвариантных дуальных пар $t1, t2$ и $T1, T2$ эта связь усиливается, становясь *взаимно однозначной*, откуда следует, что $w1(n)=w2(m)$ и $w2(n)=w1(m)$, а потому W -отображение должно иметь два самопересечения на биссектрисе (положительного квадранта) плоскости вурфов, что и показывает рис. 10 справа (слева метки “кружок” локализуют на вурф-функциях позиции инвариантной пары $t1', t2'$, дуальной паре $t1, t2$). Метки “квадрат”, соединенные тонкими прямыми, дают возможность убедиться, что амплитуды экстремумов функций $wT(n)$ (утолщенная линия) и ей дуальной $wT(m)$ (тонкая линия) *совпадают*. Ограничимся сделанным комментарием.

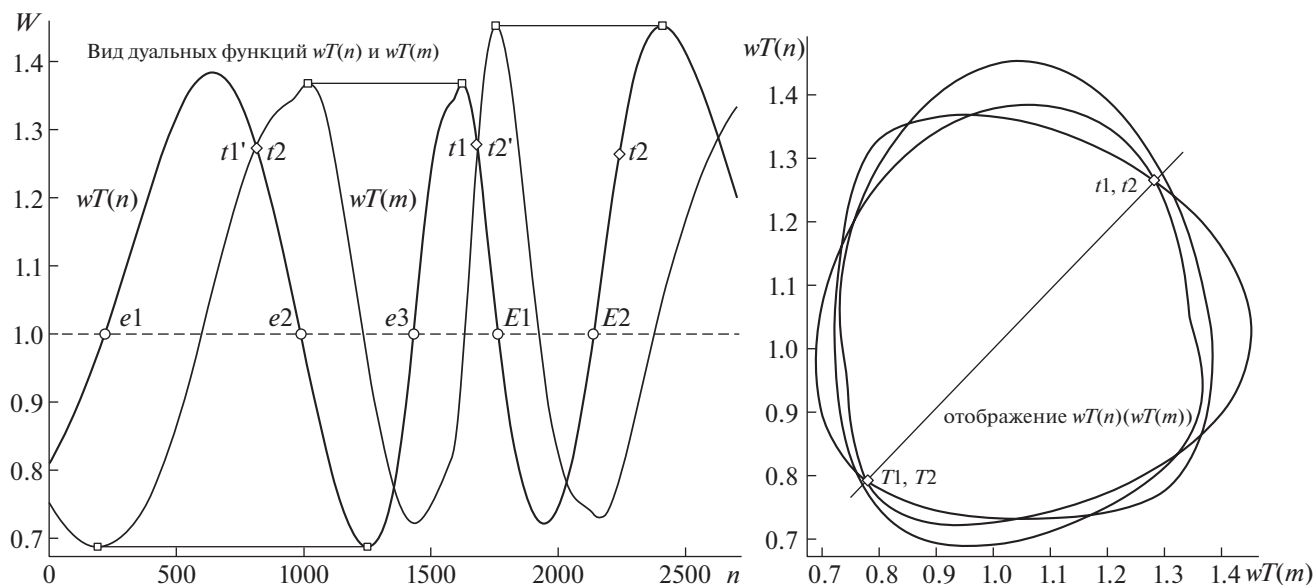


Рис. 10. T -поляра в сцене “овал + int P ” как самодостаточный источник данных для формирования вурф-отображения $wT(n)(wT(m))$ (справа) с использованием вурф-функции $wT(m)$ (показана слева тонкой линией), дуально связанной с функцией $wT(n)$ (утолщенная линия; инвариантные точки $t1', t2'$ дуальны паре $t1, t2$). Остальные пояснения в тексте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем главные итоги доложенной работы. Концепция, заявленная во Введении, является обобщенной постановкой задачи проективно инвариантного описания гладких выпуклых фигур, регистрируемых (оптика камер задана плоской центральной проекцией) совместно с ЛЭ (точкой либо прямой) в произвольной фиксированной композиции. Такая постановка мотивирует разбиение процедуры обработки на два этапа: первая фаза должна обеспечить (для *варьируемой* ЛЭ входной композиции) приведение сцены к эталонному виду “овал + int P + ext L + T -поляра” (трансформируя исходный произвол задания “овал + ЛЭ” привлечением алгоритма, требуемого именно для этой сцены), тогда как стандартный процесс в финале формирует проективно инвариантное описание входного объекта в виде вурф-отображения (интерес к *вурфу*, по сути ключевому элементу *производной Шварца*, описанной более века назад, до сих пор не угас у математиков (Овсиенко, Табачников, 2008)). Обе вычислительные стадии быстрые (наиболее сложный случай – предобработка сцен с заданной *касательной* к овалу; с ссылкой на **теорему 3** она рассмотрена в разд. 3).

Двухстадийный процесс получения W -отображения входной композиции (дающего возможность решать задачи распознавания овалов по схеме Фреше (Alt, Godau, 1995) на базе методов оптимизации (Гилл, Мюррей, 1985)), включивший *все* варианты задания объекта “овал + ЛЭ”,

предложенный и успешно испытанный нами на численных моделях, не единственный в пуле *новых результатов* работы. Найдены (итоном включения в схемы обработки выдвинутых критериев) *универсально* применимые методы, исходной основой имевшие теорию рода *необходимых признаков (теоремы)*, а потому потребовавшие для кластеров ЭТ и $\{c\}$ найти проективно *однозначную* замену. Описаны перспективные (для технических систем) методы привлечения выявленных нами *дуальных* свойств T -поляры, следствиями чего могут стать: отказ от опоры на ЭТ (**теорема 1**) в роли источника данных для оценки ext L по сету ЭТ и вычислительно более оптимальные приемы формирования W -отображений, не требующие ext L (**теорема 2**) для оценки *второй* вурф-функции к нему.

В завершение темы не один год идущего исследования свойств кривых семейства *овалов* (и инструментов проективного их анализа, к числу которых относится T -поляра) следует упомянуть, что классические дифференциальные методы оценки *инвариантов* для них (Картан, 1933; Faugeras, 1993) не приложимы в рамках задач *технического зрения* (по причинам *практически* нерализуемых требований к точности вычисления производных высокого порядка на *дискретных* сетках для гладкой кривой). Но растущая актуальность подобного класса задач автоматического распознавания побуждает искать компромиссные подходы (Olver, 2001; Hann, Hickman, 2002; Musso, Nicolodi, 2009; Николаев, 2017).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-07-00836).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Акимов Г.П., Богданов Д.С., Куратов П.А. Задача проективно инвариантного описания овалов с неявно выраженной центральной и осевой симметрией и принцип двойственности Плюккера. *Труды ИСА РАН*. 2014. Т. 64. № 1. С. 75–83.
- Балицкий А.М., Савчик А.В., Гафаров Р.Ф., Коноваленко И.А. О проективно инвариантных точках овала с выделенной внешней прямой. *Проблемы передачи информации*. 2017. Т. 53. № 3. С. 84–89.
- Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. *Практическая оптимизация*. М. Мир, 1985. 509 с.
- Глаголев Н.А. *Проективная геометрия*. М. Высш. Шк., 1963. 344 с.
- Картан Э. *Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства*. Сб. *Современная математика. Книга 2-я*. М., Л.: Гос. технико-теоретическое изд.-во, 1933. 72 с.
- Моденов П.С. *Аналитическая геометрия*. М. Изд-во Моск. ун-та, 1969. 699 с.
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. II. Овал в композиции с дуальным элементом плоскости. *Сенсорные системы*. 2011а. Т. 25. № 3. С. 245–266.
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. III. Обработка осесимметричных овалов методами анализа поляра. *Сенсорные системы*. 2011б. Т. 25. № 4. С. 275–296.
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. IV. Методы формирования проективно инвариантного описания осесимметричных овалов. *Сенсорные системы*. 2012. Т. 26. № 4. С. 280–303.
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. X. Методы поиска октета инвариантных точек контура овала — итог включения развитой теории в схемы его описания. *Сенсорные системы*. 2017. Т. 31. № 3. С. 202–226.
- Николаев П.П., Николаев Д.П. Проективно инвариантное распознавание плоских контуров на примере центрально-симметричных кривых. *Труды ИСА РАН*. 2009. Т. 45. С. 194–205.
- Овсиенко И.Ю., Табачников С.Л. *Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое: от производной Шварца до кохомологий групп диффеоморфизмов*. М. МЦНМО, 2008. 280 с.
- Савчик А.В., Николаев П.П. Теорема о пересечении Т- и Н-поляра. *Информационные процессы*. 2016. Т. 16. № 4. С. 430–443.
- Савчик А.В., Николаев П.П. Схема проективного сопоставления для овалов с двумя особыми точками. *Информационные технологии и вычислительные системы*. 2018. № 1. С. 60–67.
- Alt H., Godau M. Computing the Frechet distance between two polygonal curves. *International Journal of Computational Geometry and Applications*. 1995. V. 5 (1–2). P. 75–91.
- Faugeras O. Cartan's moving frame method and its application to the geometry and evolution of curves in the euclidean, affine and projective planes. *Joint European-US Workshop on Applications of Invariance in Computer Vision*. Berlin, Heidelberg, Springer. 1993. P. 9–46.
- Hann C.E., Hickman M.S. Projective curvature and integral invariants. *Acta Appl. Math.* 2002. V. 74 (2). P. 177–193.
- Musso E., Nicolodi L. Invariant signature of closed planar curves. *J. Math. Imaging and Vision*. 2009. V. 35 (1). P. 68–85.
- Olver P.J. Geometric foundations of numerical algorithms and symmetry. *Appl. Alg. Engin. Comp. Commun.* 2001. V. 11. P. 417–436.

Recognition of projectively transformed planar figures XII.

On new methods for projectively-invariant description of ovals in composition with a linear element of a plane

P. P. Nikolayev*

*Institute for Information Transmission Problems “Kharkevich Institute” RAS
127994 Moscow, Bolshoy Karetny per., 19, Russia*

**E-mail: nikol@iitp.ru*

For scenes where the input object is a composition of a general oval in combination with a linear element (LE, that is, a point, P , or a line, L) of the plane incident to it, in an arbitrary mutual arrangement of them (an external LE, an internal LE, or an LE belonging to the contour of the oval), on the material of model numerical realizations, procedural approaches for the problem of projectively-invariant description of such a composition are considered. The proposed processing algorithms use previously obtained theoretical assertions (theorems). For an oval with a specific internal point, $\text{int}P$, these theorems guarantee the presence of a triad of external projectively-invariant elliptic points (ET): $E1$, $E2$, and $E3$. For an oval combined with a line, $\text{ext}L$ (external position), they guarantee the presence of two pairs of invariant points generating a pair of stable interior points, $C1$ and $C2$. It is shown how to convert an arbitrarily organized composition of the “oval + LE” type to a composition of the “oval + $\text{int}P$ + $\text{ext}L$ + T -polar” type, suitable for calculating its projectively-invariant map, which is not solely based on a fixed set of invariant points of the contour, but represents an integral description of the original composition (in the form of a wurf map). We implement this universal algorithm-

mic approach as a result of introducing the developed criteria for the deterministic selection of the ET *pair* specifying the ext L and the *only* int P from the $C1$ - $C2$ pair - for specifying the external invariant T -polar curve.

Key words: linear element of a plane, elliptic points, wurf, projectively-invariant mapping, criteria for choosing basis points

REFERENCES

- Akimova G.P., Bogdanov D.S., Kuratov P.A. Task projectively the invariant description of ovals with implicitly expressed central and axial symmetry and the principle of a duality of Plucker. *Trudy ISA RAN* [Proceedings of the ISA RAS]. 2014. V. 64 (1). P. 75–83 (in Russian).
- Balitsky A.M., Savchik A.V., Gafarov R.F., Konovalenko I.A. On projective invariant points of oval coupled with external line. *Problemy peredachi informacii* [Problems of Information Transmission]. 2017. V. 53 (3). P. 84–89 (in Russian).
- Gill P., Murray W., Wright M. *Practical optimization*. New York, Academic Press. 1981. 401 p.
- Glagolev N.A. *Proektivnaja geometrija* [Projective geometry]. Moscow, Vysshaja shkola [High school]. 1963. 344 p. (in Russian).
- Kartan Je. *The method of a moving ranging mark, the theory of continuous groups and generalized spaces*. Moscow, Leningrad, Gosudarstvennoe tekhniko-teoreticheskoe izdatel'stvo [State technical and theoretical publishing]. 1933. 72 p. (in Russian).
- Modenov P.S. *Analiticheskaja geometrija* [Analytic geometry]. Moscow, Izdatel'stvo moskovskogo universiteta [Moscow University Press]. 1969. 699 p. (in Russian).
- Nikolayev P.P. Recognition of projectively transformed planar figures. II. An oval in a composition with a dual element of a plane. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2011. V. 25 (3). P. 245–266 (in Russian).
- Nikolayev P.P. Recognition of projectively transformed planar figures. III. Processing of axisymmetric ovals by means of polar line analysis methods. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2011. V. 25 (4). P. 275–296 (in Russian).
- Nikolayev P.P. Recognition of projectively transformed planar figures. IV. Methods for forming a projective-invariant description of axisymmetric ovals. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2012. V. 26 (4). P. 280–303 (in Russian).
- Nikolayev P.P. Recognition of projectively transformed planar figures. X. Methods for finding an octet of invariant points of an oval contour – the result of introducing a developed theory into the schemes of oval description. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2017. V. 31 (3). P. 202–226 (in Russian).
- Nikolayev P.P., Nikolayev D.P. Proektivno-invariantnoe raspoznavanie ploskih konturov na primere central'no-simmetrichnykh krivykh [Projectively invariant recognition of flat contours on the example of centrally symmetric curves]. *Trudy ISA RAN* [Proceedings of the ISA RAS]. 2009. V. 45. P. 194–205 (in Russian).
- Ovsienko I.U., Tabachnikov S.L. *Projective Differential Geometry Old and New From the Schwarzian Derivative to the Cohomology of Diffeomorphism Groups*. Moscow, MCCME. 2008. 280 p (in Russian).
- Savchik A.V., Nikolayev P.P. The theorem on the intersection of the T - and H -polars. *Information processes*. 2016. V. 16 (4). P. 430–443 (in Russian).
- Savchik A.V., Nikolayev P.P. Projective correspondence method for an oval with two fixed points. *Information technologies and computing systems*. 2018. V. 16 (4). P. 60–67. (in Russian).